нии качественно отличается от импульса АЭ, что обусловлено наличием чисто упругой составляющей АЭ, связанной с большой величиной спонтанной деформации. Сдвиговая волна АЭ соответствующей поляризации имеет самую большую амплитуду, причем излучение в направлении раскрытия клиновидного домена примерно в 3 раза больше, чем в перпендикулярном направлении, при одинаковой величине импульсов Баркгаузена.

Выводы

Полученные результаты позволяют сказать, что взаимодействие звука с доменной структурой сегнетоэлектрика представляет интерес как для изучения самой доменной структуры, так и для практического применения в акустоэлектронных устройствах с возможным управлением свойствами структуры электрическим полем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Барфут Дж., Тейлор Дж. Полярные диэлектрики и их применение. М., 1981. [2] Рудяк В. М. Процессы переключения в нелинейных кристаллах. М., 1986. [3] Антипов В. В., Блистанов А. А., Сорокин Н. Г., Чижиков С. И.// Кристаллография. 1985. **30**, № 4. С. 734. [4] Шур В. Я., Летучев В. В., Попов Ю. А.//ФТТ. 1982. **24**, № 11. С. 3444. [5] Шур В. Я., Попов Ю. А., Коровина Н. В.//ФТТ. 1984. **26**, № 10. С. 2624. [6] Auld B. A. Acoustic Field and Waves in Solids. V. 2. N. Y., 1973. [7] Кессених Г. Г., Шувалов Л. А.// //Изв. АН СССР, сер. физ. 1984. **48**, № 6. С. 1168. [8] Лайхтман Б. Д., Таганцев А. К.//ФТТ. 1975. **17**, № 6. С. 1734. [9] Белов В. В. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1984. [10] Белов В. В., Сердобольская О. Ю., Сучкова М. А.//ФТТ. 1984. **26**, № 2. С. 556. [11] Mozhaev V. G., Morozova G. P., Serdobolskaya O. Yu.//Proc. Second Intern. Symp. on Surf. Waves and Layered Structures. Varna, Bulgaria, 1989. Vol. 2. P. 367. [12] Есаян С. Х., Леманов В. В., Смоленский Г. А.//ДАН СССР. 1974. **217**. № 1. С. 83. [13] Злоказов М. В. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. (МИФИ), 1988. [14] Алексеев А. Н.// //Изв. АН СССР, сер. физ. 1984. **48**, № 6. С. 1094. [15] Белов В. В., Сердобольская О. Ю.//Изв. АН СССР, сер. физ. 1984. **48**, № 6. С. 1065. [16] Шур В. Я., Ломакин Г. Г., Улыбина З. И.// Письма в ЖЭТФ. 1984. **10**. № 3. С. 172. [17] Можаев В. Г., Морозова Г. П., Сердобольская О. Ю.//ФТТ. 1990. **32**, № 11. С. 3230. [18] Зарембо Л. К., Морозова Г. П., Сердобольская О. Ю.//ФТТ. 1986. **28**, № 11. С. 3213. [19] Белов В. В., Сердобольская О. Ю.//ФТТ. 1984. **26**, № 9. С. 2624. [20] Zarembo L. K., Mozhaev V. G., Morozova G. P., Serdobolskaya O. Yu.//Proc. Second Intern. Symp. on Surf. Waves and Layered Structures. Varna, Bulgaria, 1989. Vol. 2. P. 62. [21] Белов В. В., Морозова Г. П., Сердобольская О. Ю.//Письма в ЖТФ. 1987. **12**, № 2. С. 89. [22] Morozova G., Serdobolskaja O.//Proc. «Ultrasonics-93». Wien, 1993. P. 133. [23] Морозова Г. П., Сердобольская О. Ю., Тихомирова Н. А.//Письма в ЖЭТФ. 1986. **43**, № 10. С. 488. [24] Белов В. В., Сердобольская О. Ю.//ФТТ. 1984. **26**, № 5. С. 1431. [25] Белов В. В., Морозова Г. П., Сердобольская О. Ю.//ФТТ. 1986. **28**, № 1. С. 227. [26] Morozova G. P., Serdobolskaja O. Yu.//Ferroelectrics. 1986. **75**, N 4. P. 449.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1994. Т. 35, № 6

УДК 534.222

ГЕНЕРАЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ЗА СЧЕТ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

П. С. Ланда

Рассматриваются системы, в которых может возникать генерация звуковых волн за счет их взаимодействия с источниками тепла: резонатор Гельмгольца с неравномерно нагретыми стенками, два связанных резонатора Гельмгольца с подводимым в полость одного из них теплом, труба с пламенем и труба Рийке. Получены условия самовозбуждения автоколебаний.

В последние годы на кафедре акустики проводились работы по исследованию генерации звука как в технических, так и в биологических системах. Были разработаны модели голосового источника человека (или автоколебаний голосовых складок) [1, 2] и генерации звуков Короткова, возникающих при измерении кровяного давления [3], построена теория генерации звука турбулентными струями при их взаимодействии с препятствиями. В рамках этого направления исследованы также вопросы возбуждения звуковых волн за счет источников тепла.

Явления термической генерации звука известны достаточно давно. Эти явления наблюдаются в так называемых термомеханических системах, содержащих механический колебательный элемент, взаимодействующий с тепловым источником энергии. Ниже рассматриваются примеры указанного явления.

1. Резонатор Гельмгольца с неравномерно нагретыми стенками

Одной из наиболее известных термомеханических систем является резонатор Гельмгольца (рис. 1, *а*) с неравномерно нагретыми стенками, описанный еще в трактате Рэлея [4]. Рэлей дал качественное объяснение следующему явлению, хорошо известному стеклодувам. Если на конце стеклянной трубки диаметром несколько миллиметров и длиной порядка 10 см раздуть шарик, то часто, пока шарик горяч, трубка издает звук. Частота этого звучания хорошо соответствует формуле для собственной частоты резонатора Гельмгольца:

$$\omega_0=(\varkappa p_0 S/\rho_0 l V)^{1/2}, \tag{1}$$

где p_0 — атмосферное давление, ρ_0 — плотность заполняющего резонатор газа при атмосферном давлении, $\varkappa=c_p/c_v$ — показатель адиабаты, равный отношению удельной теплоемкости при постоянном давлении c_p к удельной теплоемкости при постоянном объеме c_v, S — площадь сечения трубки, l — длина трубки, V — объем полости резонатора.

Количественное объяснение этого явления было дано в [5]. Здесь излагается несколько иной подход. Уравнение движения массы газа, заключенной в трубке, без учета сжимаемости имеет вид

$$\rho_0 S l \ddot{x}=S\Delta p(x), \tag{2}$$

где x — смещение газа, $\Delta p(x)=p(x)-p_0$, $p(x)$ — давление газа в полости. Для вычисления $\Delta p(x)$ воспользуемся уравнением состояния идеального газа и первым законом термодинамики, которые в приближении малых значений x удобно записать в виде

$$pV=mc_v(\varkappa-1)T,\quad Q(x)=mc_v\vartheta(x)+p_0Sx, \tag{3}$$

где T — средняя температура газа в полости, $Q(x)$ — количество тепла, полученное газом в полости при смещении газа в трубке на величину x за счет обмена с неравномерно нагретыми стенками, $\vartheta(x)=T-T_0$ — изменение температуры газа в полости при том же смещении (предполагается, что теплообмен в полости происходит достаточно быстро, так что температуру газа во всех точках можно считать одинаковой). При малых x из первого уравнения (3) можно найти $V\Delta p(x)=-p_0Sx+mc_v(\varkappa-1)\vartheta(x)$. Подставляя сюда $\vartheta(x)$ из второго уравнения (3), имеем

$$V\Delta p(x)=-\varkappa p_0Sx+(\varkappa-1)Q(x). \tag{4}$$

Таким образом, уравнение (2) принимает вид

$$\rho_0 Sl\ddot{x} + \varkappa \frac{p_0 S^2}{V} x = \frac{\varkappa - 1}{V} SQ(x). \tag{5}$$

Отсюда, кстати, при $Q(x)=0$ получаем формулу (1) для собственной частоты резонатора.

Предполагая, что процесс в полости является политропическим с удельной теплоемкостью c, можно выразить $Q(x)$ через изменение температуры $\vartheta(x)$ по формуле

$$Q(x) = mc\vartheta(x). \tag{6}$$

Будем считать, что обмен теплом движущегося газа со стенками происходит по закону Ньютона, согласно которому скорость изменения количества тепла, получаемого некоторым телом, пропорциональна разности температур окружающей среды и данного тела. Роль окружающей среды играют стенки резонатора. Учтем, что после раздутия шарика температура стенок быстро спадает в направлении от шарика к трубке. Распределение температуры имеет вид, показанный на рис. 1, *б*. Так как мы положили, что в состоянии равновесия темпера-

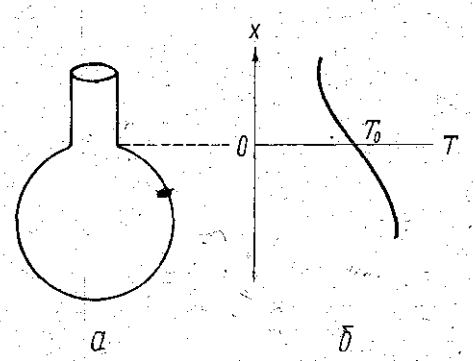

Рис. 1

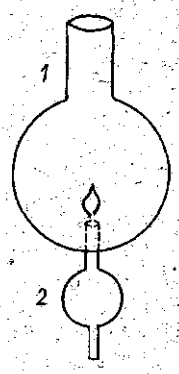

Рис. 2

Рис. 1. Резонатор Гельмгольца (*а*) и распределение температуры вдоль оси x (*б*)

Рис. 2. Сосредоточенная модель «поющего» пламени в виде двух связанных резонаторов Гельмгольца

тура газа в полости равна T_0, то следует считать, что средняя температура стенок резонатора также равна T_0. При колебаниях газ движется вдоль стенок с изменяющейся температурой. Поэтому можно ввести некоторую эффективную температуру стенок, равную $T_w(x) = T_0 - \alpha x + \beta x^3$. Так как мгновенная температура газа в полости $T = T_0 + \vartheta$, то закон Ньютона с учетом (6) можно записать в виде

$$mc\dot{\vartheta} - K(T_w(x) - T) = -K(\alpha x - \beta x^3 + \vartheta), \tag{7}$$

где K — коэффициент теплоотдачи. В результате уравнения (5) и (6) можно записать так:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = k\vartheta, \quad \dot{\vartheta} + \gamma\vartheta = -ax + bx^3, \tag{8}$$

где δ определяется трением газа о стенки трубки, ω_0 — собственная частота резонатора, $k = (\varkappa - 1)c/l$, $\gamma = K/mc$, $a = \alpha K/mc$, $b = \beta K/mc$. Легко видеть, что система (8) относится к классу уравнений, описываю-

щих системы с инерционным самовозбуждением [6]. Самовозбуждение колебаний в рассматриваемой системе обусловлено достаточно большим значением градиента температуры α.

2. Сосредоточенная модель «поющего» пламени

Близким к рассмотренному выше является эффект так называемого «поющего» пламени, также описанный Рэлеем. Он известен со второй половины XVIII в. и состоит в следующем. Если внутрь длинной трубы небольшого диаметра поместить газовую горелку, то при некоторых условиях возникают интенсивные колебания воздуха в трубе и пламени, приводящие к излучению звука. Рэлей показал, что пламя может возбуждать колебания воздуха только тогда, когда оно находится вблизи пучности давления и колеблется так, что в фазе сжатия выделяется больше тепла, чем в фазе разрежения. Количественное решение задачи о возбуждении автоколебаний в этой системе на основе одномерных уравнений Эйлера и связи давления с выделенным при горении теплом впервые было дано в [7]. Об этой модели речь пойдет ниже. Более простая модель, основанная на замене трубы и подводящей пламя трубки двумя связанными резонаторами Гельмгольца (рис. 2), приведена в книге [8]. Ниже рассмотрен модифицированный вариант этой модели.

Уравнения колебаний газа в горлышках резонаторов без учета пламени можно записать в виде

$$\rho_1 l_1 S_1 \ddot{x} = -\alpha_1 \dot{x} + S_1 \Delta p_1, \quad \rho_2 l_2 S_2 \ddot{y} = -\alpha_2 \dot{y} + S_2 (\Delta p_2 - \Delta p_1), \tag{9}$$

где x и y — смещения воздуха и газа в горлышках первого и второго резонаторов, l_1 и l_2 — длины горлышек, S_1 и S_2 — их поперечные сечения, ρ_1 — плотность воздуха при атмосферном давлении, ρ_2 — плотность газа во втором резонаторе при атмосферном давлении, α_1 и α_2 — коэффициенты трения воздуха и газа о стенки резонаторов, Δp_1 и Δp_2 — изменения давлений в полостях резонаторов *1* и *2*. Так как в полость первого резонатора поступает тепло Q, то для Δp_1 в линейном приближении можно записать формулу, аналогичную (4):

$$\Delta p_1 = -\varkappa \frac{p_0}{V_1} (S_1 x - S_2 y) + \frac{\varkappa - 1}{V_1} Q, \tag{10}$$

где p_0 — атмосферное давление, V_1 — объем первого резонатора. В полости второго резонатора происходящие процессы можно считать адиабатическими, и поэтому

$$\Delta p_2 = -\varkappa p_0 S_2 y / V_2. \tag{11}$$

Считая процесс в полости первого резонатора политропическим, запишем связь между поступающим количеством тепла Q и отклонением температуры ϑ_1 в полости первого резонатора:

$$Q = m_1 c_1 \vartheta_1, \tag{12}$$

где m_1 — масса воздуха в полости первого резонатора, c_1 — его удельная теплоемкость. Уравнение баланса для поступающего тепла можно записать в виде

$$dQ/dt = \rho_2 c_2 S_2 T_g \dot{y} - K \vartheta_1, \tag{13}$$

где T_g — температура газа в полости второго резонатора. Первый член в правой части уравнения (13) описывает количество тепла, поступа-

ющего в единицу времени в первый резонатор из горлышка второго резонатора, второй член характеризует теплоотдачу в окружающую среду. Подставляя в уравнение (13) выражение (12), перепишем это уравнение в виде

$$dQ/dt+\gamma Q=a\dot{y}, \tag{14}$$

где $\gamma=K/m_1c$, $a=\rho_2c_2S_2T_g$.

Подставляя теперь (10) и (11) в уравнения (9), преобразуем последние к виду

$$\ddot{x}+2\delta_1\dot{x}+\omega_1^2x=\sigma_1y+k_1Q,\ \ddot{y}+2\delta_2\dot{y}+\omega_2^2y=\sigma_2x+k_2Q, \tag{15}$$

где

$$2\delta_j=\frac{\alpha_j}{m_jl_j},\ \omega_1^2=\frac{\varkappa p_0S_1}{m_1l_1},\ \omega_2^2=\frac{\varkappa p_0S_2}{m_2l_2}\left(\frac{V_2}{V_1}+1\right),$$

$$\sigma_j=\frac{\varkappa p_0S_{j+1}}{m_jl_j}\frac{V_j}{V_1},\ k_j=\frac{\varkappa-1}{m_jl_j}\frac{V_j}{V_1},$$

индекс j принимает значения 1 и 2, причем $j=3$ нужно заменить на 1.

Уравнения (15) совместно с (14) описывают в линейном приближении автоколебательную систему, условие самовозбуждения которой имеет вид

$$(a_1a_2-a_3)(a_3a_4-a_2a_5)-(a_1a_4-a_5)^2<0, \tag{16}$$

где a_j — коэффициенты характеристического уравнения

$$p^5+a_1p^4+a_2p^3+a_3p^2+a_4p+a_5=0. \tag{17}$$

Нетрудно убедиться, что коэффициенты a_j определяются следующими выражениями:

$$a_1=\gamma+2(\delta_1+\delta_2),\ a_2=2\gamma(\delta_1+\delta_2)+\omega_1^2+\omega_2^2+4\delta_1\delta_2-ak_2,$$

$$a_3=\gamma(\omega_1^2+\omega_2^2+4\delta_1\delta_2)+2(\delta_1\omega_2^2+\delta_2\omega_1^2-\delta_1ak_2),\ a_4=\omega_1^2\omega_2^2+$$

$$+2\gamma(\delta_1\omega_2^2+\delta_2\omega_1^2)-\sigma_1\sigma_2-a(\omega_1^2k_2+\sigma_2k_1),\ a_5=\gamma(\omega_1^2\omega_2^2-\sigma_1\sigma_2).$$

Частота автоколебаний на границе самовозбуждения выражается через коэффициенты a_j следующим образом:

$$\omega=\sqrt{\frac{a_1a_4-a_5}{a_1a_2-a_3}}, \tag{18}$$

Границы областей устойчивости на плоскости параметров γ/ω_1 и $\tilde{a}=4a(\varkappa-1)/\varkappa p_0S_1$, определяемые неравенством (16), показаны на рис. 3, *а* для $2\delta_1/\omega_1=0{,}1$ и следующих соотношений между параметрами: $\rho_1l_1=4\rho_2l_2$, $S_1=4S_2$, $V_1=9V_2$, $\delta_2/\delta_1=3$. На рис. 3, *б* показана зависимость от γ/ω_1 относительной частоты автоколебаний ω/ω_1 на границах самовозбуждения. Мы видим (см. рис. 3, *а*), что при малых значениях $\gamma(\gamma\leqslant\gamma^*)$ условие самовозбуждения (16) может быть записано в виде $a>a_{cr}$, где a_{cr} убывает с ростом γ и зависит от параметров системы. При $\gamma>\gamma^*$ условие самовозбуждения (16) принимает вид $a_{cr}<a<a^*$, причем a_{cr} растет с ростом γ, а a^* убывает. В результате при некотором критическом значении параметра γ, которое мы обозначим γ_{cr}, значения a_{cr} и a^* сливаются и условие самовозбуждения перестает выполняться. При дальнейшем увеличении γ условия возбуждения снова начинают выполняться в некоторой области значений параметра a. Ча-

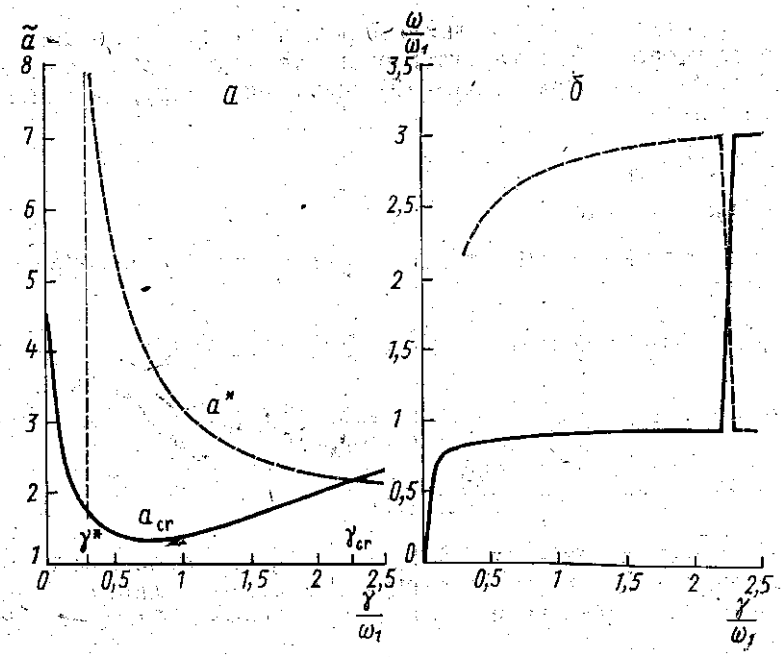

Рис. 3. Границы областей устойчивости двух связанных резонаторов Гельмгольца на плоскости параметров γ/ω_1 и $\tilde{a}=4a(\varkappa-1)/(\varkappa p_0 S_1)$, определяемые неравенством (16) (*а*), и зависимость частоты генерации вблизи границы возбуждения от γ/ω_1 (*б*)

стота автоколебаний вблизи границ самовозбуждения слабо увеличивается с ростом γ. Отметим, что для других значений $2\delta_1/\omega_1$ картина подобна, только значения a_{cr}, a^* и γ^* тем больше, чем больше $2\delta_1/\omega_1$.

3. Распределенная модель «поющего» пламени

Ниже мы рассмотрим модель «поющего» пламени, предложенную в работе [7] (рис. 4). В отличие от [7] мы воспользуемся методом Раушенбаха [9] и заменим область σ, окружающую пламя, граничной поверхностью Σ, для которой запишем условия разрыва. Кроме того, мы не будем делать искусственное предположение о том, что количество тепла, сообщенное пламенем, пропорционально скорости потока газа в подводящей пламя трубке, а воспользуемся уравнением баланса тепла, аналогичным (13).

Процессы, происходящие вблизи источника тепла, являются весьма сложными и не поддаются простому описанию. Чтобы преодолеть эти сложности, Раушенбах предложил окружить источник тепла областью σ, линейные размеры которой значительно меньше длины трубы (и, следовательно, длины волны возбуждаемого звука), и затем, не рассматривая в деталях процессов, происходящих внутри этой области, заменить ее некоторой поверхностью Σ (см. рис. 4). При этом на поверхности Σ требуется задать граничные условия. Как показано ниже, на этой поверхности имеется разрыв скорости частиц воздуха и давления.

В этом случае для областей трубы *1* и *2* (см. рис. 4) можно пренебречь вязкостью и теплопроводностью воздуха и записать уравнения Эйлера и уравнение непрерывности. В линейном приближении имеем

$$\rho_0\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho_0\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{19}$$

где ρ — отклонение плотности воздуха от стационарного значения ρ_0, p — отклонение давления от стационарного значения p_0, v — отклонение скорости воздуха от стационарного значения u, u — скорость направленного движения воздуха (в рассматриваемой здесь задаче о «поющем» пламени ею можно пренебречь). Считая процесс возбуждения звука адиабатическим, можно из уравнений (19) и уравнения адиабаты исключить ρ. В результате получим следующие уравнения:

$$\rho_0\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\rho_0 a_s^2\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{20}$$

где $a_s=\sqrt{\varkappa p_0/\rho_0}$ — скорость звука, $\varkappa=c_p/c_v$ — отношение теплоемкостей.

Для подводящей трубки *3* (см. рис. 4) мы запишем те же уравнения:

$$\rho_0\left(\frac{\partial v_3}{\partial t}+u_3\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial p_3}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p_3}{\partial t}+u_3\frac{\partial p_3}{\partial x}+\rho_0 a_s^2\frac{\partial v_3}{\partial x}=0, \tag{21}$$

где u_3 и v_3 — скорость направленного движения газа и отклонение скорости движения газа в подводящей трубке.

Выведем теперь граничные условия на поверхности разрыва Σ. С этой целью воспользуемся для области σ трехмерными уравнениями Эйлера и непрерывности. Кроме того, примем во внимание первое начало термодинамики, которое в линейном приближении может быть записано в виде

$$Q=\frac{p-a_\sigma^2\rho}{\varkappa-1}lS, \tag{22}$$

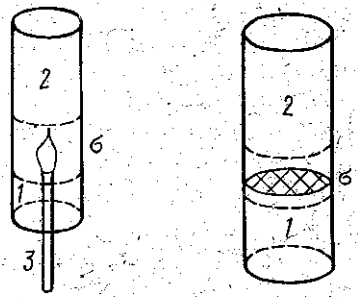

Рис. 4. Распределенная модель «поющего» пламени

Рис. 5. Схема опыта Рийке. При теоретических расчетах область σ заменяется поверхностью Σ.

где Q — отклонение количества тепла, сообщаемого воздуху, от стационарного значения, S — площадь сечения трубы, l — длина области σ, a_σ — скорость звука в области σ. Выразив из уравнения (22) ρ через p и Q и подставив в уравнение непрерывности, получим

$$\frac{1}{a_\sigma^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\varkappa-1}{lS}\frac{dQ}{dt}\right)+\rho_0\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0, \tag{23}$$

где $dQ/dt=\partial Q/\partial t+u\partial Q/\partial x$. Проинтегрируем теперь уравнения Эйлера и уравнение (23) по объему области σ, полагая, что ее длина $l\to 0$, и пренебрегая скоростью направленного движения воздуха в основной трубе. В результате из первого уравнения Эйлера получим

$$(p_2-p_1)|_{x=0}=0, \tag{24}$$

где индексы «1» и «2» относятся к областям *1* и *2* соответственно. После интегрирования уравнения (23) имеем

$$(v_2 - v_1)|_{x=0} = \frac{\varkappa - 1}{a_0^2 S} \frac{dQ}{dt}, \tag{25}$$

где изменение количества тепла Q описывается уравнением, аналогичным (14):

$$\frac{dQ}{dt} + \gamma Q = \beta v_3|_{x=0}. \tag{26}$$

К указанным условиям разрыва следует добавить граничные условия на концах трубы и подводящей трубки:

$$p_1|_{x=-L_1} = -Z_1 v_1|_{x=-L_1}, \quad p_2|_{x=L_2} = Z_2 v_2|_{x=L_2},$$
$$p_3|_{x=-L_3} = -Z_3 v_3|_{x=-L_3}, \quad (p_3 - p_2)|_{x=0} = Z_4 v_3|_{x=0}, \tag{27}$$

где Z_i — акустические импедансы соответствующих концов.

Если пренебречь направленным движением воздуха, то уравнения (20) принимают более простой вид:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 a_s^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{28}$$

Решение уравнений (28) для областей *1* и *2* и (21) для подводящей трубки *3* содержит шесть произвольных постоянных. Уравнения для этих постоянных следуют из граничных условий (24), (25) с учетом (26) и (27). При этом мы получаем систему шести линейных однородных уравнений, условие равенства нулю детерминанта которой дает характеристическое уравнение. В приближении малых значений импедансов и малого притока тепла оно имеет вид

$$\sin[\omega(\tau_1 + \tau_2)] + i\beta \frac{\omega\tau}{1 + i\omega\tau} \sin(\omega\tau_1) \cdot \sin(\omega\tau_2) \operatorname{ctg}(\omega\tau_3) -$$
$$- i \frac{Z_1 + Z_2}{\rho_0 a_s} \cos[\omega(\tau_1 + \tau_2)] = 0, \tag{29}$$

где $\tau_j = L_j/a_s$, $\tau = \gamma^{-1}$. Из уравнения (29) следует, что самовозбуждение колебаний должно происходить на частоте, близкой к одной из собственных частот трубы длины $L = L_1 + L_2$. Эти частоты равны $\omega_n = \pi n a/L$. Инкремент δ_n, соответствующий частоте ω_n, приблизительно равен

$$\delta_n \approx \frac{a_s}{L} \left(\frac{\beta\omega_n\tau}{1 + \omega_n^2\tau^2} \operatorname{ctg}(\omega_n\tau_3) \sin^2(\omega_n\tau_1) - \frac{r_1 + r_2}{\rho_0 a_s} \right), \tag{30}$$

где $r_{1,2}$ — действительные части импедансов $Z_{1,2}$. Из выражения (30) видно, что самовозбуждение колебаний не может происходить, если на конце подводящей трубки имеется узел скорости ($\cos(\omega_n\tau_3) = 0$) или если пламя находится в узле давления ($\sin(\omega_n\tau_1) = 0$). С другой стороны, если некоторые собственные частоты основной трубы и подводящей трубки близки, то для соответствующей частоты значение $\sin\omega_n\tau_3$ близко к нулю, т. е. имеет место резонанс. Это условие является оптимальным для генерации звука.

4. Явление Рийке

Явление Рийке, заключающееся в генерации звука длинной вертикально поставленной трубой с открытыми концами, в которую помещена раскаленная густая металлическая сетка (рис. 5), как и рас-

смотренные выше явления, известно еще с середины прошлого века [10]. О нем также сообщалось в трактате Рэлея [4], который дал ему качественное объяснение. Однако удовлетворительных количественных результатов до сих пор не получено. Указанное явление, как и «поющее» пламя, относится к категории термомеханических автоколебательных явлений.

Ниже мы дадим простейшую количественную теорию эффекта Рийке, которая частично заимствована из работ Б. В. Раушенбаха [см. 9]. Как показано в этих работах, для объяснения эффекта Рийке нужно учесть направленный поток воздуха в трубе, создаваемый нагретой сеткой (тяга) или сформированный искусственно.

Разделив трубу на области *1*, *2* и область σ, окружающую сетку, запишем для областей трубы *1* и *2* уравнения (29). Граничные условия на поверхности разрыва Σ имеют несколько более сложный вид, чем в рассмотренном выше случае, как из-за необходимости учитывать направленное движение воздуха в трубе, так и за счет наличия у сетки гидравлического сопротивления, характеризуемого коэффициентом ζ [11]. Эти условия следующие:

$$(p_2-p_1+\zeta\rho_0 u v_0+\rho_0 u(v_2-v_1)|_{x=0}=0, \tag{31}$$

$$\left(\frac{u}{a_\sigma^2}(p_2-p_1+\zeta\rho_0 u v_0)+\rho_0(v_2-v_1)\right)\Big|_{x=0}=\frac{\varkappa-1}{a_\sigma^2 S}\frac{dQ}{dt}, \tag{32}$$

где $v_0\approx(v_1+v_2)/2$ — значение скорости v при $x=0$. Предполагая, что теплоотдача происходит по закону Ньютона, для количества тепла Q запишем уравнение

$$\frac{dQ}{dt}=K(T_{\text{net}}-(T+T_0))-K_0(T_{\text{net}}-T_0), \tag{33}$$

где K — коэффициент теплоотдачи, K_0 — его стационарное значение, T_{net} — температура сетки, T — отклонение температуры воздуха от стационарного значения T_0. Учтем теперь, что сетка обдувается воздухом со скоростью $u+v_0$, и примем во внимание зависимость коэффициента теплоотдачи от скорости обдува. Учитывая, что $v_0\ll u$, можно положить

$$K=K_0+\frac{k(M)}{T_{\text{net}}-T_0}v_0, \tag{34}$$

где $k(M)$ — некоторый коэффициент, зависящий от числа Маха $M=u/a_\sigma$. Подставляя теперь (34) в (33) и учитывая, что $T=Q/mc$, где m — масса воздуха в области σ, получаем

$$\frac{dQ}{dt}+\gamma Q=k(M)v_0. \tag{35}$$

где $\gamma=K_0/mc$. Уравнение (35) совместно с (31) и (32) полностью определяет условия разрыва на поверхности Σ.

Граничные условия на концах трубы зададим в виде

$$p_1|_{x=-L_1}=-Z_1 v_1|_{x=-L_1},\quad p_2|_{x=L_2}=Z_2 v_2|_{x=L_2}. \tag{36}$$

Приближенное решение уравнений (20) с найденными выше условиями разрыва на поверхности Σ и граничными условиями (24) приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$\sin[\omega(\tau_1+\tau_2)]+i\frac{\beta(M)\omega\tau}{1+i\omega\tau}\sin[\omega(\tau_1-\tau_2)]-$$

$$-iM\zeta\cos(\omega\tau_1)\cos(\omega\tau_2)-i\frac{Z_1+Z_2}{\rho_0 a}\cos[\omega(\tau_1+\tau_2)]=0, \qquad (37)$$

где $\beta(M)=(\varkappa-1)k(M)/(2\rho_0 a_s^2 S)$, $\tau_j=L_j/a_s$ — время распространения звуковой волны в j-й части трубы, ω — комплексная частота, $\tau=1/\gamma$. Уравнение (37) получено в предположениях, что число Маха M, импедансы концов трубы и зависимость коэффициента теплоотдачи от скорости, характеризуемая коэффициентом $\beta(M)$, достаточно малы. В этих же предположениях уравнение (37) может быть приближенно решено. В результате получаем, что автоколебания могут возбуждаться на частотах, близких к собственным для трубы длины $L=L_1+L_2$. Эти частоты определяются из уравнения $\sin\omega_n(\tau_1+\tau_2)=0$, т. е. $\omega_n=\pi n a/L$. Полагая теперь в (37) $\omega=\omega_n-i\delta_n+\Omega_n$, где δ_n — инкремент, соответствующий n-й собственной частоте, Ω_n — малая поправка к этой частоте, для δ_n и Ω_n получаем следующие приближенные выражения:

$$\delta_n=\frac{a_s}{L}\left(\beta(M)\sin(2\omega_n\tau_1)\frac{\omega_n\tau}{1+\omega_n^2\tau^2}-\frac{r_1+r_2}{\rho_0 a}-M\zeta\cos^2(\omega_n\tau_1)\right), \qquad (38)$$

$$\Omega_n=-\frac{a_s}{L}\left(\beta(M)\sin(2\omega_n\tau_1)\frac{\omega_n^2\tau^2}{1+\omega_n^2\tau^2}+\frac{\mathrm{Im}(Z_1+Z_2)}{\rho_0 a}\right). \qquad (39)$$

Из (38) следует, что инкремент δ_n может быть положительным, только если $\sin(2\omega_n\tau_1)>0$ и превышает некоторое критическое значение. Отсюда следует, что в случае возбуждения основной моды, а именно она чаще всего и возбуждается, так как потери резко возрастают с ростом частоты, оптимальным будет расположение сетки в нижней части трубы на расстоянии $L/4$ от ее нижнего конца. Этот вывод согласуется с результатами экспериментов.

Из экспериментов также известно, что эффект Рийке наблюдается лишь в определенном диапазоне скоростей направленного движения воздуха, т. е. чисел Маха M. Это может быть объяснено тем, что коэффициент β вначале быстро растет с ростом M, а затем медленно убывает. Вместе с тем при увеличении M возрастают потери на преодоление гидравлического сопротивления сетки. Все это и приводит к тому, что условие возбуждения звука ($\delta_n>0$ для какого-нибудь значения n) может выполняться лишь в некотором диапазоне M.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ланда П. С., Руденко О. В.//Акуст. журн. 1989. **35**, № 5. С. 855. [2] Landa P. S., Rudenko O. V., Bakscis B. P.//Opt. Acoust. Rev. 1990—1991. 1, N 3. P. 277. [3] Ланда П. С.//Акуст. журн. 1992. **38**, № 4. С. 716. [4] Стретт Д. В. (Релей) Теория звука. Т. 1, 2. М., 1955. [5] Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М., 1952. [6] Бабицкий В. И., Ланда П. С.//ДАН СССР. 1982. **266**, № 5. С. 1087. [7] Неймарк Ю. И., Аронович Г. В.//ЖЭТФ. 1955. **28**, № 65. С. 567. [8] Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. М., 1978. [9] Раушенбах Б. В. Вибрационное горение. М., 1961. [10] Rijke P. L.//Ann. der Phys. 1859. **B107**. P. 339. [11] Идельчик Е. И. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М., 1975.