

- [6] Joulakian B., Dal Carrello C., Brauner M. // J. Phys. B. 1992. 25. P. 2863.  
 [7] Попов Ю. В., Dal Carrello C., Joulakian B., Kuzmina N. M. // J. Phys. B. 1994. 27. P. 1599.  
 [8] Попов Ю. В., Авалди Л., Камиллони Р., Стефани Дж. // ЖЭТФ. 1986. 90. С. 1191.

Поступила в редакцию  
26.01.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 1

## РАДИОФИЗИКА

УДК 537.86

### ОЦЕНОЧНО-КОРРЕЛЯЦИОННО-КОМПЕНСАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛА В ЭКСПЕРИМЕНТАХ С ПРОБНЫМИ ТЕЛАМИ

А. В. Гусев

(ГАИШ)

Определена пороговая чувствительность в экспериментах с пробными телами при конечном интервале наблюдения, когда коррелированная помеха на выходе электромеханического преобразователя представляет собой нестационарный двумерный нормальный марковский процесс.

1. Необходимость обнаружения слабых воздействий на пробный механический осциллятор возникает во многих фундаментальных физических экспериментах [1—3]. Амплитуда порогового сигнала в подобных экспериментах определяется следующей формулой:

$$F_0 \approx 2K\sigma[(1+\Gamma)/(\omega_0\tau Q)]^{1/2},$$

где  $K$ ,  $\omega_0$  и  $Q$  — жесткость, резонансная частота и добротность осциллятора;  $\sigma^2$  — дисперсия тепловых шумов;  $\tau$  — длительность внешнего воздействия;  $\Gamma$  — коэффициент шума [4] электромеханического преобразователя (ЭМП):

$$\Gamma = \frac{(S/N)_i}{(S/N)_o} - 1. \quad (1)$$

В (1)  $(S/N)_i$  и  $(S/N)_o$  — отношения сигнал/шум на входе и выходе ЭМП. При расчете коэффициента шума  $\Gamma$  широкополосного ЭМП с одиночным высокочастотным контуром на входе обычно ограничиваются простейшей ситуацией, когда интервал наблюдения неограничен, а результирующая помеха на выходе системы представляет собой стационарный процесс [2—4].

Цель данной работы — расчет коэффициента шума  $\Gamma_T$  широкополосного ЭМП с одиночным контуром на входе при конечном интервале наблюдения  $0 \leq t \leq T$ . Для решения поставленной задачи используется известный в теории [5, 6] оценочно-корреляционно-компенсационный алгоритм обнаружения детерминированного сигнала, принимаемого на фоне коррелированной и в общем случае нестационарной гауссовской помехи и нормального белого шума.

2. При обобщенном анализе чувствительности ЭМП целесообразно отнести такую систему к классу линейных четырехполосников с постоянными параметрами [7]; для ЭМП типа модулятор—демодулятор

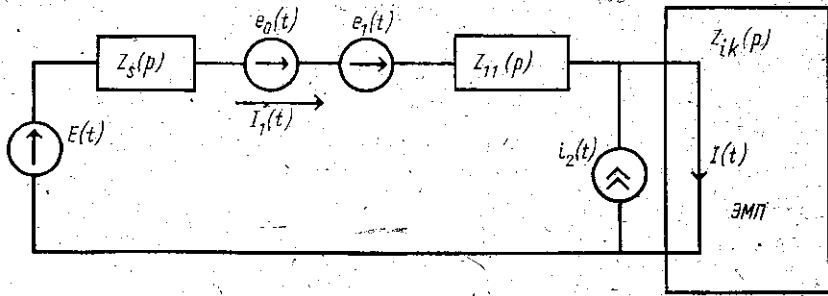


Рис. 1

в качестве подобного четырехполюсника используется низкочастотный эквивалент [8]. Структурная схема ЭМП как линейного шумящего четырехполюсника [4] приведена на рис. 1. В основе этой структурной схемы положена 1-я система электродинамических аналогий:

$$\begin{aligned} [Mp + H + K/p] px &= F, \\ [Lp + R + 1/(pC)] pq &= E, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $M$ ,  $H$  и  $K$  — масса, коэффициент трения и жесткость механического осциллятора;  $x$  и  $F$  — смещение и сила;  $L$ ,  $R$  и  $C$  — эквивалентные параметры контура;  $q$  и  $E$  — заряд и ЭДС;  $p = d/dt$ .

В соответствии с (2) на рис. 1  $Z_s(p) = Lp + R + (pC)^{-1}$  — импеданс входного контура;  $Z_{ik}(p)$  — характеристические  $z$ -параметры ЭМП;  $E(t)$  — полезный сигнал. Характерная особенность экспериментов с пробными телами состоит в том, что длительность  $\hat{\tau}$  полезного сигнала оказывается много меньше, чем характерная постоянная системы  $\tau$ ,  $\hat{\tau} \ll \tau^*$ . Поэтому удобной аппроксимацией реального сигнала оказывается модель  $\sigma$ -импульса

$$E(t) = (E_0 \hat{\tau}) \delta_+(t), \quad (3)$$

где  $E_0$  — амплитуда «толчка».

Источники шумов в системе следующие: 1)  $e_0(t)$  — тепловые шумы со спектральной плотностью  $N_0 = 2\Theta \operatorname{Re} Z_s(j\omega) = 2\Theta R$ ,  $\Theta$  — энергетическая температура термостата; 2)  $e_1(t)$  и  $i_2(t) = pq_2(t)$  — ланжевеновские источники флуктуаций ЭМП как линейного четырехполюсника с постоянными параметрами [8]

$$\begin{aligned} M_1 e_1(t) e_1(\tau) &= N_1 \delta(t - \tau), \quad M_1 q_2(t) q_2(\tau) = N_2 \delta(t - \tau), \\ M_2 e_1(t) q_2(\tau) &= N_{12} \delta(t - \tau), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $M_1$  — статистический оператор (в дальнейшем с целью упрощения, не нарушая общности [9], будем предполагать, что  $N_{12} = 0$ ).

Уравнения движения для рассматриваемой системы (см. рис. 1) следующие:

$$\begin{aligned} Z_0(p) p Q_1(t) &= \lambda E(t) + \kappa(t), \quad \kappa(t) = e_0(t) + e_1(t), \\ p[Q_1(t) + q_2(t) - Q(t)] &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $Z_0(p) = Z_s(p) + Z_{11}(p)$ ;  $Q_1(t) = p^{-1} I_1(t)$ ;  $Q(t) = p^{-1} I(t)$ ,  $\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Как и в [5], ограничимся одночастотным приближением, для которого

$$Z_0(p) = L_0 p + R_0 + 1/(pC_0) = L_0(p + 2\gamma_0 + \omega_0^2/p),$$

где  $L_0$ ,  $R_0$  и  $C_0$  — эквивалентные параметры.

Будем искать решение  $Q(t)$  в форме узкополосного колебания:

$$Q(t) = A(t) \sin \omega_0 t + B(t) \cos \omega_0 t.$$

Стандартная методика осреднения исходных уравнений (5) дает  $A(t) = a(t) + \alpha(t)$ ,  $B(t) = b(t) + \beta(t)$ . (6)

В соотношениях (6)  $a(t)$  и  $b(t)$  — решения следующих стохастических уравнений:

$$\rho a(t) = -\gamma_0 a(t) + \varepsilon^{-1} [\lambda E(t) + \kappa_a(t)], \quad a(0) = a_0, \quad (7)$$

$$\rho b(t) = -\gamma_0 b(t) - \varepsilon^{-1} \kappa_b(t), \quad b(0) = b_0,$$

$$E(t) = 2M_t E(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \hat{E}_\omega = 2(E_0 \hat{\tau}), \quad |\omega| \ll \omega_0,$$

$$\begin{pmatrix} \kappa_a \\ \kappa_b \end{pmatrix} = 2M_t \kappa(t) \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 2M_t q_2(t) \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $M_t$  — временной оператор осреднения по периоду  $2\pi/\omega_0$ ;  $\varepsilon = (2L_0\omega_0)$  — характерный параметр.

Функции корреляции стационарных шумов (8) определяются следующими формулами (см. (4)):

$$M_1 \kappa_a(t) \kappa_a(\tau) = M_1 \kappa_b(t) \kappa_b(\tau) = 2(N_0 + N_1) \delta(t - \tau),$$

$$M_1 \alpha(t) \alpha(\tau) = 2N_2 \delta(t - \tau); \quad M_1 \kappa_a(t) \kappa_b(\tau) = 0; \quad M_1 \alpha(t) \beta(\tau) = 0, \quad (9)$$

$$M_1 \kappa_{a,b}(t) \alpha(\tau) = M_1 \kappa_{a,b}(t) \beta(\tau) = 0.$$

Принимая во внимание (7), наблюдаемый процесс  $A(t)$  (6) представим в виде линейной суперпозиции детерминированного сигнала  $\lambda S_a(t)$ , коррелированной помехи  $\eta_a(t)$  и белого шума  $\alpha(t)$ :

$$A(t) = \lambda S_a(t) + \eta_a(t) + \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10)$$

Входящая в (10) коррелированная помеха  $\eta_a(t)$  определяется уравнением состояния

$$\rho \eta_a(t) = -\gamma_0 \eta_a(t) + \varepsilon^{-1} \kappa_a(t), \quad \eta_a(0) = a_0, \quad (11)$$

а полезный сигнал  $S(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\rho S(t) = -\gamma_0 S(t) + \varepsilon^{-1} E(t), \quad S(0) = 0. \quad (12)$$

Будем предполагать, что  $a_0$  — нормальная случайная величина с известными параметрами распределения

$$M_1 a_0 = \bar{a}_0, \quad D_0 = M_1 a_0^2 - M_1^2 a_0. \quad (13)$$

3. Пусть  $\gamma_0 > 0$ . Тогда при неограниченном интервале наблюдения  $-\infty < t < \infty$  коррелированную помеху можно рассматривать как стационарный случайный процесс со спектральной плотностью

$$N_\eta(\omega) = 2\varepsilon^{-2} (N_0 + N_1) (\omega^2 + \gamma_0^2)^{-1}.$$

Отношение сигнал/шум  $(S/N)_{0,\infty}$  на выходе согласованного физически нереализуемого фильтра определяется формулой [7, 9]

$$(S/N)_{0,\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{|S_\omega|^2 d\omega}{N_2 + N_\eta(\omega)} = \frac{(E_0 \hat{\tau})^2}{N_2 \varepsilon^2 \Delta}, \quad (14)$$

где  $S_\omega \leftrightarrow S(t)$ ;  $\Delta = (\gamma_0^2 + \Omega^2)^{1/2}$ ,  $\Omega^2 = (N_0 + N_1)/(\varepsilon^2 N_2)$ .

Формула (14) является основной при расчете чувствительности в экспериментах с пробными телами [2, 5]. При конечной длительности интервала наблюдения  $0 < t < T$ ,  $T \ll \tau$  (напомним, что  $\tau$  — время релаксации механической системы) коррелированную помеху  $\eta_a$  необходимо рассматривать как нестационарный процесс. Для обнаружения полезного сигнала в этой ситуации воспользуемся известным в теории [6, 7] оценочно-корреляционно-компенсационным алгоритмом. Структурная схема оптимального устройства, реализующего этот алгоритм, представлена на рис. 2. Оптимальное устройство формирует оценку  $\hat{\eta}_a(t)$

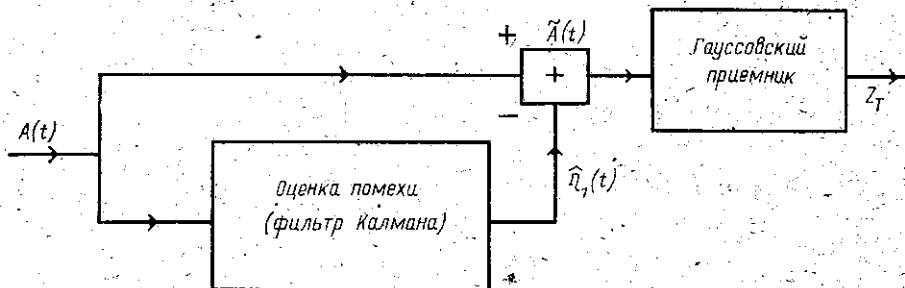


Рис. 2

коррелированной помехи  $\eta_a(t)$ , которая затем поступает на вход сумматора. На второй вход сумматора поступает наблюдаемый процесс  $A(t)$ . Гауссовский приемник формирует переменную

$$z_T = \frac{1}{2N_2} \int_0^T \tilde{S}(t) \tilde{A}(t) dt, \quad (15)$$

где  $\tilde{A}(t) = A(t) - \hat{\eta}_1(t)$ ;  $\tilde{S}(t) = M_1 \tilde{A}(t)$ .

Отношение сигнал/шум на выходе корреляционного приемника (15) определяется следующей формулой:

$$(S/N)_{0,T} = \frac{1}{2N_2} \int_0^T [\tilde{S}(t)]^2 dt. \quad (16)$$

Преобразованный сигнал  $\tilde{S}(t)$  найдем, учитывая, что при гауссовской помехе  $\eta_1(t)$  блок формирования оценки  $\hat{\eta}_1(t)$  представляет собой одномерный фильтр Калмана [6, 7, 9]:

$$\begin{aligned} p \hat{\eta}_1(t) &= -\gamma_0 \hat{\eta}_1(t) + k(t) [A(t) - \hat{\eta}_1(t)], \quad \hat{\eta}_1(0) = a_0, \\ pk(t) &= -k^2(t) - 2\gamma_0 k(t) + \Omega^2, \quad k(0) = D_0/N_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (12) и (17), принимая во внимание, что  $\tilde{S}(t) = S(t) - M_1 \hat{\eta}_1(t)$ , получим

$$[p + u(t)] \tilde{S}(t) = \epsilon^{-1} E(t) \tilde{S}(t) = 0, \quad (18)$$

где  $u(t) = \gamma_0 + k(t)$ .

Можно показать, что переменный коэффициент усиления  $u(t)$  удовлетворяет уравнению Риккати, не содержащему, в отличие от (17), линейного члена [10]

$$pu(t) = -u^2(t) + \Delta^2,$$

где  $\Delta^2$  определяется формулой (14).

Стандартная подстановка  $u(t) = pv(t)/v(t)$  приводит к следующему линейному дифференциальному уравнению второго порядка [10]:

$$(p^2 - \Delta^2) v(t) = 0,$$

решение которого можно представить в виде

$$v(t) = \text{ch } \Delta t + P_0 \text{sh } \Delta t, \quad v(t) > 0. \quad (19)$$

Здесь

$$P_0 = \Delta^{-1} [\gamma_0 + k(t)] = (\gamma_0^2 + \Omega^2)^{-1/2} [\gamma_0 + (D_0/N_2)]. \quad (20)$$

Тогда из (18) и (19) находим преобразованный сигнал  $\tilde{S}(t)$  в явном виде:

$$\tilde{S}(t) = [\epsilon v(t)]^{-1} \int_0^t E(\tau) v(\tau) d\tau = [\epsilon v(t)]^{-1} (2E_0 \tau) V_+(t), \quad (21)$$

где  $V_+(t)$  — единичная функция:

$$V_+(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Подстановка (21) в (16) позволяет определить отношение сигнал/шум  $(S/N)_{0,T}$  при конечной длительности интервала наблюдения  $0 < t < T$ :

$$(S/N)_{0,T} = (S/N)_{0,\infty} \Psi(\Delta T), \quad (22)$$

где  $(S/N)_{0,\infty}$  — отношение сигнал/шум при неограниченном интервале наблюдения  $-\infty < t < \infty$  (14), а функция  $\Psi(x)$  определяется следующим соотношением:

$$\Psi(x, P_0) = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x + P_0 \text{sh } x}. \quad (23)$$

Из (22) и определения коэффициента шума  $\Gamma$  (1) следует, что коэффициент шума широкополосного ЭМП с одиночным контуром на входе при конечной длительности интервала наблюдения равен

$$\Gamma_T = \Gamma_\infty \Psi^{-1}(\Delta T, P_0),$$

где  $\Gamma_\infty$  — коэффициент шума ЭМП при неограниченном интервале наблюдения [5].

Отметим, что при  $\Delta T \gg 1$   $\Psi(\Delta T, P_0) \approx (1 + P_0)^{-1}$  и зависимость чувствительности от начальной дисперсии  $D_0$  (см. (20)) сохраняется. Это принципиальное отличие формулы (22) от (14), которая соответствует физически не реализуемому согласованному фильтру и определяет при  $\gamma_0 > 0$  верхнюю границу отношения сигнал/шум на выходе системы.

4. Формулу (22) можно использовать и для расчета отношения сигнал/шум при параметрически регенерированном контуре. Подобная задача возникает, например, в теории крацовых невозмущающих измерений [2]. В синхронном режиме, когда частота накачки  $W_p = 2\omega_0$ , эквивалентное затухание контура определяется формулой [11]

$$\gamma_m = \gamma_0 - m\omega_0/4,$$

где  $m$  — глубина модуляции реактивного параметра,  $0 < m \ll 1$ .

При  $m > m_0 = 2/Q$  ( $Q$  — добротность контура)  $\gamma_m \leq 0$  и коррелированная помеха  $\eta_1(t)$  представляет собой нестационарный процесс для любой длительности интервала наблюдения  $T$ . Оценочно-корреляцион-

но-компенсационный алгоритм обнаружения детерминированного сигнала, структурная схема которого приведена на рис. 2, позволяет рассчитать отношение сигнал/шум на выходе гауссовского приемника (15), и для этой ситуации

$$(S/N)_{0,T|Y_m < 0} = \frac{(E_0 \hat{\tau})^2}{N_2 e^2 \Delta_m} \Psi(\Delta_m T, P_m),$$

где  $\Delta_m = (\gamma_m^2 + \Omega^2)^{1/2}$ ;  $P_m = \Delta_m^{-1} [\gamma_m + (D_0/N_2)]$ .

Предполагая, что начальное состояние системы точно известно,  $D_0 = 0$ , и  $\Delta_m T \gg 1$ , имеем

$$(S/N)_{0,T|Y_m < 0} \cong \frac{(E_0 \hat{\tau})^2}{N_2 e^2 (\Delta_m - |\gamma_m|)}.$$

5. Оценочно-корреляционно-компенсационный алгоритм обнаружения можно использовать и при коррелированных ланжевенских источниках шумов ЭМП  $e_1(t)$  и  $q_2(t)$ , когда  $M_1[e_1(t)q_2(\tau)] = N_{12}\delta(t-\tau)$ , путем введения соответствующих изменений коэффициентов системы уравнений Калмана [9].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Брагинский В. Б., Митрофанов В. П., Панов В. И. Системы с малой диссипацией. М., 1981.
- [2] Воронцов Ю. И. Теория и методы макроскопических измерений. М., 1989.
- [3] Бичак И., Руденко В. Н. Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. М., 1989.
- [4] Айнбиндер И. М. Шумы радиоприемников. М., 1974.
- [5] Гусев А. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. 35, № 1. С. 52.
- [6] Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М., 1978.
- [7] Сосулин Ю. Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1992.
- [8] Айнбиндер И. М. Входные каскады радиоприемников. М., 1972.
- [9] Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. М., 1977. Т. 1.
- [10] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976.
- [11] Гершензон И. М., Эткин Е. С. Системы на параметрических диодах. М., 1964.

Поступила в редакцию  
08.02.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 1

УДК 533.92

#### О ПРИРОДЕ КЕРНА В КАПИЛЛЯРНОМ ЭРОЗИОННОМ РАЗРЯДЕ, ИСТЕКАЮЩЕМ В АТМОСФЕРУ

А. П. Ершов, И. Б. Тимофеев, В. М. Шибков, С. Н. Чувашев

(кафедра физической электроники)

Предложено объяснение существования высокой (превышающей равновесную в модели ЛТР) концентрации электронов в приосевой области эрозионной плазменной струи капиллярного типа, инжектируемой импульсным плазмотроном в атмосферу. В его основе лежит предположение о наличии дисперсных частиц углерода, термoeлектронная эмиссия с поверхности которых обеспечивает наблюдаемые значения  $\lambda_e$ . Проведены эксперименты, свидетельствующие в пользу предложенного механизма.