При энергии электронов, превышающей порог черенковской неустойчивости, процессы вдоль устройства носят экспоненциально нарастающий (затухающий) характер. Картина продольного распределения различных величин для случая $\mathscr{E}=210$ кэВ, $I_0=1{,}4$ кА приведена на рис. 5, *б*. Наблюдается нарастание увлекаемых полей электронного потока вдоль устройства за счет уменьшения кинетической энергии пучка.

Таким образом, эффект длинноволновой черенковской неустойчивости приводит к усилению электронных волн. Коэффициент усиления для рассматриваемого устройства составляет $10 \div 30$ дБ, что может быть использовано при создании новых типов микроволновых устройств, основанных на преобразовании вихревых неизлучаемых полей электронного потока в электромагнитные излучаемые поля.

Подобное явление усиления возможно и в других частотных областях длинноволновой черенковской неустойчивости, лежащих выше критической частоты замедляющей системы. В отличие от запредельных частот, где нет обратных распространяющихся волн, в этих областях возможны возникновение обратной связи и генерация длинноволнового излучения. Это может служить одним из объяснений появления широкополосной длинноволновой составляющей в спектре излучения экспериментальных устройств.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бугаев С. И., Дейчули М. П., Канавец В. И. и др.//Радиотехн. и электроника. 1987. 32, № 11. С. 2386. [2] Пикунов В. М., Колесникова И. Ю.//Радиотехн. и электроника. 1988. 33, № 11. С. 2381. [3] Тамм И. Е., Франк И. М.//ДАН СССР. 1937. № 14. С. 107. [4] Вайнштейн Л. А.//ЖТФ. 1956. 26, № 1. С. 126. [5] Пикунов В. М., Чернявский И. А.//Радиотехн. и электроника. 1992. 37, № 11. С. 2032. [6] Пикунов В. М., Родякин В. Е., Сандалов А. Н.//Физика и применение микроволн. Ч. 2: Тр. Всесоюз. школы-семинара. 22—27 мая 1991. С. 177. [7] Branch G. M., Mihran T. G.//IRE Trans. 1955. ED-2. P. 3. [8] Пикунов В. М., Чернявский И. А.//Радиотехн. и электроника. 1992. 37, № 11. С. 2041. [9] Люиселл У.//Связанные и параметрические колебания в электронике М., 1963.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 4

УДК 517.984

СВОЙСТВА СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОТКРЫТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

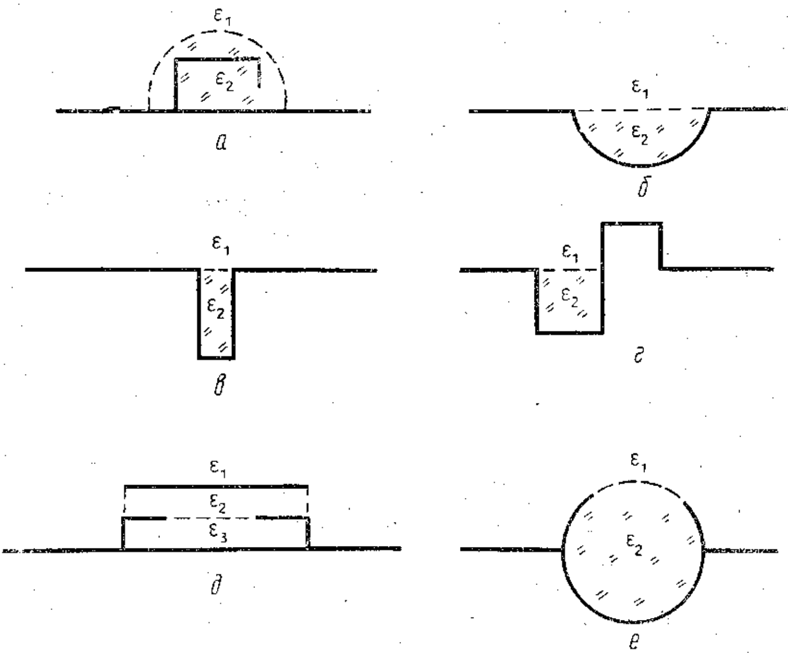
В. В. Ложечко, Ю. В. Шестопалов

Рассматриваются свойства спектра собственных колебаний открытых цилиндрических резонаторов, поперечное сечение которых образовано полуплоскостью с конечной нерегулярностью границы, допускающей корректную постановку на бесконечности парциальных условий Райхардта—Свешникова. Задача в обобщенной постановке сводится к анализу фредгольмовой оператор-функции частотного спектрального параметра, заданной на римановой поверхности аналитического продолжения фундаментального решения. Доказываются дискретность спектра, отсутствие конечных предельных точек. Выделяются области отсутствия точек спектра.

Опишем класс Π_{ab}^{∞} исследуемых неограниченных двумерных областей Ω, образующих поперечное сечение исследуемого семейства резонаторов, в которых допустима постановка краевых задач для уравнения Гельмгольца с обобщенными парциальными условиями на бесконечности типа Райхардта—Свешникова [1, 2]. Ранее, начиная с работ

[1, 3], аналогичные условия и их модификации [4, 5] применялись либо в цилиндрических областях (регулярных волноводах) с локальными неоднородностями (см., напр., [6, 7]), либо в бесконечных областях с компактными [2, 8] или некомпактными периодическими [5, 9] границами. Обобщение парциальных условий для задач с локальными неоднородностями в полуплоскости или в полупространстве с локально-неоднородной границей и описание класса областей, подобного Π_{ab}^{∞} проведены в [7] (см. также [9—11]).

Пусть $x=(x_1, x_2)\in R^2$. Некомпактные участки границ областей Ω из Π_{ab}^{∞} образованы двумя лучами $\{x\,|\,x_2=0,\ x_1\leqslant a,\ x_1\geqslant b\}$. Пусть $U_d(0)=\{x\,|\,|x|<d\}$ и существует наименьшее положительное значение R_0 такое, что $\Omega\setminus\overline{U}_{R_0}(0)=\{x\,|\,x_2>0;\ |x|>R_0\}$; $a,\ b\in U_{R_0}(0)$. В $U_{R_0}(0)$ граница Ω удовлетворяет условию конуса [12] и является конечносвязным множеством. Примеры областей указанного типа приведены на рисунке.



Цилиндрические структуры с сечениями, образованными областями Ω, называются обычно открытыми щелевыми (микрополосковыми, зеркальными и др.) линиями или резонаторами [7].

К данному классу структур относятся как различные планарные микрополосковые, зеркальные и щелевые резонаторы, так и резонаторы, образованные экранами с произвольной конечной неоднородностью, например с прямоугольными желобами. Они могут содержать также конечное число разомкнутых и замкнутых бесконечно-тонких экранов, расположенных над неоднородностями, и конечное число диэлектрических включений.

Сформулируем математическую постановку задач о собственных колебаниях E- и H-типов.

Рассмотрим в Ω уравнение

$$\Delta u(x)+\lambda\varepsilon(x)\,u(x)=0,\quad x=(x_1,\ x_2)\in\Omega\subset R^2, \qquad (1),\ (1')$$

где $\varepsilon(x)$ — диэлектрическая проницаемость среды — положительная кусочно-постоянная функция, принимающая вне U_{R_0} фиксированное постоянное значение ε_1; λ — комплексный спектральный параметр. Функция u совпадает с продольной компонентой электрического (магнитного) поля.

Пусть A — множество точек линий разрыва функции $\varepsilon(x)$. На каждом участке A заданы условия сопряжения

$$(2)\quad [u]|_A=\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]\Big|_A=0,\qquad [u]|_A=\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\Big|_A=0.\quad (2')$$

На $\partial\Omega$ выполняются граничные условия

$$(3)\quad u|_{\partial\Omega}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0,\quad (3')$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к $\partial\Omega$.

В окрестностях точек возврата $\partial\Omega$ (острые кромки) ставятся «условия на ребре», выражающие требование конечности энергии электромагнитного поля в любой окрестности S таких точек, принадлежащей Ω:

$$\iint\limits_S (|\nabla u|^2+|u|^2)\,dx<\infty. \quad (4),\ (4')$$

На бесконечности ставятся условия излучения в форме Райхардта—Свешникова [1], а именно: при $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}>R_0$ в верхней полуплоскости решение представимо в виде ряда

$$u(r,\ \varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nH_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\,r)\sin n\varphi, \quad (5)$$

$$u(r,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nH_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\,r)\cos n\varphi, \quad (5')$$

допускающего почленное дифференцирование по r и φ и равномерно сходящегося по φ на $[0,\pi]$ при любом фиксированном r. Здесь $H_n^{(1)}(z)$ — функция Ханкеля первого рода.

Определим функциональный класс: $M=\{u\,|\,u\in C^2(\Omega\setminus A)\cap C^1(\overline{\Omega}_i\setminus S_\delta)$, $i=1,\ldots,n\}$, где S_δ — объединение δ-окрестностей точек возврата границы $\partial\Omega$; $\Omega_i=\{x\,|\,\varepsilon(x)=\varepsilon_i=\text{const}\}$.

Определение 1. Задача нахождения спектра двумерных собственных колебаний (1)—(5) ((1′)—(5′)) состоит в нахождении нетривиальных решений (собственных функций) уравнения (1) ((1′)) из класса M, удовлетворяющих условиям (2)—(5) ((2′)—(5′)). Значения спектрального параметра λ, при которых такие решения существуют, называются собственными числами задачи (1)—(5) ((1′)—(5′)).

Собственные функции этих задач описывают собственные колебания цилиндрического резонатора с сечением Ω, отвечающие собственным частотам. Частота ω и параметр λ связаны соотношением $\omega^2=\lambda c^2$, где c — скорость света в вакууме.

Рассмотрим сначала задачу (1′)—(5′), а затем сделаем необходимые замечания и дополнения относительно задачи (1)—(5).

Пусть λ — фиксированное значение спектрального параметра задачи (1′)—(5′); $R>R_0$ — число, не являющееся при данном λ корнем уравнений $H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\,r)=0$, $n\in N$. Отметим, что указанное условие в силу [13] при значениях λ, таких, что $4k\pi \leqslant \operatorname{Arg}\lambda \leqslant 2(2k+1)\pi$, $k \in Z$, выполняется для всех $R > R_0$.

Пусть, далее, функции u и v принадлежат классу M и u является собственной функцией задачи (1′)—(5′), тогда при фиксированном $r > R$

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, r) \cos n\varphi \tag{6}$$

— ряд Фурье по системе функций $\{\cos n\varphi,\ n=0, 1, \ldots\}$. Так как u дважды непрерывно дифференцируема при $r > R_0$, то, требуя равенства ее значений справа и слева на полуокружности $C_R = \{x \mid |x| = R\} \cap \{x \mid x_2 > 0\}$, получим выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(R, \varphi) \cos n\varphi\, d\varphi / H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R), \quad n \geqslant 1, \\ C_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(R, \varphi)\, d\varphi / H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R). \end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, выражение для нормальной производной u на кривой C_R принимает вид

$$b_\lambda^R(u) = \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_R = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(R, \varphi)\, d\varphi\, \frac{\partial H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R)/\partial r}{H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda} R)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(R, \psi) \cos n\psi\, d\psi\, \frac{\partial H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R)/\partial r}{H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R)} \cos n\varphi. \tag{8}$$

Разделив уравнение (1′) на $\varepsilon(x) > 0$, домножив на $\bar{v}$ и интегрируя по частям в области $\Omega_R = \Omega \cap U_R$ с учетом (2′), получим интегральное тождество

$$\iint_{\Omega_R} \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla u\, \nabla \bar{v} - \lambda u \bar{v} \right) dx - \int_{C_R} \frac{1}{\varepsilon} b_\lambda^R(u)\, \bar{v}\, dl = 0. \tag{9}$$

Заметим, что граница области Ω_R удовлетворяет условию конуса.

Определение 2. Нетривиальный элемент $u \in W_2^1(\Omega_R)$, удовлетворяющий тождеству (9) для любой функции $v \in W_2^1(\Omega_R)$ и представимый в области $\Omega \setminus \overline{\Omega}_R$ рядом (5′) с коэффициентами (7), назовем обобщенной собственной функцией (ОСФ) задачи (1′)—(5′).

Можно показать, что всякие классические собственные функции задачи (1′)—(5′) являются обобщенными.

Докажем следующее утверждение: определение ОСФ не зависит от R. Действительно, пусть u_{R_1} и u_{R_2} — ОСФ, определенные соответственно при $R = R_1$ и $R = R_2$, и пусть $R_2 > R_1 > R_0$. Покажем, что u_{R_1} удовлетворяет условиям, сформулированным в определении, при $R = R_2$, а u_{R_2} — при $R = R_1$. В силу представимости ОСФ рядом вида (5′) при $r > R_0$ для u_{R_i}, $i = 1, 2$ (что проверяется путем привлечения соответствующих теорем о внутренней гладкости обобщенных решений [14] и стандартного приема разделения переменных) справедливо тождество

$$\iint_{\Omega_{R_1}^{R_2}} \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla u_{R_i} \nabla \bar{v} - \lambda u_{R_i} \bar{v} \right) dx - \int_{C_{R_1}} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u_{R_i}}{\partial r} \bar{v}\, dl +$$

$$+\int\limits_{C_{R_2}} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u_{R_i}}{\partial r} \bar{v}\, dl = 0, \tag{10}$$

где $\Omega_{R_1}^{R_2} = \{x \mid R_1 < |x| < R_2\}$. Складывая (10) и (9) при $R = R_1$, $i = 1$ и вычитая из (9) выражение (10) при $R = R_2$ и $i = 2$, приходим к требуемому утверждению.

Пусть D_λ^R — односвязная область на римановой поверхности функции $H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R)$, замыкание которой не содержит нуль. Учитывая асимптотику функций Ханкеля и равенство

$$H_n^{(1)\prime}(z) = i\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i(z - \pi n/2 - \pi/4)}\left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \text{ при } |z| \to \infty, \tag{11}$$

можно зафиксировать достаточно большое $R > R_0$, такое, что $H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R)$ не будет иметь корней в $D_\lambda{}^R$ при любом $n \in Z^+$ и для всех λ из $D_\lambda{}^R$ справедлива оценка

$$|(\partial H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R)/\partial r)/H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R)| \leqslant |\sqrt{\varepsilon_1\lambda}|\,(1 + C_1) = C_2(\lambda), \tag{12}$$

где C_1 — некоторая малая положительная константа.

Используя соответствующие утверждения о компактности вложения [12], можно показать, что тождество (9) при каждом $\lambda \in D_\lambda^R$ эквивалентно операторному уравнению в $W_2^1(\Omega_R)$

$$u - (\lambda + 1) A^H u - B^H(\lambda)\, u = F, \tag{13}$$

где A^H — вполне непрерывный оператор в $W_2^1(\Omega_R)$. Подобные операторные уравнения были получены и исследованы в работе [15] для задач о распространении волн в волноводах с нерегулярным заполнением.

Рассмотрим свойства оператор-функции $B^H(\lambda)$, определяемой соотношением

$$\iint\limits_{\Omega_R} \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla B^H u \nabla \bar{v} + B^H u \bar{v}\right) dx = \int\limits_{C_R} \frac{1}{\varepsilon} b_\lambda^R(u)\, \bar{v}\, dl. \tag{14}$$

Используя представление (8), оценку (12), равенство Парсеваля и свойства следов функций из $W_2^1(\Omega_R)$, можно доказать ограниченность полуторалинейной формы (14) в $W_2^1(\Omega_R)$, что, в свою очередь, влечет за собой (вследствие компактности вложения следов ограниченного множества функций из $W_2^1(\Omega_R)$ в $L_2(C_R)$) полную непрерывность $B^H(\lambda)$ при каждом значении λ из D_λ^R.

Далее, в силу выбора R, на основании теоремы Вейерштрасса, используя результаты [16], можем заключить, что оператор-функция $B^H(\lambda)$ является аналитической в D_λ^R.

Таким образом, справедлива следующая

Лемма 1. Задача (1′)—(5′) определения спектра собственных колебаний в обобщенной постановке эквивалентна в D_λ^R задаче на характеристические числа

$$K^H(\lambda)\, u = 0 \tag{15}$$

для аналитической фредгольмовой оператор-функции

$$K^H(\lambda) = 1 - (\lambda + 1) A^H - B^H(\lambda),$$

действующей в $W_2^1(\Omega_R)$.

Эквивалентность здесь понимается следующим образом: нетривиальное решение уравнения (15) при фиксированном $\lambda\in D_\lambda^R$, продолженное в Ω с помощью формулы (5′) с коэффициентами (7) есть ОСФ задачи (1′)—(5′), и она удовлетворяет уравнению (15) в $W_2^1(\Omega_R)$.

Обратимся теперь к задаче (1)—(5). Коэффициенты C_n в (5) в этом случае будут выражены формулами

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(R,\ \varphi)\sin n\varphi\, d\varphi/H_n^{(1)}\left(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\,R\right),\quad n\in N, \tag{16}$$

для $b_\lambda^H(u)$ имеет место представление

$$b_\lambda^R(u)=\sum_{n=1}^\infty\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(R,\ \psi)\sin n\psi\, d\psi\frac{\partial H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\,R)/\partial r}{H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\,R)}\sin n\varphi.$$

Классические собственные функции задачи (1)—(5) удовлетворяют интегральному тождеству

$$\iint_{\Omega_R}(\nabla u\,\nabla\bar v-\lambda\varepsilon(x)\,u\bar v)\,dx-\int_{C_R}b_\lambda^H(u)\,\bar v\,dl=0 \tag{17}$$

для любой непрерывно дифференцируемой в Ω_R функции v, такой, что $\operatorname{supp} v\subset\Omega$.

Определение 3. ОСФ задачи (1) — (5) называется ненулевая функция $u\in\widetilde W_2^1(\Omega_R)$, удовлетворяющая тождеству (17) для любой функции $v\in\widetilde W_2^1(\Omega_R)$ и представимая в области $\Omega\setminus\Omega_R$ рядом (5) с коэффициентами (16).

В этом определении через $\widetilde W_2^1(\Omega_R)$ обозначено подпространство $W_2^1(\Omega_R)$ функций из $W_2^1(\Omega_R)$ с нулевым следом на $\partial\Omega$. Практически аналогично устанавливается

Лемма 2. Задача (1)—(5) в обобщенной постановке эквивалентна в D_λ^R задаче на характеристические числа

$$K^E(\lambda)\,w=0$$

для аналитической фредгольмовой в $\widetilde W_2^1(\Omega_R)$ оператор-функции $K^E(\lambda)=1-(\lambda+1)A^E-B^E(\lambda)$.

Пусть функция $\varepsilon(x)$ удовлетворяет следующему условию: для любой точки области Ω существует гладкая кривая, один конец которой совпадает с выбранной точкой, а другой принадлежит множеству $\Omega\cap\{x\mid |x|>R_0\}$, причем у каждой точки пересечения этой кривой с множеством $A\subset\Omega$, на котором $\varepsilon(x)$ терпит разрыв, существует окрестность, в которой A является бесконечно гладкой кривой. Пусть E — множество положительных кусочно-постоянных функций, удовлетворяющих этому условию и принимающих фиксированное постоянное значение при $|x|>R_0$.

Лемма 3. Пусть $\varepsilon(x)\in E$. Тогда множество $\{\lambda\mid 2k\pi\leqslant\operatorname{Arg}\lambda\leqslant 2(2k+1)\pi,\ k\in Z\}$ не содержит точек спектра задачи (1)—(5) ((1′)—(5′)).

Доказательство проведем для задачи (1)—(5) в обобщенной постановке. Для задачи (1′)—(5′) оно аналогично.

Для простоты предположим также, что $\varepsilon(x)$ принимает два значения: ε_1 и ε_2, т. е. $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup A$, где $\Omega_1=\{x\mid\varepsilon(x)=\varepsilon_1\}$ — неограниченная подобласть Ω.

Фиксируем $R > R_0$. ОСФ задачи (1)—(5) при всех $v \in \widetilde{W}_2^1(\Omega_R)$ удовлетворяет тождеству (17) и уравнению (1) в области $\Omega \backslash \Omega_R$. Интегрируя уравнение (1) в области $\Omega_R^{R_1}(R_1 > R)$, предварительно умножив его на $\bar{u}$ и используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\iint\limits_{\Omega_R^{R_1}} (|\nabla u|^2 - \lambda\varepsilon_1 |u|^2)\, dx + \int\limits_{C_R} b_\lambda^R(u)\, \bar{u}\, dl - \int\limits_{C_R} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u}\, dl = 0. \tag{18}$$

Полагая в (17) $v = u$ и складывая (17) и (18), приходим к равенству

$$\iint\limits_{\Omega_{R_1}} (|\nabla u|^2 - \lambda\varepsilon(x) |u|^2)\, dx = \int\limits_{C_{R_1}} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u}\, dl. \tag{19}$$

Предполагая $\lambda \in \{\lambda | 4k\pi < \operatorname{Arg} \lambda < 2(2k+1)\pi\}$, устремляя в (19) R_1 к бесконечности, учитывая (5) и асимптотическое представление функций Ханкеля, придем к равенству $u = 0$ почти всюду в Ω, что доказывает лемму для этого случая. Пусть теперь $\operatorname{Arg}\lambda = 2k\pi$, т. е. $\sqrt{\lambda}$ вещественно. Тогда, очевидно, при всех $v \in \widetilde{W}_2^1(\Omega_R)$ справедливо тождество

$$\iint\limits_{\Omega_R} (\nabla\bar{u}\, \nabla v - \lambda\varepsilon(x)\, \bar{u} v)\, dx = \int\limits_{C_R} \overline{b_\lambda^R(u)}\, v\, dl. \tag{20}$$

Полагая в (17) и (20) $v = u$ и вычитая почленно одно тождество из другого, получим равенство

$$\int\limits_{C_R} (b_\lambda^R(u)\, \bar{u} - \overline{b_\lambda^R(u)}\, u)\, dl = 0.$$

Далее, снова используя вещественность $\sqrt{\lambda}$, приходим к цепочке равенств:

$$0 = \int\limits_{C_R} (b_\lambda^R(u)\, \bar{u} - \overline{b_\lambda^R(u)}\, u)\, dl = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\pi} \sin n\varphi\, |C_n|^2\, W\left[H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R),\right.$$

$$\left. H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R)\right] R\, d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty'} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq n-s}}^{\infty} \int\limits_0^{\pi} \sin s\varphi\, \sin(n-s)\varphi\, (\bar{C}_{n-s} C_s H_{n-s}^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R) \times$$

$$\times H_n^{(1)\prime}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R) - C_{n-s}\bar{C}_s H_{n-s}^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R)\, H_s^{(1)\prime}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R))\, R\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2,$$

где $C = RW\left[H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R),\ H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_1\lambda}\, R)\right]$. Таким образом, все C_n равны нулю. Из независимости определения ОСФ задачи (1)—(5) в обобщенной постановке от R следует равенство $u = 0$ при $r > R_0$. Далее, из теорем о внутренней гладкости, теорем вложения [14], соответствующих интегральных представлений и независимости определения ОСФ от R вытекает аналитичность u в областях Ω_1 и Ω_2, что сразу приводит к равенству $u = 0$ в Ω_1. Так как $u \in W_2^2(G)$ для любой области G: $\bar{G} \subset \Omega_R$ и является кусочно-аналитической функцией в Ω, то из соответствующих теорем о граничных значениях (распределениях) аналитических функций [17] на бесконечно гладком участке области G следует, что $u = 0$ в Ω, что и доказывает лемму.

Таким образом, учитывая независимость определения ОСФ от R, леммы 1—3, результаты работы [18] и произвол в выборе D_λ^R, приходим к следующей теореме, содержащей основной результат данной работы.

Теорема. Спектр задачи (1)—(5) ((1′)—(5′)) является дискретным. Он исчерпывается собственными числами конечной кратности, не принадлежит множеству $\{\lambda | \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \geqslant 0\}$ и не имеет конечных предельных точек в $C \backslash \{0\}$.

Настоящая теорема устанавливает фундаментальное свойство дискретности спектра собственных колебаний исследуемого класса открытых цилиндрических резонаторов с некомпактной границей и диэлектрическими включениями. Этот результат дополняет известные утверждения о дискретности спектра других классов открытых резонаторов с некомпактными границами (см., напр., [5], [10]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Reichardt H.//Ann. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1960. 24. P. 41. [2] Свешников А. Г.//Вычислительные методы и программирование. Вып. 13—14. М., 1969. С. 145. [3] Свешников А. Г.//ДАН СССР. 1950. 73, № 5. С. 917. [4] Morgenrother K., Werner P.//Math. Meth. in Appl. Sci. 1987. 9. P. 105. [5] Сухинин С. В.//Неклассические задачи упругости и пластичности. Вып. 49. Новосибирск, 1981. С. 157. [6] Ильинский А. С., Свешников А. Г. Численные методы в теории дифракции: Курс лекций. М., 1975. [7] Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. М., 1989. [8] Апельцин В. Ф., Еремин Ю. А., Ильинский А. С., Свешников А. Г.//Вычислительные методы и программирование. Вып. 28. М., 1978. С. 3. [9] Шестопалов В. П., Сиренко Ю. К. Динамическая теория решеток. Киев, 1989. [10] Шестопалов В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. Киев, 1987. [11] Шестопалов Ю. В.//ЖВМ и МФ. 1990. 30, № 7. С. 1081. [12] Adams R. Sobolev Spases. N. Y., 1975. [13] Ватсон Д. Теория бесселевых функций. М., 1949. [14] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976 [15] Смирнов Ю. Г.//Дифф. уравнения. 1991. 27, № 1. С. 27. [16] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972. [17] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М., 1986. [18] Маркус А. С.//ДАН СССР. 1958. 119, № 6. С. 1099.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 4

УДК 621.318

ДИФРАКЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ НА РЕШЕТКАХ ТИПА ЭШЕЛЕТТ

Д. Г. Афонин, Е. Р. Канунов

В двухмиллиметровом диапазоне экспериментально исследованы дифракционные решетки типа эшелетт с периодом, большим длины волны. Теоретически рассчитаны зависимости амплитуд отраженных волн дифракционных порядков от периода решетки и угла падения плоской волны на эшелетт; проведено сравнение экспериментальных и теоретических результатов.

В связи с необходимостью создания новых электродинамических систем для приборов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов проводятся исследования различных модификаций дифракционных решеток [1—4].

В данной работе представлены результаты исследования отражательных дифракционных решеток типа «эшелетт» в так называемой средневолновой области, когда период исследуемой дифракционной структуры равен нескольким длинам волн.