

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.141

### КУЛОНОВСКИЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХФРАГМЕНТНОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ С ЯДРОМ

В. В. Комаров, А. М. Попова, Ф. И. Карманов, В. Л. Шаблов  
(НИИЯФ)

Построен эффективный потенциал взаимодействия двухфрагментной ядерной системы с кулоновским полем точечного источника. Для систем частиц с потенциалами, аналитическими относительно комплексных масштабных преобразований, получено замкнутое выражение для константы поляризационного потенциала, основанное на асимптотическом поведении матричных элементов двухчастичной кулоновской функции Грина в координатном представлении.

Как известно, одним из способов изучения внутренней структуры многочастичной квантовой системы является исследование поведения этой системы во внешнем силовом поле, в особенности в кулоновском поле точечного источника, роль которого могут выполнять сопутствующие частицы (ядра), образующиеся в реакции одновременно с изучаемой системой [1—3]. В случае стабильных систем потенциал их взаимодействия с внешним источником представляет собой сумму кулоновского, мультипольного и поляризационного потенциалов, свойства которого рассматривались в большом количестве работ (см., напр., [4—7]). В случае распадающихся систем (резонансов) эффективный потенциал будет содержать дополнительные члены, связанные с взаимодействием виртуальных продуктов распада резонанса и сопутствующей частицы [8].

Ниже будет приведен простой способ получения выражения для поляризационного потенциала взаимодействия стабильной двухфрагментной квантовой системы с третьей частицей, обобщающий результаты предыдущих работ. Развиваемый метод допускает обобщение и на случай нестабильных систем, что важно для описания влияния внешних полей на наблюдаемые характеристики нестабильных кластеров в ядерной и атомной физике [3, 8—9].

Гамильтониан рассматриваемой трехчастичной системы запишем в виде

$$H = H_{\alpha} + V^{\alpha},$$

где индекс « $\alpha$ » относится к изучаемой двухчастичной подсистеме;  $V^{\alpha}$  — кулоновское взаимодействие третьей частицы с фрагментами, образующими пару  $\alpha$ . При этом  $H_{\alpha} = H_{0\alpha} + V_{\alpha} + h_{0\alpha}$ , где  $h_{0\alpha}$  — гамильтониан свободного движения третьей частицы относительно центра масс пары  $\alpha$ . Тогда оператор  $H$  можно представить в виде

$$H = (H_{0\alpha} + V_{\alpha}) + (h_{0\alpha} + V_c^{\alpha}) + W^{\alpha}, \quad (1)$$

где  $V_c^{\alpha}$  — кулоновское взаимодействие подсистемы  $\alpha$ , рассматриваемой как точечный объект, и третьей частицы;  $W^{\alpha} = V^{\alpha} - V_c^{\alpha}$  — потенциал, ответственный за поляризационные эффекты.

Для резольвенты  $g_{\alpha}(z) = (z - H_{0\alpha} - V_{\alpha})^{-1}$  воспользуемся разложением

$$g_{\alpha}(z) = \sum_m \frac{|\Psi_{jm}\rangle \langle \Psi_{jm}|}{z + \kappa_{\alpha}^2} + \hat{g}_{\alpha}(z), \quad (2)$$

где  $P = \sum_m |\varphi_{jm}\rangle \langle \varphi_{jm}|$  — ортопроектор на состояния дискретного спектра гамильтониана внутреннего движения в паре  $\alpha$ , обладающие энергией  $(-\kappa_\alpha^2)$  и полным моментом  $j$ ;  $\hat{g}_\alpha(z)$  — функция Грина подсистемы  $\alpha$  в ортогональном подпространстве,

$$\hat{g}_\alpha(z) = (zQ - Q(H_{0\alpha} + V_\alpha)Q)^{-1}Q, \quad Q = 1 - P.$$

Представления (1) и (2) приводят к следующему уравнению для полной функции Грина системы  $G(z) = (z - H)^{-1}$ :

$$G(z) = g_\alpha(z - h_\alpha^c) + g_\alpha(z - h_\alpha^c)W^\alpha G(z), \quad (3)$$

где  $h_\alpha^c = h_{0\alpha} + V_\alpha^c$ . Тогда  $G(z) = G_1(z) + G_2(z)$  и

$$\begin{cases} G_1(z) = \sum_m \frac{|\varphi_{jm}\rangle \langle \varphi_{jm}|}{z + \kappa_\alpha^2 - h_\alpha^c} [1 + W^\alpha G(z)], \\ G_2(z) = \hat{g}_\alpha(z) + \hat{g}_\alpha(z)W^\alpha G(z). \end{cases} \quad (4)$$

Из (4) вытекает система уравнений для операторов  $G_1(z)$  и  $G_2(z)$ . Решая эту систему способом, известным из теории оптического потенциала [10, 11], получим

$$\begin{cases} G_1(z) = \sum_m \frac{|\varphi_{jm}\rangle \langle \varphi_{jm}|}{z + \kappa_\alpha^2 - h_\alpha^c} [1 + W^\alpha G(z)], \\ G_2(z) = R(z) + R(z)W^\alpha G_1(z), \end{cases} \quad (4')$$

где  $R(z) = (zQ - QHQ)^{-1}Q$ ,

$$R(z) = [zQ - Q(H_{0\alpha} + V_\alpha + W^\alpha + h_{0\alpha} + V_\alpha^c)Q]^{-1}Q.$$

Таким образом, эффективное взаимодействие в системе, состоящей из пары ( $\alpha$ ) и третьей частицы (или оптический потенциал), имеет вид

$$\begin{aligned} U_{mm'}(z) &= \langle \varphi_{jm} | W^\alpha + W^\alpha R(z) W^\alpha | \varphi_{jm'} \rangle = \\ &= \langle \varphi_{jm} | W^\alpha \{1 - \hat{g}_\alpha(z - h_\alpha^c) W^\alpha\}^{-1} | \varphi_{jm'} \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) использована связь между резольвентами  $R(z)$  и  $\hat{g}_\alpha(z - h_\alpha^c)$ :

$$R(z) = \hat{g}_\alpha(z - h_\alpha^c) + \hat{g}_\alpha(z - h_\alpha^c)W^\alpha R(z),$$

$$R(z) = [1 - \hat{g}_\alpha(z - h_\alpha^c)W^\alpha]^{-1} g_\alpha(z - h_\alpha^c).$$

Раскладывая теперь оператор  $R(z)$  в ряд по кратности взаимодействия  $W^\alpha$ , получим

$$U_{mm'} = \sum_m U_{mm'}^{(n)}. \quad (6)$$

Первое слагаемое в (6) соответствует эффективному потенциалу в борновском приближении, которое в координатном представлении убывает на бесконечности степенным образом (орбитальный момент пары  $\alpha$  отличен от нуля) либо экспоненциальным образом ( $l=0$ ). Добавление к  $U_{mm'}^{(1)}$  чисто кулоновского члена  $V_\alpha^c$  приводит к статической части потенциала взаимодействия:

$$V^{\text{stat}} = V_\alpha^c + U_{mm'}^{(1)} = \langle \varphi_{jm} | V_\alpha^c | \varphi_{jm'} \rangle. \quad (7)$$

Напомним, что разложение (7) является отправной точкой преобразования Веселовой в квантовой теории для систем трех заряженных частиц [12, 13].

Слагаемое второго порядка по  $W^\alpha$  в координатном представлении имеет вид

$$\langle \rho | \langle \varphi_{jm} | W^\alpha \widehat{g}_\alpha(z - h_\alpha^c) | \varphi_{jm} \rangle | \rho' \rangle,$$

где  $\rho$  — относительная координата центра масс пары  $\alpha$  и третьей частицы. Записывая  $\widehat{g}_\alpha(z - h_\alpha^c)$  в виде свертки функций Грина  $\widehat{g}_\alpha(z)$  и  $g_\alpha^c(z) = (z - h_{0\alpha} - V_\alpha^c)^{-1}$ :

$$\widehat{g}_\alpha(z - h_\alpha^c) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} \widehat{g}_\alpha(\varepsilon + i\tau) \otimes g_\alpha^c(z - h_\alpha^c - \varepsilon - i\tau), \quad 0 < \tau < \text{Im } z,$$

найдем, что асимптотическое поведение  $\langle \rho | U_{mm'}^{(2)} | \rho' \rangle$  при  $\rho, \rho' \rightarrow \infty$  определяется асимптотическим поведением кулоновской функции Грина  $g_c(z)$ . Раскладывая  $g_c(z)$  по парциальным волнам, получим [10]

$$\langle \rho | g_c(z) | \rho' \rangle = \frac{2\mu}{k\rho\rho'} \sum_{l\lambda} Y_{l\lambda}(\rho) Y_{l\lambda}^*(\rho') g_c^l(\rho, \rho', z),$$

где  $k = (2\mu z)^{1/2}$  и

$$g_c^l(\rho, \rho', z) = i(-1)^l (4k^2\rho\rho')^{l+1} \frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{(2l+1)!} \exp\{ik(\rho + \rho')\} \times \\ \times \Phi(l+1+i\eta, 2l+2, -2ik\rho_<) \Psi(l+1+i\eta, 2l+2, -2ik\rho_>).$$

Как обычно, здесь через  $\rho_<, \rho_>$  обозначены меньшая и большая из длин векторов  $\rho$  и  $\rho'$ ;  $\eta$  — кулоновский параметр задачи ( $\eta = Qq\mu/k$ );  $Q, q$  — заряды частиц. В случае, когда  $|k\rho| \gg 1, |k\rho'| \gg 1$ , парциальная функция Грина имеет вид

$$\langle \rho | g_c(z) | \rho' \rangle \xrightarrow[|k\rho'| \gg 1]{|k\rho| \gg 1} \frac{\mu}{ik} \left( \frac{1}{\rho\rho'} \right) \left( \frac{\rho_<}{\rho_>} \right)^{i\eta} \exp\{ik(\rho_> - \rho_<)\} \delta(\Omega_\rho - \Omega_{\rho'})$$

и

$$\langle \rho | g_c(z) | f \rangle \xrightarrow[|k\rho| \gg 1]{\mu\rho} \frac{\mu\rho}{ik} \int_0^\infty dx (x^{l+i\eta}) \exp\{ik\rho|1-x|\} f(x\rho, \Omega_\rho),$$

где функция  $f(\rho) = f(\rho, \Omega_\rho)$  имеет носитель в области больших  $\rho$ . Асимптотическое поведение интеграла по  $x$  выглядит следующим образом:

$$\langle \rho | g_c(z) | f \rangle \xrightarrow[|k\rho| \gg 1]{\mu\rho} \frac{2\mu}{k^2} f(\rho),$$

или

$$\langle \rho | g_c(z) | \rho' \rangle \xrightarrow[|k\rho'| \gg 1]{|k\rho| \gg 1} \frac{2\mu}{k^2} \delta(\rho - \rho'). \quad (8)$$

Ограничиваясь теперь в  $U_{mm'}^{(2)}$  дипольным приближением для потенциала  $W^\alpha$ , получим

$$\langle \rho | U_{mm'}^{(2)} | \rho' \rangle = \frac{1}{\rho^2\rho'^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} \int dr \int dr' c^2 r r' \Psi_m^*(\mathbf{r}) \cos(\widehat{\mathbf{r}\rho}) \times$$

$$\times \Theta(\rho - r) \cos(\widehat{r'\rho'}) \Theta(\rho' - r') \Psi_{m'}(r') \langle r | \widehat{g}_\alpha^\varepsilon(\varepsilon + i0) | r' \rangle \langle \rho | g_\alpha^\varepsilon(z - \varepsilon) | \rho' \rangle. \quad (9)$$

В (9) опущен член, содержащий  $\Theta(r - \rho)\Theta(r' - \rho')$ , который является экспоненциально малым. Далее, также с точностью до экспоненциально малых поправок, резкое обрезание в виде  $\Theta$ -функции можно заменить экспоненциальным обрезанием типа  $[1 + \exp\{(r - \rho)/a\}]^{-1}$  с подходящим  $a$ .

Предполагая теперь, что потенциал  $V_\alpha$  является аналитическим относительно комплексных масштабных преобразований [14—16] и что вектор  $\Phi_m(r) = [1 + \exp\{(r - \rho)/a\}]^{-1} r \Psi_m(r)$  является аналитическим, получим

$$\begin{aligned} \langle \rho | U_{mm'}^{(2)} | \rho' \rangle &= \frac{1}{\rho^2 \rho'^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{-2\pi i} \int dr \int dr' \times \\ &\times \Phi_m^*(e^{\vartheta} r) c^2 r r' \cos(\widehat{r\rho}) \langle r | \widehat{g}_\alpha^\vartheta(\varepsilon + i0) | r' \rangle \times \\ &\times \cos(\widehat{r'\rho'}) \Phi_{m'}(e^{\vartheta} r) \langle \rho | g_\alpha^\varepsilon(z - \varepsilon) | \rho' \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

В (10)  $\vartheta$  — комплексный параметр масштабного преобразования, причем при выводе этой формулы была использована вторая теорема Балслева—Комба [14—16]:

$$\begin{aligned} \langle f_1 | g(z) | f_2 \rangle &= \langle f_1(\vartheta^*) | g^\vartheta(z) | f_2(\vartheta) \rangle, \\ g^\vartheta(z) &= U(\vartheta) g(z) U^{-1}(\vartheta) = (z - H(\vartheta))^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь  $U(\vartheta)$  — оператор масштабного преобразования:

$$(U(\vartheta) f)(r) = e^{(3/2)\vartheta} f(e^{\vartheta} r),$$

$H(\vartheta) = U(\vartheta) H U^{-1}(\vartheta) = e^{-2\vartheta} H_0 + V(\vartheta)$  — аналитически преобразованный гамильтониан;  $f_i$ ,  $i=1, 2$ , — аналитические векторы для генератора группы масштабных преобразований. Записывая теперь для  $\widehat{g}_\alpha^\vartheta(z)$  спектральное разложение и предполагая для простоты, что дискретный спектр гамильтониана  $Q(H_{0\alpha} + V_\alpha)Q$  отсутствует, приведем интеграл по  $\varepsilon$  к виду

$$\begin{aligned} \int dq_\alpha | \Psi_\alpha^\vartheta(q_\alpha) \rangle \langle \Psi_\alpha^{\vartheta*}(q_\alpha) | \langle \rho | g_c \left( z - e^{-2\vartheta} \frac{q_\alpha^2}{2\mu_\alpha} \right) | \rho' \rangle + \\ + \sum_i | \Psi_i(\vartheta) \rangle \langle \Psi_i(\vartheta^*) | \langle \rho | g_c(z - z_i) | \rho' \rangle, \end{aligned}$$

где  $\int dq_\alpha | \Psi_\alpha^\vartheta(q) \rangle \langle \Psi_\alpha^{\vartheta*}(q_\alpha) |$  — проектор на непрерывный спектр гамильтониана  $Q(H_{0\alpha} + V_\alpha)Q(\vartheta)$ ;  $|\Psi_i(\vartheta)\rangle$  — резонансные волновые функции для пары  $\alpha$  с энергией  $z_i$ , удовлетворяющие уравнению

$$H(\vartheta) |\Psi_i(\vartheta)\rangle = \{H_{0\alpha} + V_\alpha\}(\vartheta) |\Psi_i(\vartheta)\rangle = z_i |\Psi_i(\vartheta)\rangle.$$

Вследствие того что

$$|k^\vartheta| = \left| \left( 2n_\alpha \left( z - e^{-2\vartheta} \frac{q_\alpha^2}{2\mu_\alpha} \right) \right)^{1/2} \right| \neq 0$$

при  $z \neq 0$  для всех  $q_\alpha$  и  $\text{Im } \phi > 0$ , к последнему результату может быть применена формула (8). Устремляя в конечном выражении параметр масштабного преобразования к нулю, получим

$$\langle \rho | U_{mm'}^{(2)} | \rho \rangle = \delta(\rho - \rho') \frac{c^2}{\rho^4} \int dr \int dr' \Psi_m^*(r) r \Theta(\rho - r) \times \\ \times \cos(\widehat{r\rho}) \langle r | \widehat{g}_\alpha(z) | r' \rangle r' \Theta(\rho' - r') \cos(\widehat{r'\rho'}) \Psi_{m'}(r'). \quad (11)$$

Постоянная  $C$  в (9)–(11) определяется зарядами  $Z_i$  и массами  $m_i$  частиц:

$$C = Z_3 \left( \frac{Z_2 m_1 - Z_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \text{ при } \alpha = (12).$$

Как нетрудно видеть, полученный результат справедлив при всех  $z$ , таких, что  $z \neq 0$  и  $z \in \sigma_\alpha(H_{0\alpha} + V_\alpha)$ , за исключением рассматриваемого собственного значения  $\kappa_\alpha^2$ . При отрицательных энергиях системы (в общем случае — при значениях энергии, лежащих между основным и первым возбужденным состояниями в паре  $\alpha$ ) выражение (11) сводится к известному выражению для поляризационного потенциала в адиабатическом приближении [7, 17]. Развитый выше метод позволяет расширить область применимости этой формулы на все значения энергии, за исключением порогов гамильтониана  $\{Q(H_{0\alpha} + V_\alpha)Q\}$ , и область относительных расстояний  $\rho$ , в которой  $|k_\rho^0| \gg 1$ .

В качестве примера приводим выражение для поляризационного потенциала низкоэнергетического рассеяния дейтрона на ядре с зарядом  $Z_e$ . Будем считать, что нуклон-нуклонные силы описываются сепарабельным потенциалом Ямагучи, так что параметр  $\phi$  может быть взят равным  $(\pi/2 - \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ . Ограничиваясь для простоты приближением нулевого радиуса действия ядерных сил, найдем

$$\langle \rho | U^{\text{pol}} | \rho' \rangle = \frac{\gamma \delta(\rho - \rho')}{\rho^4}, \quad (12)$$

$$\gamma = \frac{(Ze^2)^2}{64} \frac{m_N}{\alpha^5} {}_2F_1 \left( 1; \frac{5}{2}; 5; \frac{E_d^c + i0}{|\epsilon_b|} \right).$$

Здесь  $E_d^c$  — кинетическая энергия пары дейтрон—ядро (в системе центра масс);  $\epsilon_b = -\alpha^2/m_N$  — энергия связи дейтрона;  ${}_2F_1(1, 5/2, 5, z)$  — гипергеометрическая функция Гаусса, имеющая вид

$${}_2F_1 \left( 1; \frac{5}{2}; 5; z \right) = \frac{4! 16}{9z^4} \left\{ (1-z)^{3/2} - 1 + \frac{3}{2}z - \frac{3}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 \right\}.$$

При  $E_d^c \approx 0$  полученный результат совпадает с приведенным в работе [4]. Условие применимости (12) заключается в следующем:

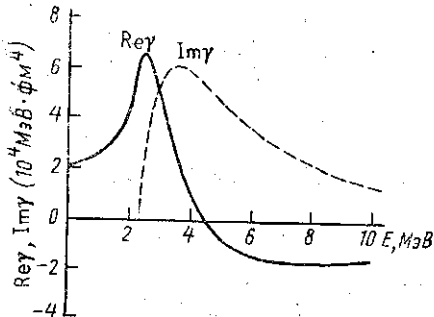
$$\{m_N |E_d^c + \epsilon_b|\}^{1/2} \rho \gg 1,$$

причем величина  $|E_d^c + \epsilon_b|$  не должна превышать 15 МэВ, с тем чтобы использование потенциала Ямагучи было оправданным.

На рисунке приведены графики зависимости функций  $\gamma_1(E) = \text{Re } \gamma$  и  $\gamma_2(E) = \text{Im } \gamma$  для рассеяния дейтрона на ядре  $^{208}\text{Pb}$ ,  $E = E_d^{\text{lab}}$ . Заметим, что в области энергий  $E \geq 10$  МэВ поляризационный потенциал может считаться локальным уже на границе ядра, поскольку параметр  $|k^0 R| > 7$ , где  $R$  — радиус ядра свинца.

В заключение отметим, что в работах [17–19], посвященных построению поляризационного потенциала в системе электрон—атом, в выражении (11) вместо резольвенты  $\widehat{g}_\alpha(z)$  фигурирует  $\widehat{g}_\alpha(z + E_0)$ . При

Этом параметр  $E_0$  интерпретируется как средняя энергия ионизации атома и является подгоночным. Аналогичный параметр был введен в работах [20, 21] в двухчастичную кулоновскую функцию Грина при замене ее матричных элементов в координатном представлении  $\delta$ -функцией при вычислении второго борновского приближения амплитуды реакции ( $e, 2e$ ). Как видно из проведенного выше рассмотрения, являющегося более строгим подходом к задаче, не возникает никаких дополнительных параметров.



Зависимости  $Re\gamma$  и  $Im\gamma$  от энергии  $E$  налетающего дейтрона в лабораторной системе для реакции  $d + {}^{208}Pb$

Таким образом, развитый асимптотический метод построения поляризационного потенциала может быть применен к задачам ионизации атомов и их перезарядки в области энергий, где существенен вклад второго борновского приближения.

Таким образом, развитый асимптотический метод построения поляризационного потенциала может быть применен к задачам ионизации атомов и их перезарядки в области энергий, где существенен вклад второго борновского приближения.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] Бом Д. Квантовая теория. М., 1985. [2] Балашов В. В. Квантовая теория столкновений. М., 1985. [3] Nemetz O. F., Pugatch V. M., Karpapov F. I. et al. // Proc. 1 Int. School on Nucl. Phys. Kiev. 1990. P. 11. [4] Кузьмичев В. Е., Пересылкин В. В. // Ядерная физика. 1990. 51, № 1. С. 103. [5] Kharchenko V. F., Shadchin S. A. // Few-Body System. 1989. V. 6. P. 45. [6] Бэрк Ф. Дж. Потенциальное рассеяние в атомной физике. М., 1980. [7] Mittleman M. H., Watson K. M. // Phys. Rev. 1959. 113. P. 198. [8] Komarov V. V., Green A. M., Porova A. M., Shablov V. L. // Mod. Phys. Lett. 1987. A2, N 2. P. 81. [9] Кучнев М. Ю., Шейнерман С. А. // ЖЭТФ. 1985. 90, № 5. С. 1680. [10] Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М., 1969. [11] Тейлор Дж. Теория рассеяния. М., 1975. [12] Веселова А. М. // ТМФ. 1978. 35. С. 180. [13] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М., 1985. [14] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. М., 1982. [15] Balslev E., Combes J. M. // Comm. Math. Phys. 1971. 22. P. 280. [16] Simon B. // Ann. Math. 1973. 97. P. 247. [17] Joachain C. J. Quantum Collision Theory. North-Holland, 1975. [18] Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции, распады в нерелятивистской квантовой механике. М., 1971. [19] Joachain C. J., Mittleman M. H. // Phys. Rev. 1971. A4. P. 1492. [20] Vugon F. W., Joachain C. J., Piraux V. // J. Phys. V. 1980. 13. P. 673. [21] Попов Ю. В., Кузьмина Н. М. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. 33, № 1. С. 29.

Поступила в редакцию  
27.10.93

УДК 510.64.649:53.087.088.7

### О ПРОБЛЕМЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТА С НЕЧЕТКОЙ МОДЕЛЬЮ

Ю. П. Пытьев, Б. И. Волков, В. П. Манолов\*  
(кафедра компьютерных методов физики)

Анализируется концепция измерительно-вычислительной системы (ИВС) для научных исследований и рассматриваются ее свойства, такие, в частности, как качество интерпретации измерения, четкость, надежность интерпретации, надежность модели ИВС и т. д. На примерах простейших задач интерпретации рассмотрены результаты асимптотического исследования и компьютерного моделирования экспериментов с нечеткой моделью.

\* — Болгария.