слишком большом числе измерений ($\geqslant 20$) результаты интерпретации с определением параметров a и b мало отличаются от случая интерпретации, когда эти параметры заданы точно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пытьев Ю. П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990. [2] Пытьев Ю. П., Чуличков А. И.//Математическое моделирование. 1989. 1, № 8. С. 22. [3] Pyt'ev Yu. P.//Pattern Recognition and Image Analysis. 1991. 1, N 1. P. 54. [4] Pyt'ev Yu. P., Chulichkov A. I.//Ibid., N 2. P. 212. [5] Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М., 1976. [6] Пытьев Ю. П.//Математическое моделирование. 1992. 4, № 2. С. 76.

Поступила в редакцию
08.12.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 3

УДК 539.123

ПРОБЛЕМА НЕОДНОЗНАЧНОСТЕЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Д. А. Славнов
(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Рассмотрен вопрос о зависимости результатов, получаемых в пертурбативной квантовой теории поля, от схемы перенормировок. Показано, что от этой зависимости можно избавиться, если в качестве параметра разложения взять наблюдаемую величину.

В настоящее время в квантовой теории существует только один подход, в котором сформулирован регулярный метод вычисления наблюдаемых величин, — это лагранжева пертурбативная модель. Как известно, в этом подходе достаточно остро стоит вопрос об однозначности получаемых результатов. Обычно считается, что к неоднозначностям приводят математические процедуры: регуляризация, перенормировки и разложение в ряд теории возмущений.

В данной статье еще раз проанализирована эта проблема с целью вскрыть физический источник неоднозначностей и указать путь устранения тех из них, которые являются математическими артефактами.

В регулярной физической модели должна существовать последовательная процедура построения динамических величин. В лагранжевых моделях эта процедура имеет два этапа. Первый — это выбор лагранжиана, описывающего рассматриваемую физическую модель, второй — выбор некоторого динамического принципа, руководствуясь которым по данному лагранжиану можно построить динамические величины. Обычно в классической и нерелятивистской квантовой физике лагранжиан содержит некоторое число параметров, а динамический принцип — однозначный беспараметрический. Однако уже в классических моделях ситуация может быть иной. Рассмотрим, например, движение частицы в поле с сингулярным потенциалом. Если эта сингулярность допускает описание в терминах обобщенных функций, то можно соответствующий член включить в лагранжиан, но можно обойтись и без аппарата обобщенных функций. Достаточно область, содержащую сингулярности, исключить из рассмотрения, а ее влияние учесть с помощью подходящих граничных условий.

С очень сходной ситуацией мы имеем дело в квантовой теории поля. Здесь лагранжиан выражается в терминах операторозначных обобщенных функций. Причем фигурируют и произведения обобщенных функций, которые еще более сингулярны, поэтому приходится прибегать к перенормировкам. Фактически процедура перенормировок аналогична введению граничного условия на сфере исчезающего радиуса, окружающей область сингулярности. Чтобы построить такую сферу, надо выбрать, во-первых, масштабный радиус, во-вторых, безразмерный параметр ε, устремляемый к нулю (соответственно в процедуре перенормировок — массовый масштабный параметр λ и безразмерный бегущий параметр ε).

Таким образом, подходящий динамический принцип должен включать в себя, в частности, некоторую процедуру перенормировок и в связи с этим в квантовой теории поля помимо лагранжевых с необходимостью появляются дополнительные параметры.

Совокупность параметров лагранжиана и динамического принципа назовем динамическими параметрами. Каждому набору таких параметров соответствует определенная динамика системы. Однако разным наборам может соответствовать одна и та же динамика, причем одного и того же изменения динамики можно добиться либо изменением перенормировочной процедуры, либо изменением лагранжевых параметров. Дальше будем считать, что лагранжевых параметров достаточно, чтобы воспроизвести любое допустимое изменение динамики (сильная перенормируемость модели). В случае неперенормируемых моделей таких параметров должно быть бесконечно много, но в рамках пертурбативного подхода на любом конечном этапе можно ограничиться конечным числом параметров и считать модель сильно перенормируемой до некоторого порядка теории возмущений.

Наборы динамических параметров, которым соответствует одна и та же динамика, будем считать эквивалентными, т. е. динамика системы находится во взаимно однозначном соответствии с целым классом эквивалентности таких параметров. Поэтому параметризация динамик совпадает с параметризацией классов эквивалентности. Обычный способ параметризации выглядит следующим образом. Выбирается некоторая перенормировочная процедура, т. е. фиксируется определенный набор параметров динамического принципа. После этого все динамические величины выражаются в виде функций лагранжевых параметров. При этом зависимость динамических величин от динамических параметров оказывается не только явной (от лагранжевых параметров), но и неявной (по крайней мере, от части параметров динамического принципа). Последняя трудно контролируется и практически воспринимается как неоднозначность результатов вычислений динамических величин.

Частично проблема решается в рамках идеологии перенормируемости: переход от одной перенормировочной процедуры к другой можно скомпенсировать подходящим изменением лагранжевых параметров. Это соответствует переходу от одного представителя класса эквивалентности к другому. Однако проблема усугубляется использованием теории возмущений, поскольку обычно в качестве параметра разложения выбирается один из лагранжевых параметров, а он изменяется при переходе от одного представителя класса эквивалентности к другому. В результате весь ряд теории возмущений перестраивается, и это уже трактуется как неустранимая неоднозначность пертурбативной лагранжевой теории.

Автору представляется значительным недостатком стандартного подхода, принятого в пертурбативной лагранжевой теории, тот факт, что класс эквивалентности, который имеет непосредственный физический смысл (динамика системы), фиксируется с помощью представителя, который таким смыслом не обладает. Вместе с тем классы эквивалентности можно задать и с помощью ограниченного набора наблюдаемых.

Рассмотрим для примера модель, в которой фигурируют следующие лагранжевы параметры: α — константа связи, m — масса, ξ — калибровочный параметр, Z — параметр перенормировки волновой функции. Эти параметры естественным образом разбиваются на две группы: α, m (назовем их разрешающими) и ξ, Z (их назовем дополнительными). Разбиение (вообще говоря, неоднозначное) параметров на две группы можно произвести по такому принципу: для любых допустимых фиксированных значений дополнительных параметров при изменении разрешающих параметров мы получим по одному представителю из каждого класса эквивалентности.

Выберем некоторую перенормировочную процедуру, т. е. зафиксируем параметры динамического принципа (явно будем выписывать только массовый масштабный параметр λ). Вычислим все интересующие нас наблюдаемые Q_i. В рамках теории возмущений в принципе это всегда возможно. В результате для них получатся выражения

$$Q_i = Q_i(p;\ \lambda,\ \xi;\ \alpha,\ m). \tag{1}$$

Наблюдаемые Q_i будут зависеть не только от динамических параметров, но и от некоторого набора p внешних параметров типа энергий импульсов, углов и т. д. Поскольку изменения наблюдаемых Q_i при изменении параметров λ и ξ могут быть скомпенсированы соответствующим преобразованием параметров α и m, то среди всех Q_i только две наблюдаемые (при фиксированных p) являются независимыми. Если, кроме того, эти две наблюдаемые связаны с параметрами α и m (при фиксированных остальных параметрах) взаимно однозначным соответствием, то класс эквивалентности можно задать с помощью этих двух наблюдаемых. Назовем их базовыми.

Пусть один из возможных вариантов набора базовых наблюдаемых — Q_A и Q_M. Будем считать, что значения всех параметров p можно зафиксировать с помощью одного размерного (массового) параметра $|p|$ и некоторого числа безразмерных величин, которые явно выписываться не будут. Базовые наблюдаемые должны удовлетворять ряду дополнительных требований. Во-первых, для них помимо рассчитываемых в рамках модели величин Q_A и Q_M должны быть известны априорные, получаемые, например, из эксперимента, значения $A(\mu)$ и $M(\mu)$ в некоторой нормировочной точке μ пространства внешних параметров p, так что при $|p| = \mu$

$$Q_A(p;\ \lambda,\ \xi;\ \alpha,\ m) = A(\mu),\ Q_M(p;\ \lambda,\ \xi,\ \alpha,\ m) = M(\mu). \tag{2}$$

При этом точка нормировки μ должна быть такой, чтобы соотношение (2) можно было бы разрешить относительно α и m:

$$\alpha = \alpha(A(\mu),\ M(\mu),\ \mu,\ \lambda,\ \xi),\ m = m(A(\mu),\ M(\mu),\ \mu,\ \lambda,\ \xi). \tag{3}$$

Подставляя α и m, найденные из (3), в формулу (1), получим

$$Q_i = Q_i(p;\ \lambda,\ \xi;\ \alpha(A,\ M,\ \mu,\ \lambda,\ \xi),\ m(A,\ M,\ \mu,\ \lambda,\ \xi)) \equiv$$
$$\equiv \mathcal{Q}_i(p;\ A(\mu),\ M(\mu),\ \mu).$$

Нетрудно сообразить (см., напр., [1]), что в силу перенормируемости наблюдаемые Q_i как функции A, M и μ от параметров перенормировочной процедуры (λ) и дополнительных параметров (ξ, Z) зависеть не будут. Если Q_i можно разложить в ряд по одной из базовых наблюдаемых $A(\mu)$:

$$Q_i = \sum_{n=0}^{\infty} A^n(\mu)\, Q_i^{(n)}(p;\; M(\mu),\; \mu), \tag{4}$$

то каждый член этого разложения $(Q_i^{(n)})$ также не будет зависеть ни от процедуры перенормировки, ни от дополнительных параметров [1].

Практически разложение (4) получается следующим образом. По заданному лагранжиану в рамках некоторой выбранной схемы перенормировок по стандартным правилам вычисляются наблюдаемые Q_i в виде рядов по константе связи α;

$$Q_i = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n Q_i^{(n)}(p;\; \lambda,\; \xi,\; m). \tag{5}$$

Реально вычисляются отдельные коэффициентные функции $Q_i^{(n)}$. При этом ни малость α, ни быстрота сходимости ряда не используются. Конечно, такого же вида разложения можно получить и для базовых наблюдаемых Q_A и Q_M. Далее надо наложить дополнительное ограничение — считать, что в качестве базовых допускаются только такие наблюдаемые, для которых при $|p|=\mu$

$$Q_A^{(0)}(p;\, \lambda,\, \xi,\, m) = 0, \quad Q_A^{(1)}(p;\; \lambda,\, \xi,\, m) = 1, \quad Q_M^{(0)}(p;\; \lambda,\; \xi,\; m) = m. \tag{6}$$

Это предполагает, что соответствующие первые члены разложения данных наблюдаемых в ряд теории возмущений не зависят от схемы перенормировок и от дополнительных параметров типа ξ. Соотношения (6) можно рассматривать как условия нормировки базовых наблюдаемых.

Согласно (2) при $|p|=\mu$ вычисляемые выражения для Q_A и Q_M можно приравнять к $A(\mu)$ и $M(\mu)$ соответственно. Поэтому благодаря формулам (5) и (6) для $A(\mu)$ и $M(\mu)$ получаются разложения:

$$\begin{aligned} A(\mu) &= \alpha\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n Z_A^{(n)}(\mu,\; \lambda,\; \xi,\; m)\Big), \\ M(\mu) &= m\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n Z_M^{(n)}(\mu,\; \lambda,\; \xi,\; m)\Big). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь для фигурирующих в правой части (5) коэффициентных функций $Q_i^{(n)}$ введены новые обозначения $Z_{A(M)}^{(n)}(\mu,\, \lambda,\, \xi,\, m)$, поскольку соотношения (7) имеют смысл формул перенормировки константы связи и массы.

Обращая соотношения (7), получим

$$\begin{aligned} \alpha &= A(\mu)\Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty} A^n(\mu)\, T_\alpha^{(n)}(\lambda,\, \xi,\; M(\mu),\; \mu)\Big] \\ m &= M(\mu)\Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty} A^n(\mu)\, T_m^{(n)}(\lambda,\; \xi,\; M(\mu),\; \mu)\Big]. \end{aligned} \tag{8}$$

Чтобы такое обращение было возможным, необходима аналитичность функций $Z_A^{(n)}$ и $Z_M^{(n)}$ в точке $m=M(\mu)$. Это накладывает дополнительное ограничение на выбор допустимых базовых наблюдаемых.

Чтобы вычислить коэффициентные функции $T^{(n)}_{\alpha(m)}$ для $n \leqslant N$, достаточно знать функции $Q^{(n)}_{A(M)}$ для таких же n. Ни скорость сходимости рядов, ни малость α и A не существенны. Подставив разложение (8) в правую часть (5) и перестроив ряды по степеням $A(\mu)$, получим разложение (4). Опять-таки, чтобы найти все $Q^{(n)}_i$ для $n \leqslant N$, достаточно знать $Q^{(n)}_i$, $T^{(n)}_\alpha$, $T^{(n)}_m$ для таких же n. Малость α и A не требуется.

Большим преимуществом разложения наблюдаемых в ряд по одной из базовых наблюдаемых (формула типа (4)) является то, что в этом случае результат вычисления коэффициентных функций $Q^{(n)}_i$ не зависит от способа вычисления. Эти функции полностью схемно-независимы, но, конечно, они зависят от того, какие наблюдаемые выбраны в качестве базовых. В отличие от (4) формула (5) связывает наблюдаемые Q_i с ненаблюдаемыми величинами α и m. Эта связь не инвариантна относительно перенормировок. Правда, величинам α и m можно придать смысл наблюдаемых, если зафиксировать некоторый конкретный динамический принцип (перенормировку). В этом случае функции $T^{(n)}_{\alpha(m)}(\lambda, \xi, M, \mu)$, фигурирующие в (8), можно вычислить. Тогда параметры α и m станут известными функциями наблюдаемых $A(\mu)$ и $M(\mu)$ и, следовательно, сами могут рассматриваться как наблюдаемые, имеющие некоторое определенное значение (при фиксированных ξ и λ).

В этом случае (5) можно рассматривать как некоторый вариант формулы (4), в которой в качестве наблюдаемых выступают α и m. Такая трактовка возможна, однако надо помнить, что значения наблюдаемых α и m получаются из априорных $A(\mu)$ и $M(\mu)$ некоторым пересчетом, а вид формул пересчета (8) зависит от того, каким конкретным динамическим принципом мы пользуемся. В таком подходе схемную зависимость результатов вычислений наблюдаемых Q_i можно трактовать как следствие выбора в качестве базовых наблюдаемых схемно-зависимых величин. Реально дело еще осложняется использованием теории возмущений. Значения «вторичных наблюдаемых» α и m, полученные из формул (8), зависят от того, какой порядок теории возмущений в них учитывается. Эта зависимость затем переходит в вычисленные значения наблюдаемых Q_i.

Таким образом, видно, что при применении в квантовой теории поля теории возмущений в качестве параметров разложения могут использоваться различные величины. Как известно, правила вычислений разработаны для случая, когда таким параметром является константа связи. Поэтому технически такой вариант наиболее прост. Однако в этом случае результаты вычисления наблюдаемых оказываются схемно-зависимыми. Кроме того, чтобы делать экспериментально проверяемые предсказания, нужно сначала найти «правильные» (перенормированные) значения параметров α и m в используемой схеме, а лишь затем по этим значениям рассчитывать величины наблюдаемых Q_i. Поскольку на обоих этапах используется теория возмущений, то для получения надежных результатов необходимо, чтобы и на том и на другом этапе соответствующие разложения достаточно быстро сходились, т. е. нужно, чтобы быстро сходились ряды (5) и (8). Скорость сходимости зависит от двух факторов: от выбора базовых наблюдаемых $A(\mu)$ и $M(\mu)$ и от используемого динамического принципа. Требование быстрой сходимости рядов (5) и (8), конечно, является недостатком этого варианта. Но имеются и преимущества. Во-первых, проведя один раз вычисления (8) для некоторого стандартного нормировочного процесса, можно найти численные значения параметров α и m. После этого для расчета наблюдаемых Q_i во всех других процессах достаточно проводить только вычисления (5), используя найденные значения α и m. Во-вторых, вычисленные по формуле (8) значения величин α и m в идеальном случае зависят только от принятого динамического принципа и не зависят ни от нормировочного процесса, ни от выбора наблюдаемых $A(\mu)$ и $M(\mu)$. Реально, правда, эта зависимость все же имеется из-за необходимости использовать теорию возмущений.

Во втором варианте лагранжевы параметры α и m используются только как промежуточные величины. Их численные значения не вычисляются, но их аналитическую связь (в рамках теории возмущений) с базовыми наблюдаемыми $A(\mu)$ и $M(\mu)$ установить следует (согласно формуле (8)). После этого α и m опять-таки на аналитическом уровне исключаются из выражений для рассчитываемых наблюдаемых Q_i. После получения для Q_i представлений (4) в виде рядов по $A(\mu)$ можно переходить к численным вычислениям.

Поскольку совершенно несущественна скорость сходимости рядов (5), (7), (8), то выбор оптимальной схемы перенормировок полностью определяется технической простотой высчислений. Существенна только скорость сходимости рядов (4), но она существенна и в первом варианте. Эта скорость зависит от выбора базовых наблюдаемых $A(\mu)$ и $M(\mu)$. В этом смысле некоторая «схемная зависимость» остается. Выбор $A(\mu)$ и $M(\mu)$ в основном определяется экспериментальными возможностями: следует использовать те наблюдаемые, для которых можно получить из эксперимента надежные значения.

Однако возможен такой вариант, что ряды (4) для наблюдаемых Q_i быстро сходятся при одном выборе точки нормировки базовых наблюдаемых $A(\mu)$ и $M(\mu)$, а экспериментальные данные для последних могут быть получены в другой точке. В стандартном подходе это противоречие разрешается с помощью ренормгрупповой техники. Аналогичная техника может быть развита и в рассматриваемом подходе. Займемся ее построением.

Точку нормировки, определяемую условиями эксперимента, обозначим через μ_0, а символ μ припишем «бегущей» точке нормировки. Далее вместо $M(\mu)$ будет удобнее рассматривать безразмерную наблюдаемую $B=\mu^{-1}M$. Введем еще две наблюдаемые $\dot{A}$ и $\dot{B}$:

$$\dot{A}(\mu)=\mu\, dA(\mu)/d\mu,\quad \dot{B}(\mu)=\mu\, dB(\mu)/d\mu.$$

Для них напишем разложения (4), которые с учетом условий нормировки (6) и соображений размерности будут выглядеть так:

$$\dot{A}(\mu)=A^2(\mu)\sum_{n=0}^{\infty} q_n(B(\mu))\,A^n(\mu), \tag{9а}$$

$$\dot{B}(\mu)=-B(\mu)\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty} r_n(B(\mu))\,A^n(\mu)\Big]. \tag{9б}$$

Поделив уравнение (9а) на (9б) и обозначив $\ln B(\mu)$ через t, получим в рамках теории возмущений по $A(\mu)$ уравнение

$$\frac{dA}{dt}=-A^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\,A^n(t), \tag{10}$$

или в интегральной форме

$$A^{-1}(t)=A^{-1}(t_0)+\int_{t_0}^{t}d\tau\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\varepsilon)A^n(\tau), \tag{11}$$

где $t_0=t(\mu_0)$.

Если в области интегрирования $A(\tau)$ достаточно мало, то это уравнение можно попытаться решить методом итераций, взяв в качестве нулевого приближения

$$A_0^{-1}(t)=A^{-1}(t_0)+\int_{t_0}^{t}d\tau\, a_0(\tau). \tag{12}$$

Если в правой части (12) доминирующим окажется первое слагаемое, то итерация сведется к обычному разложению в ряд теории возмущений по «константе связи» $A(t_0)$, если же это не так, то получится ренормгрупповое разложение.

Обратим внимание на то, что в терминах t «бегущая константа связи» $A(t)$ является функцией одного аргумента и при наличии массы в модели. Правда, в последнем случае связь переменной t с точкой нормировки μ оказывается непростой. Она устанавливается уравнением (9б), которому можно придать вид

$$\frac{d\ln\mu/\mu_0}{dt}=-\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}r_n(e^t)A^n(t)\right]^{-1}\equiv-\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}s_n(t)A^n(t)\right], \tag{13}$$

или в интегральной форме

$$\ln\mu/\mu_0=t_0-t-\int_{t_0}^{t}d\tau\sum_{n=1}^{\infty}A^n(\tau)s_n(\tau). \tag{14}$$

Подставив в правую часть (14) в качестве $A(\tau)$ решение уравнения (11), получим искомую связь между t и μ.

Коэффициенты $q_n(B)$ и $r_n(B)$ в уравнениях (9) вычисляются с помощью обычной теории возмущений. Поскольку уравнения (9) являются частными случаями формулы (4), то эти коэффициенты, а следовательно, и коэффициенты a_n и s_n, не зависят от выбора схемы перенормировок.

Для безмассового случая уравнение (10) было получено в работе [2] и составило основу так называемого схемно-независимого подхода в квантовой теории поля. Работа [2] вызвала довольно много споров и подверглась критике (см., напр., [3]). Предложенный в ней подход не получил дальнейшего развития. Критики утверждали, что в рамках теории возмущений этот подход не устраняет неоднозначностей, а переводит их из одного места в другое. Из приведенных выше рассуждений следует, что эта критика справедлива лишь отчасти. При фиксированных базовых наблюдаемых $A(\mu)$ и $M(\mu)$ все вычисления в любом порядке теории возмущений вполне однозначны. Неоднозначность существует в самом выборе базовых наблюдаемых, которые ограничены только условиями нормировки (6) и аналитичности при $m=M(\mu)$. Но эта неоднозначность имеет чисто физическое происхождение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Славнов Д. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. **33**, № 1. С. 15. [2] Dhar A., Gupta V.//Phys. Rev. 1984. **D29**. P. 2822. [3] Chýla J.//Phys. Rev. 1984. **D31**. P. 2690.

Поступила в редакцию
23.12.93