

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 536.24.02+519.6+518.0

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ ПРИ ЗАКАЛКЕ ПО ИЗМЕРЕННОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛЮ

А. В. Щепетиллов

(кафедра математики)

В теории аустенитного распада эвтектоидных сталей известна феноменологическая модель, основанная на принципе аддитивности, описываемая краевой задачей для интегродифференциального уравнения и содержащая два функциональных параметра. Предлагается численный алгоритм определения этих параметров по температурным режимам в некоторых точках образца, состоящий в последовательной минимизации функционалов невязки и качества эксперимента. Приводятся результаты модельных численных расчетов.

1. В работах [1, 2] была сформулирована обратная задача об определении параметров аустенитно-перлитного превращения в модели Шейли и предложен алгоритм ее численного решения. В настоящей работе этот алгоритм переносится на случай модели с распределенными параметрами, сформулированной в [3]. Эта модель описывается краевой задачей для интегродифференциального уравнения. Чтобы сократить время численных расчетов, будем предполагать образец длинным цилиндром, а начальные и краевые условия аксиально-симметричными. Пусть  $x$  — расстояние от оси цилиндра, а  $r$  — его радиус. Тогда задача, описывающая аустенитно-перлитный переход, выглядит следующим образом:

$$c_v \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) = q \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t) \right) + e \frac{\partial F}{\partial t}(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq r, \quad (1)$$

$$F(x, t) = 1 - \exp \left\{ - \left( \int_0^t \beta(\theta(x, \xi)) d\xi \right)^a \right\}, \quad (2)$$

$$-q \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=r} = h(\theta(r, t) - \theta^e(t)), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0 \geq \rho_2, \quad (5)$$

где  $c_v$  — теплоемкость единичного объема стали,  $q$  — ее теплопроводность,  $h$  — коэффициент теплопередачи во внешнюю среду,  $e$  — теплота, выделяющаяся при превращении единицы объема образца из аустенита в перлит,  $\theta^e(t)$  — температура внешней среды,  $\theta^e(0) = \theta_0$ ,  $a = \text{const} > 0$ ,

$$\beta(\theta) \in C_0^+(\rho_1, \rho_2) := \{f(\theta) \in C(\rho_1, \rho_2), f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0, f(\theta) \geq 0\}.$$

2. Обратная задача определения параметров фазового перехода состоит в определении  $\rho := \{\beta, a\}$  по измерению температуры в некоторых точках образца. При этом для определения  $\beta(\theta)$  во всем температурном интервале  $[\rho_1, \rho_2]$  аустенитно-перлитного превращения необходимо за счет выбора температуры внешней среды  $\theta^e(t)$  «размазать» фазовое превращение в  $[\rho_1, \rho_2]$  по возможности равномерно [2].

Пусть  $x_1, \dots, x_k$  — заданный набор точек из  $[0, r]$ ,  $\Psi = \{\theta_1^e(t), \dots, \theta_n^e(t)\}$  — набор температурных режимов внешней среды, а  $\theta_{i,j}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, k}$ , есть температурный режим в точке  $x_j$  при температурном режиме внешней среды  $\theta^e(t) = \theta_i^e(t)$ . Вариационная постановка обратной задачи заключается в нахождении величины

$$\operatorname{arginf}_{p \in P} \Phi_{\Psi}(p) := \operatorname{arginf}_{p \in P} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \int_0^{T_j} (\theta_{i,j}(t) - \tilde{\theta}_{i,j}(t))^2 dt,$$

где  $\theta_{i,j}(t)$  — «экспериментальная» информация, а  $P := C_0^+[\rho_1, \rho_2] \times R_+$ .

Для управления «размазыванием» аналогично [2] введем функционал качества входной информации  $K_p(\Psi)$ , состоящий из суммы двух неотрицательных частей, одна из которых равна нулю, только если фазовое превращение равномерно в  $[\rho_1, \rho_2]$ , а вторая равна нулю, только если суммарная доля образовавшегося к моментам  $T_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , перлита по всем режимам охлаждения  $\theta_i^e(t)$  и всем точкам наблюдения  $x_j$  равна максимальной возможной величине  $nk$ . Итерационный процесс последовательной минимизации двух функционалов

$$\Psi_s = \operatorname{arginf}_R K_{p_s}(\Psi), \quad (6)$$

$$p_{s+1} = \operatorname{arginf}_P \Phi_{\Psi_s}(p) \quad (7)$$

аналогичен [2], за исключением выбора ограничений  $R$  на температурные режимы внешней среды, о которых будет сказано ниже.

3. Обратимся к вопросам реализации алгоритма. Финитная функция  $\beta(\theta)$  имеет на практике характерную колоколообразную форму, причем разные ее участки ответственны за фазовые переходы в разных температурных диапазонах. С другой стороны, найти такую функцию во всех точках с одинаковой относительной точностью нереально. Поэтому для оценки точности определения  $\beta(\theta)$  естественным является следующий подход. Априори всегда можно указать такую величину  $\beta_{\max}$ , что  $\beta(\theta) < \beta_{\max}$ . Выберем некоторое пороговое значение  $\beta_{\min}$ , такое, что вычисление значений  $\beta(\theta)$  меньших  $\beta_{\min}$  с большой относительной точностью не представляет интереса. Тогда для оценки точности найденного приближения  $\tilde{\beta}(\theta)$  можно воспользоваться следующей величиной:

$$\max_{\{\rho_1, \rho_2\}} \frac{|\tilde{\beta}(\theta) - \beta(\theta)|}{\max\{\beta(\theta), \beta_{\min}\}} \quad (8)$$

Использовавшиеся в [2] управляющие параметры непосредственно влияют на температуру элемента, и при их аппроксимации кусочно-линейными функциями величины интервалов линейности определялись априори, а при минимизации  $K_p(\Psi)$  подбирались лишь производные теплового стока на участках линейности. В рассматриваемом же случае варьировались как величины интервалов линейности функций  $\beta(\theta)$ , так и значения  $\partial\theta_i^e/\partial t$  на этих интервалах. Пусть таких интервалов  $m$ , причем величина каждого  $\Delta t_{j,i}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , а  $\partial\theta_i^e/\partial t$  на этих интервалах есть  $v_{j,i}$ . На  $\Delta t_{j,i}$  и  $v_{j,i}$  накладываются следующие ограничения:

$$\beta_{\max}^{-1} \leq \Delta t_{j,i} < 2\beta_{\min}^{-1}, \quad v_{j,i} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m v_{j,i} \Delta t_{j,i} \leq \theta_0 - \theta_{\min},$$

где  $\theta_{\min}$  — минимальная возможная температура окружающей среды. Система (1)–(5) решалась итерационно: нулевое приближение к  $\theta$  вычислялось, как описано в [4], затем по найденному приближению к  $\theta$  вычислялось  $F$  в соответствии с (2), найденное  $F$  подставлялось в (1), и решалась краевая задача (1), (3)–(5) с известным тепловым источником  $e \partial F/\partial t$ . Найденное таким образом первое приближение к  $\theta$  опять использовалось для расчета теплового источника и т. д. Критерием окончания итерационного процесса служила малость разности двух соседних приближений к  $\theta$ .

Интеграл  $\int_0^t \beta(\theta(\xi)) d\xi$  вычислялся по формуле Симпсона. Дискретизация  $\beta(\theta)$  и минимизация  $\Phi$  и  $K$  производились, как описано в [2].

В проведенных расчетах было принято:  $m = 5$ ,  $n = 2$ ,  $k = 2$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = r$ ,  $\theta_{\min} = 100^\circ \text{C}$ ,  $r = 5,5$  мм,  $c_v = 4 \cdot 10^3$  Дж/м<sup>3</sup>,  $q = 43$  Вт/(м $\cdot$ °C),  $e = 6 \cdot 10^8$  Дж/м<sup>3</sup>,  $h = 300$  Вт/(м<sup>2</sup>  $\cdot$  °C),  $\theta_0 = 730^\circ \text{C}$ ,  $\rho_1 = 370^\circ \text{C}$ ,  $\rho_2 = 730^\circ \text{C}$ .

Число точек на временной оси подбиралось исходя из выражения  $T_i = \sum_{j=1}^m \Delta t_{j,i}$

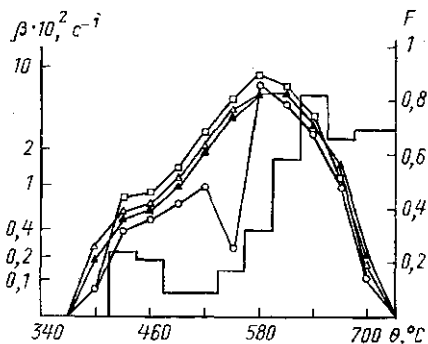
и задания режима охлаждения так, чтобы достичь нужной точности расчета прямой задачи. Число точек на пространственной оси равнялось 50.

Алгоритм был реализован на версии языка Fortran 5.0 Microsoft.

В этих условиях время расчета прямой задачи на IBM PC с микропроцессором Intel 80386/80387 составило 1–2 мин в зависимости от тактовой частоты последнего, а время расчета обратной задачи — несколько десятков часов.

Диапазон восстанавливаемых значений  $\beta(\theta)$  был выбран охватывающим один порядок: от  $\beta_{\max} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$  до  $\beta_{\min} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ .

4. Точное решение задачи  $\beta(\theta)$  в математическом эксперименте предполагается известным. На рисунке представлены соответствующие различным  $s$  в итеративном процессе (6), (7) приближения к точному значению  $\beta(\theta)$  (черные треугольники) при  $s=0$  (кружки), 1 (квадратики) и 2 (светлые треугольники), а также гистограмма фазового превращения, соответствующая  $\Psi$ . При этом точное значение  $a=0,500$ ,  $a_0=0,380$ ,  $a_1=0,431$ ,  $a_2=0,480$ .



В сравнении с результатами [2] видно, что хотя число управляющих параметров и больше (10 вместо 5), но более опосредованная их связь с перлитным превращением (через краевые условия) не дает возможности добиться столь же равномерного перлитного превращения, как для точечной модели. Этим можно объяснить меньшую точность восстановления  $\beta(\theta)$ , которая, в соответствии с критерием (8), составляет 10% при точности измерения температуры  $0,05^\circ \text{C}$ .

Автор искренне признателен проф. В. Б. Гласко за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гласко В. Б., Щепетиллов А. В. // ЖВМ и МФ. 1991. 31. С. 1826.  
 [2] Гласко В. Б., Щепетиллов А. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. 35, № 1. С. 3. [3] Visintin A. // IMA J. Appl. Math. 1987. 39. P. 143. [4] Verdi S., Visintin A. // Acta Metallurg. 1987. 35. P. 2711.

Поступила в редакцию  
22.11.93

## РАДИОФИЗИКА

УДК 621.738.3

### ЛАЗЕР НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ В РЕЖИМЕ НАСЫЩЕНИЯ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ КПД ПРИБОРА

В. К. Гришин, Т. А. Новикова

(кафедра общей ядерной физики)

На примере лазера на свободных электронах с узким интенсивным пучком в условиях сильного каналирования полей излучения рассмотрены самосогласованные нелинейные соотношения, позволяющие определить максимальную эффективность прибора. Нелинейные оценки КПД получены с помощью законов сохранения потоков плотностей энергии и импульса на основании решений волнового уравнения для потенциала излучения.