Таблица 3

Вклад двух неподвижных центров в неравновесное аномальное поле планеты

n	$\Delta\bar{C}_{n0}$	$\bar{J}_n$	n	$\Delta\bar{C}_{n0}$	$\bar{J}_n$
Венера			6	$-0{,}15\cdot10^{-6}$	$-0{,}99\cdot10^{-8}$
2	$-0{,}19\cdot10^{-5}$	$-0{,}19\cdot10^{-5}$	7	$0{,}89\cdot10^{-7}$	$0{,}22\cdot10^{-8}$
3	$0{,}77\cdot10^{-6}$	$0{,}77\cdot10^{-6}$	8	$0{,}47\cdot10^{-7}$	$-0{,}51\cdot10^{-9}$
4	$0{,}65\cdot10^{-6}$	$-0{,}33\cdot10^{-6}$	19	$0{,}28\cdot10^{-7}$	$0{,}12\cdot10^{-9}$
5	$0{,}14\cdot10^{-6}$	$0{,}14\cdot10^{-6}$	10	$0{,}50\cdot10^{-7}$	$-0{,}27\cdot10^{-10}$
6	$-0{,}27\cdot10^{-6}$	$-0{,}64\cdot10^{-7}$	11	$0{,}18\cdot10^{-7}$	$0{,}61\cdot10^{-11}$
7	$0{,}07\cdot10^{-7}$	$0{,}29\cdot10^{-7}$	Марс		
8	$-0{,}50\cdot10^{-6}$	$-0{,}13\cdot10^{-7}$	2	$0{,}66\cdot10^{-4}$	$0{,}66\cdot10^{-4}$
9	$-0{,}18\cdot10^{-6}$	$0{,}61\cdot10^{-8}$	3	$-0{,}11\cdot10^{-4}$	$-0{,}11\cdot10^{-4}$
10	$-0{,}22\cdot10^{-6}$	$-0{,}28\cdot10^{-8}$	4	$0{,}07\cdot10^{-5}$	$0{,}20\cdot10^{-5}$
11	$0{,}67\cdot10^{-7}$	$0{,}13\cdot10^{-8}$	5	$0{,}19\cdot10^{-5}$	$-0{,}36\cdot10^{-6}$
Земля			6	$0{,}95\cdot10^{-6}$	$0{,}67\cdot10^{-7}$
2	$-0{,}47\cdot10^{-5}$	$-0{,}47\cdot10^{-5}$	7	$-0{,}64\cdot10^{-6}$	$-0{,}12\cdot10^{-7}$
3	$0{,}96\cdot10^{-6}$	$0{,}96\cdot10^{-6}$	8	$-0{,}77\cdot10^{-7}$	$0{,}23\cdot10^{-8}$
4	$-0{,}24\cdot10^{-6}$	$-0{,}20\cdot10^{-6}$	9	$-0{,}24\cdot10^{-5}$	$-0{,}45\cdot10^{-9}$
5	$0{,}68\cdot10^{-7}$	$0{,}45\cdot10^{-7}$	10	$-0{,}17\cdot10^{-5}$	$0{,}85\cdot10^{-10}$
			11	$-0{,}13\cdot10^{-5}$	$-0{,}16\cdot10^{-10}$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dziewonski A. M., Anderson D. L.//Physics of the Earth and Planetary Interiors. 1981. V. 25. P. 297. [2] Ксанфомалити Л. В. Планета Венера. М., 1985. [3] Жарков В. Н. Внутреннее строение Земли и планет. М., 1983. [4] Жарков В. Н., Марченков К. И.//Астрон. вестник. 1991. 25, № 5. С. 515. [5] Бойков В. В., Галазин В. Ф., Демьянов Г. В. и др.//Геодезия и картография. 1992. № 4. С. 4. [6] Bills B. G., Kiefer W. S., Jones R. L.//J. Geophys. Res. 1987. 92, N B10. P. 10, 335. [7] Christensen E. J., Balmino G. I.//J. Geophys. Res. 1979. 84, N B14. P. 7943. [8] Чуйкова Н. А., Казарян С. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. 35, № 1. С. 72. [9] Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М., 1961. [10] Дубошин Г. Н. Небесная механика, основные задачи и методы. М., 1975.

Поступила в редакцию
16.07.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 3

УДК 537.86

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ И ШУМОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАВИТАЦИОННОЙ АНТЕННЫ С ТРАНСФОРМАТОРОМ СМЕЩЕНИЯ

А. В. Гусев
(ГАИШ)

Получены рекуррентные соотношения для расчета динамических и шумовых характеристик твердотельной гравитационной антенны веберовского типа с N-звенным трансформатором смещения при постоянном коэффициенте трансформации $\varepsilon=m_k/m_{k-1}$ и равенстве парциальных частот ω_k, $k=\overline{1, N}$.

В работе [1] получены рекуррентные соотношения, позволяющие определить Z-параметры твердотельной гравитационной антенны с трансформатором смещения (ТС):

$$Z_{11,N}(p)=Z_{11,N-1}(p)-\frac{Z_{12,N-1}(p)\,Z_{21,N-1}(p)}{Z_N(p)+Z_{22,N-1}(p)},$$

$$Z_{12,N}(p)=\frac{Z_N(p)\,Z_{12,N-1}(p)}{Z_N(p)+Z_{22,N-1}(p)}=Z_{21,N}(p), \tag{1}$$

$$Z_{22,N}(p)=\frac{Z_N(p)\,Z_{22,N-1}(p)}{Z_N(p)+Z_{22,N-1}(p)}+pL_N,$$

где $[Z_{ik,M}(p)]$ — характеристические Z-параметры механической системы (гравитационный детектор и ТС) с M степенями свободы, $p=d/dt$; $Z_N(p)=R_N+1/(pC_N)$; L_k, R_k и C_k — «масса», «коэффициент трения» и «гибкость» k-го осциллятора, $k=\overline{1,N}$, соответствующие I системе электромеханических аналогий [2].

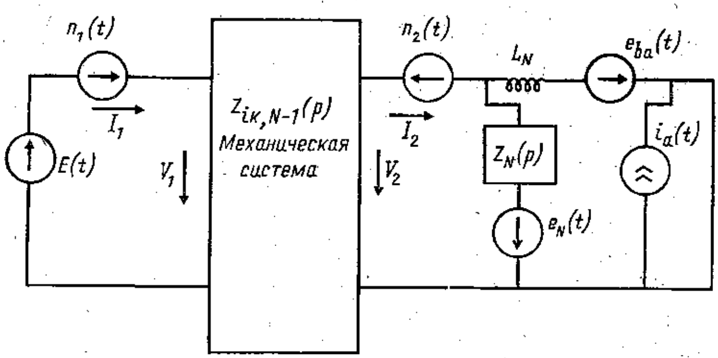
Для гравитационной антенны с однозвенным ТС ($N=2$) элементы матрицы $[Z_{ik,2}(p)]$ определяются следующими формулами [1]:

$$Z_{11,2}(p)=L_1p+(R_1+R_2)+\frac{1}{p}\left[\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right],$$

$$Z_{12,2}(p)=R_2+\frac{1}{pC_2}=Z_{21,2}(p), \tag{2}$$

$$Z_{22,2}(p)=pL_2+R_2+\frac{1}{pC_2}.$$

Формулы (1), (2) позволяют определить динамические и шумовые характеристики гравитационной антенны с ТС при $N>2$: в режиме короткого замыкания на выходе (рисунок) имеем



$$I(t)=\frac{1}{\Delta_N(p)}\left[E(t)+n_1(t)-\frac{Z_{11,N}(p)}{Z_{21,N}(p)}(n_2(t)-e_{ba}(t))\right]-i_a(t). \tag{3}$$

Здесь

$$\Delta_N(p)=\frac{1}{Z_{21,N}(p)}[Z_{11,N}(p)\,Z_{22,N}(p)-Z^2_{21,N}(p)], \tag{4}$$

$n_1(t)$ и $n_2(t)$ — сторонние источники тепловых шумов механической системы с $N-1$ степенью свободы как четырехполюсника [3], для которого

$$V_1(t)=Z_{11,N-1}(p)\,I_1-Z_{12,N-1}(p)\,I_2,$$
$$V_2(t)=Z_{21,N-1}(p)\,I_1-Z_{22,N-1}(p)\,I_2, \tag{5}$$

$E(t)$ — полезный сигнал; $e_{ba}(t)$, $i_a(t)$ — шум обратного влияния и аддитивный шум измерительного прибора [4], входным сопротивлением которого в режиме холостого хода пренебрегаем; $e_k(t)$ — тепловые шумы k-го осциллятора, $k=\overline{1,\ N}$. Уравнения (5) — это стандартные уравнения движения линейного четырехполюсника с постоянными параметрами: V_1, I_1 и V_2, I_2 — напряжение и ток на входе и выходе соответственно.

Энергетические спектры стационарных шумов $n_1(t)$ и $n_2(t)$ определяются флуктуационно-диссипативной теоремой [5]:

$$N_1(\omega)=2\varkappa T\,\mathrm{Re}\,Z_{11,N-1}(j\omega);\ N_2(\omega)=2\varkappa T\,\mathrm{Re}\,Z_{22,N-1}(j\omega),$$
$$N_{12}(\omega)=2\varkappa T\,\mathrm{Re}\,Z_{12,N}(j\omega), \tag{6}$$

где $\varkappa T$ — энергетическая температура.

Цель работы — вывод на основе (1) рекуррентных соотношений непосредственно для спектральных характеристик выходного тока $I(t)$ (3).

1. Коэффициент передачи $Y_N(t)=I(t)/E(t)$

Принимая во внимание рекуррентные соотношения (1), после несложных преобразований находим

$$Y_N^{-1}(p)=\Delta_N(p)=\Delta_{N-1}(p)\left[1+pL_N/Z_N(p)\right]+pL_N A_{N-1}(p),$$
$$A_N(p)=\Delta_{N-1}(p)/Z_N(p)+A_{N-1}(p). \tag{7}$$

Выражение (7) можно получить непосредственно на основе уравнений движения (5).

При постоянном коэффициенте трансформации ε и равенстве парциальных частот:

$$\varepsilon=L_k/L_{k-1},\ \omega_k=(L_kC_k)^{-1/2}=\omega_0,\ k=\overline{1,\ N}$$

имеем

$$Y_N^{-1}(p)=\Delta_N(p)\cong\Delta_{N-1}(p)\left(1+p^2/\omega_0^2\right)+\varepsilon\left(p^2/\omega^2\right)\Delta_{N-2}(p)+O(\varepsilon^2),$$
$$\Delta_0(p)=\frac{L_1}{p}\omega_0^2,\ \Delta_1(p)=\frac{L_1}{p}\,\omega_0^2\left(1+p^2/\omega_0^2\right). \tag{8}$$

При выводе формулы (8) диссипативные потери в системе были опущены, $R_k=0$. Учет реальной части импеданса ($\mathrm{Re}\,\Delta_N(j\omega)$) при слабом сигнале приводит к эффектам второго порядка малости.

Применение формулы (8) значительно упрощает расчет коэффициента передачи антенны с ТС при $N>2$.

2. Тепловые шумы

Пусть $I_T(t|N-1)$ — тепловой ток в механической системе с $N-1$ степенью свободы, порождаемый ланжевеновскими источниками $n_1(t)$ и $n_2(t)$ (см. рисунок):

$$I_T(t|N-1)=\frac{n_1(t)-\left[Z_{11,N-1}(p)/Z_{21,N-1}(p)\right]n_2(t)}{\Delta_{N-1}(p)}.$$

Тогда, принимая во внимание уравнения движения (5), находим

$$I_T(t|N)=\frac{\Delta_{N-1}(p)}{\Delta_N(p)}\left[I_T(t|N-1)-Z_N^{-1}(p)\,e_N(t)\right]. \tag{9}$$

Так как тепловые шумы $I_T(t|N-1)$ и $e_N(t)$ статистически независимы, то энергетический спектр тепловых флуктуаций механической системы с N степенями свободы определяется рекуррентным соотношением

$$S_T(\omega)=\left|\frac{\Delta_{N-1}(j\omega)}{\Delta_N(j\omega)}\right|^2[S_T(\omega|N-1)+|Z_N(j\omega)|^2 2\varkappa TR_N]. \qquad (10)$$

Для простейшей антенны с однозвенным ТС ($N=2$) с учетом (2), (3) и (6) имеем

$$|\Delta_2(j\omega)|^2 S_T(\omega|2)=2\varkappa T[R_1+R_2(1-\varepsilon^{-1}(\omega_0^2-\omega^2)/\omega_0^2)^2].$$

3. Шум обратного влияния

Пусть единственный источник шума в (3) — это шум обратного флуктуационного влияния измерительного прибора $e_{ba}(t)$. Тогда для выходного тока $I_{ba}(t)$ после несложных преобразований, основанных на уравнениях движения (6) и рекуррентных соотношениях (1), получим

$$I_{ba}(t|N)=\frac{1}{\Delta_N(p)Z_N(p)}[\Delta_{N-1}(p)+\varepsilon\Delta_{N-2}(p)]e_{ab}(t)\cong$$

$$\cong\frac{1}{\Delta_N(p)Z_N(p)}\Delta_{N-1}(p)e_{ba}(t). \qquad (11)$$

Входящие в формулу (11) импедансы $\Delta_N(p)$ и $\Delta_{N-1}(p)$ легко вычисляются на основе рекуррентных соотношений (8), что позволяет рассчитать флуктуационный ток $I_{ba}(t)$ для многозвенного ТС.

Пример. Расчет быстродействия оптимального приемника

В гравитационно-волновом эксперименте, проводимом по схеме совпадений [6], существенную роль играет быстродействие оптимального приемника, максимизирующего отношение сигнал/шум. Пусть, как и в [6],

$$E(t)=A\sin\omega_0 t,\ 0<t<\hat{\tau}.$$

В экстремальной ситуации, когда чувствительность антенны определяется интенсивностью принципиально неустранимых шумов измерительного прибора $e_{ba}(t)$ и $i_a(t)$, импульсная характеристика оптимального фильтра [7] дается формулой

$$H(t)=\frac{K_0}{\pi}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2j}\exp\{j\omega_0(t-t_0+\hat{\tau}/2)\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sinc}(\omega\hat{\tau}/2)\,d\omega}{Q(j\omega)Q(-j\omega)}\times\right.$$

$$\left.\times\exp(j\omega(t-t_0+\hat{\tau}/2))\right], \qquad (12)$$

где K_0 — произвольный масштабный коэффициент; $t>0$; t_0 — задержка, обеспечивающая физическую реализуемость фильтра;

$$Q(\omega)=\hat{\Delta}(\omega)+j\varepsilon^{1-N}\hat{\Delta}(\omega)\rho,$$

$$\hat{\Delta}(\omega)-\Delta(\omega_0+\omega),\ |\omega|\ll\omega_0;\ \rho=(S_e/S_i)^{1/2}(\omega_0 L_1)^{-1},$$

где S_e и S_i — спектральные плотности сторонних источников $e_{ba}(t)$ и $i_a(t)$ на резонансной частоте гравитационного детектора ω_0. Для ультракоротких всплексов гравитационного излучения, когда $\widehat{\tau}\to 0$, интеграл в (12) может быть вычислен с использованием теории вычетов; тогда

$$H(t) - K_0 \operatorname{Re}\left[\exp\{j\omega(t-t_0+\widehat{\tau}/2)\}\sum_k \operatorname{Res}\frac{\exp\{j\omega_k(t-t_0+\widehat{\tau}/2)\}}{Q(j\omega_k)\,Q(-j\omega_k)}\right], \quad (13)$$

где ω_k — корень алгебраического уравнения $Q(\omega_k)=0$ (потерями в системе пренебрегаем).

Будем искать решение этого уравнения по схеме Ньютона, предполагая, что $\omega_k=\Omega_k+\xi_k$, Ω_k — корень характеристического уравнения

$$\widehat{\Delta}(\omega_k)=0. \quad (14)$$

Тогда время установления в оптимальном приемнике с учетом (13) и (14) определяется следующей формулой:

$$\tau_t=\min_k\left[\left|\operatorname{Im}\frac{j\widehat{\Delta}_{N-1}(\Omega_k)\,\varepsilon^{1-N}\rho}{\frac{d}{d\omega}(\widehat{\Delta}_N+j\widehat{\Delta}_{N-1}\varepsilon^{1-N}\rho)|_{\omega=\Omega_k}}\right|\right]^{-1}.$$

Из рекуррентных соотношений (8) следует, что

$$\widehat{\Delta}_k(\omega)=\widehat{\Delta}_{k-1}(\omega)(-2\omega/\omega_0)-\varepsilon\widehat{\Delta}_{k-2}(\omega),\ k=\overline{1,N},$$

$$\widehat{\Delta}_0(\omega)=-jL_1\omega_0,\ \widehat{\Delta}_1(\omega)=-jL_1\omega_0(-2\omega/\omega_0).$$

Эти формулы значительно упрощают расчет длительности переходных процессов в механической системе со многими степенями свободы.

Выводы

Постоянный коэффициент трансформации (отношение последующей и предыдущей масс), а также равенство парциальных частот механической системы позволяют получить рекуррентные формулы для непосредственного расчета спектральных характеристик сигнала и шума на выходе гравитационной антенны с подобным ТС. В то же время исходные рекуррентные соотношения (1) оказываются полезными при расчете произвольного ТС с переменным коэффициентом трансформации $\varepsilon=\varepsilon(k)$, $k=\overline{1,N}$, и несовпадающими парциальными частотами.

Автор выражает благодарность В. В. Кулагину и В. Н. Руденко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гусев А. В., Цыганов А. В.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. 35, № 1. С. 52. [2] Харкевич А. А. Теория преобразователей. М., 1972. [3] Айнбиндер А. И. Входные каскады радиоприемников. М., 1974. [4] Воронцов Ю. И. Теория и методы макроскопических измерений. М., 1989. [5] Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Т. 1. М., 1974. [6] Бичак И., Руденко В. Н. Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. М., 1989. [7] Тихонов В. И. Оптимальный прием. М., 1983.

Поступила в редакцию
29.11.93