Если величина внешнего поля такова, что в (8) и (12) можно соответственно считать $\chi \gg \widetilde{m}^2$ и $\chi \gg \widetilde{m}, \widetilde{m}^{-1}$, то вклад внешнего поля в рассматриваемых процессах будет в любом случае доминирующим и вероятности будут оцениваться значением

$$w_\perp (\nu_2 \to \nu_1 \gamma\gamma) \simeq \frac{1}{2} w_\perp (\gamma \to \nu_1 \bar{\nu}_2 \gamma) \simeq$$

$$\simeq \frac{C^2 + \widetilde{C}^2}{60\,(2\pi)^3 p_0} (pF^2p)^2 \,(\mu_1^4 + 6\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_2^4),$$

где p — импульс начальной частицы. Можно убедиться, что в асимптотике $\chi \gg \widetilde{m}^2$ отношение вероятностей двухфотонного и однофотонного распадов массивного нейтрино будет пропорционально фактору $(\chi/\widetilde{m}^2)^2 \gg 1$. При $E \sim m_e$, $F \sim B_0$ (т. е. на пределе применимости контактного приближения) $\chi/\widetilde{m}^2 \sim (\mu_\nu/\mu_B)\,(m_e/m_\nu)^2$, так что эта ситуация реализуется, например, при $\mu_\nu \sim 10^{-10}\,\mu_B$, $m_\nu \leqslant 1$ эВ, поскольку $(\chi/\widetilde{m}^2) \geqslant 10^2$. Данный результат усиливает аргументацию [13] о возможности доминирования двухфотонной моды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скобелев В. В.//ЖЭТФ. 1976. **71**. С. 1263.
2. Скобелев В. В.//ЖЭТФ. 1977. **73**. С. 1301; Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В.//ТМФ. 1987. **70**. С. 303.
3. Fujikawa K., Shrock R. E.//Phys. Rev. Lett. 1980. **45**. P. 961.
4. Скобелев В. В.//ЖЭТФ. 1991. **100**. С. 75; Ядерная физика. 1991. **54**. С. 162.
5. Lee B. W., Shrock R. E.//Phys. Rev. 1977. **D16**. P. 1444.
6. Marciano W. J., Sanda A. J.//Phys. Lett. 1977. **B67**. P. 303.
7. Pal P., Wolfenstein L.//Phys. Rev. 1982. **D25**. P. 766.
8. Shrock R.//Nucl. Phys. 1982. **B206**. P. 359.
9. Glashow S. L., Iliopoulos J., Maiani L.//Phys. Rev. 1970. **D2**. P. 1285.
10. Gell-Mann M.//Phys. Rev. Lett. 1961. **6**. P. 70.
11. Ghosh R. K.//Phys. Rev. 1984. **D29**. P. 493.
12. Nieves J. F.//Phys. Rev. 1983. **D28**. P. 1664.
13. Liu J.//Phys. Rev. 1991. **D44**. P. 2879.
14. Скобелев В. В.//ЖЭТФ. 1992. **101**. С. 1724.
15. Скобелев В. В.//Изв. вузов, Физика. 1992. № 7. С. 125.
16. Скобелев В. В.//ЖЭТФ. 1987. **93**. С. 1168.
17. Kyuldjiev A. V.//Nucl. Phys. 1984. **B243**. P. 387.
18. Bilenky S. M., Petcov S. T.//Rev. Mod. Phys. 1987. **59**. P. 671.
19. Скобелев В. В., Никитина Н. С.//Изв. вузов, Физика. 1990. № 3. С. 20.

Поступила в редакцию
26.05.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 2

УДК 530.145.6

КУЛОНОВСКИЕ ОДНОМЕРНЫЕ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

В. Б. Гостев, И. В. Гостев, А. Р. Френкин

(кафедра теоретической физики)

Для разрывных одномерных потенциалов с кулоновскими особенностями, встречающихся в реальных физических задачах, найдены точные решения одномерного уравнения Шрёдингера.

Для разрывных одномерных потенциалов с кулоновскими особенностями, встречающихся в реальных физических задачах, найдены точные решения одномерного уравнения Шрёдингера (УШ).

В статье [1] мы на основе физических подходов указали правила выбора четных решений УШ и «перехода» волновых функций через особенность одномерного ($\infty < x < \infty$) потенциала с особенностью

$$W = \lambda |x|^{-\nu}, \ 0 < \nu \leqslant 2. \tag{1}$$

Технически эти правила заключаются в том, что локально-четные компоненты волновых функций продолжаются через особенность «четно», а локально-нечетные — «нечетно».

В кулоновском случае ($\nu=1$ (1)) граничные условия для локально-четной, «нормированной» волновой функции $\psi_e(x)$ приведены нами ранее [2] ($h=2m=1$):

$$\lim_{x\to+0} (\psi_e'(x) - \lambda \ln |\lambda| x) = 2\lambda\gamma, \ \psi_e(0) = 1, \tag{2}$$

где $\gamma=0{,}5772...$ — постоянная Эйлера. Здесь вид условия навязан кулоновской особенностью, а постоянная 2γ выбрана нами из физических требований [1]. В случае чисто кулоновского потенциала

$$V = W = \lambda |x|^{-1} \tag{3}$$

решения УШ автомодельны [1] (волновые функции зависят от безразмерной величины $|\lambda| x$), поэтому приведем их для $\lambda = \pm 1$.

В случае притяжения ($\lambda=-1$) нечетная функция $\psi_-(x)$ ($\psi_-(0) = 0$, «нормировка» $\psi_e'(0)=1$) имеет вид ($x>0$)

$$\psi_-(x) = x \exp\left(-\frac{x}{2q}\right) M\left(1-q, 2, \frac{x}{q}\right), \tag{4}$$

где $E=-1/(4q^2)<0$, $q>0$, $M(\alpha, \beta, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, регулярная при $x=0$ [3]. Нечетные уровни совпадают с радиальными кулоновскими уровнями $l=0$:

$$E_{n-} = E(q_{n-}) = -\frac{1}{4q_{n-}^2}, \ q_{-n} = n+1, \ n=0, \ 1, \ 2, \ \ldots \tag{5}$$

Четная функция (2) имеет вид ($x>0$, $E<0$)

$$\psi_e(x) = \tilde{\psi}(x) - g(q)\psi_-(x), \tag{6}$$

$$\tilde{\psi}(x) = x \exp\left(-\frac{x}{2q}\right) U\left(1-q, 2, \frac{x}{q}\right) \Gamma(1-q) q^{-1} \tag{7}$$

— убывающее при $x \to +\infty$ решение УШ, «нормированное» условием $\tilde{\psi}(0)=1$; $U(\alpha, \beta, z)$ — регулярная при $z=+\infty$ вырожденная гипергеометрическая функция [3],

$$g(q) = \ln q - \frac{1}{2q} - \psi(q) - \pi \operatorname{ctg} \pi q, \tag{8}$$

где $\psi(\alpha)$ — логарифмическая производная гамма-функции [3]. Условие $g(q_{n+})=0$, $q_{(n+1)+} > q_{n+}$, $n=0, \ 1, \ 2, \ldots$, дает уровни, чередующиеся с нечетными [2] ($E_{n+} = -1/(4q_{n+}^2)$; $-\infty < E_{0+} < E_{0-}$, $E_{(n-1)-} < E_{n+} < E_{n-}$ при $n=1, \ 2, \ldots$).

В случае отталкивания ($\lambda=+1$) приведем «нормированное» убывающее на бесконечности решение УШ ($x>0$, $E=-1/(4q^2)<0$)

$$\widetilde{\psi}(x)=q^{-1}\,\Gamma(1+q)\,x\exp\left(-\frac{x}{2q}\right)U\left(1+q,\,2,\,\frac{x}{q}\right),\ \widetilde{\psi}(0)=1. \tag{9}$$

Оно дает единственный дискретный четный уровень $E=0$, определяемый из трансцендентного уравнения

$$f(q)=\psi(q)+\frac{1}{2q}-\ln q=0, \tag{10}$$

получающегося из условия (2), волновая функция которого (ненормированная) при $x>0$ есть

$$\psi_0(x)=x^{1/2}K_1(2x^{1/2}),\ \psi_0(x)\sim\exp(-2x^{1/2}),\ x\to\infty, \tag{11}$$

где $K_\alpha(z)$ — модифицированная цилиндрическая функция [3].

Четное решение имеет вид ($x>0$, $E<0$).

$$\psi_e(x)=\widetilde{\psi}(x)-f(q)\,x\exp\left(-\frac{x}{2q}\right)M\left(1+q,\,2,\,\frac{x}{q}\right). \tag{12}$$

Правила перехода дают возможность вычислить и автомодельный по форме коэффициент прохождения $T(t)$ через барьер (яму) (3) ([4] с исправлением):

$$\begin{gathered}T(t)=\frac{C(t)}{C(t)+t^2\mu^2(t)},\\ t=|\lambda|k^{-1},\ E=k^2,\ k>0,\\ C(t)=[\pi t(\exp(\pi t)-1)]^2,\\ \mu(t)=-\gamma+\ln 2-\ln|t|+\sum_{j=1}^{\infty}[(1+4t^{-2}j^2)\,j]^{-1}.\end{gathered} \tag{13}$$

Рассмотрим теперь задачу о нахождении уровней энергии и волновых функций для разрывного потенциала вида

$$V=\begin{cases}\pm x^{-1}, & x>0,\\ \lambda\,|x|^{-1}, & x<0.\end{cases} \tag{14}$$

Константу связи потенциала при $x>0$ всегда можно отнормировать на единицу. Потенциал [14] (знак минус) возникает как потенциал взаимодействия точечного заряда с изображением вблизи границы двух диэлектриков (ε_1, $x>0$; ε_2, $x<0$) [5].

Согласно правилам продолжения волновых функций [1] уровни энергии в случае разрыва потенциала ($x=0$) находятся из трансцендентного уравнения

$$C_1(E)+C_2(E)=0, \tag{15}$$

где $C_1(E)$, $C_2(E)$ — коэффициенты при нечетной составляющей у убывающих функций (7), (9) ($x>0$). С учетом автомодельности кулоновских волновых функций (зависимость от $|\lambda|x$) уравнения для определения уровней энергии согласно правилу (15) имеют вид

$$g(q)+|\lambda|\,g(|\lambda|\,q)=0,\ \lambda<0, \tag{16}$$

$$g(q)+\lambda f(\lambda q)=0;\ \lambda>0. \tag{17}$$

Корни этих уравнений q_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, в порядке возрастания дают возрастающие уровни энергии E_n (5).

В предельном случае ($\lambda \to 0$), соответствующем движению заряда вблизи металлической плоскости ($V=0$, $x<0$) [5], уровни можно найти либо сделав в (16), (17) предельный переход

$$\left(\lim_{\lambda\to+0} \lambda f(\lambda q) = -\frac{1}{2q},\ \lim_{\lambda\to+0} \lambda g(\lambda q) = -\frac{1}{2q}\right),$$

либо решая задачу для потенциала (14) с $\lambda=0$. Характеристическое уравнение для определения поверхностных уровней (5) имеет вид

$$g(q_n) - \frac{1}{2q_n} = 0. \tag{18}$$

Если граница проводника — двойной слой, то потенциал на границе ненулевой [5] и потенциальная энергия взаимодействия заряда $V=A$, $x<0$. Уравнение (18) видоизменяется:

$$g(q) = \left(\frac{1}{4q^2} + A\right)^{1/2}, \tag{19}$$

$q>0$ при $A>0$; $0<q<\sqrt{-A}/2$ при $A<0$.

Волновые функции связанных состояний (с точностью до нормировки) при $x>0$ имеют вид (7); при $x<0$, $\lambda<0$ — вид (7), $\lambda>0$ — (9) с заменой аргумента $x\to|\lambda x|$; во всех формулах $q=q_n$ ((16), (17)). В случае $\lambda=0$ (см. (19)) при $x<0$

$$\psi = \exp\left[-|x|\left(\frac{1}{4q_n^2} + A\right)^{1/2}\right]. \tag{20}$$

Известные свойства функций (8), (10) [2] позволяют проанализировать поведение уровней E_n ($A=0$ (18)). В случае (17) гиперболическое поведение функции $f(q)$ (10) ($f(q)\to 1/(2q)$, $q\to+0$) и «котангенциальное» — функции $g(q)$ (8) ($dg/dq>0$, $q\neq 0, 1, 2, \ldots, g(q)$ имеет простые полюсы) приводят к следующим результатам:

$$E_{n+} < E_n < E_{n-1};\ \frac{dE_n}{d\lambda} < 0;\ \lim_{\lambda\to+0} E_n = E_{n+};\ \lim_{\lambda\to+0} E_n = E_{n0},$$

$$E_{n+} - E_{(n+1)+} > E_n - E_{n+} > 0, \tag{21}$$

где E_{n0} — уровни, определяемые из уравнения (19) по формуле (5). «Парадоксальное» ($dE_n/d\lambda<0$) поведение уровней E_n связано с отталкивательной частью ($\lambda \ln|\lambda x|\delta(x)$) локального потенциала, индуцированного сингулярным потенциалом (14) [1, 2]:

$$V_\delta = [\lambda(\ln|\lambda x| + 2\gamma) - \ln|x| - 2\gamma]\,\delta(x). \tag{22}$$

Волновые функции связанных состояний конечны при $x=0$, но производные их расходятся: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\psi'(x)}{\psi(0)} = \pm\infty$, в случае $\lambda=0$ (см. (19))

$$\lim_{x\to+0} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = +\infty,\ \frac{\psi'(0)}{\psi(0)} = B > 0.$$

В случае двойного поверхностного слоя ((19), (20)) уровни по-прежнему ограничены неравенством (21). Поведение их по отношению к параметру A «нормальное» ($dE_n/dA>0$). При сильном запирании ($A\to+\infty$) они переходят в нечетные (см. (5)) ($\lim\limits_{A\to+\infty} E_n = E_{n-}$). При $A<0$ верхние уровни ($A<E<0$) не существуют, число уровней конечно, так как «отрезается» кулоновский «хвост» при $x>x_0$ ($1/x_0=|A|$).

В случае двустороннего притяжения ((14), знак «минус», $\lambda<0$), имеющем академический характер, качественное рассмотрение уравнения (16) несколько сложнее, чем уравнения (17). Корни уравнения (16) находятся как точки пересечения двух противоположно направленных гребенок «котангенсоид» $(g(q)\to -\pi \operatorname{ctg} \pi q - 1/(12q^2),\ q\gg 1)$. Следует отметить только, что в каждом отрезке $np<q<(n+1)p$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $p=\min(1, r)$, $r=|\lambda|^{-1}$, лежит от одного до двух корней уравнения (17).

Волновые функции связанных состояний имеют (с точностью до нормировки) вид (7) при $x>0$ и такой же вид при $x<0$, но с заменой аргумента $x\to|\lambda x|$. При $x=0$ волновые функции имеют резкий минимум $\lim\limits_{r\to\pm 0} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=\pm\infty$.

В случае, когда отрезок r рационален ($r=l/m$ — несократимая дробь), полюсы функций (16) при $q=l$, $l=1, 2, \ldots$, совпадают, и при энергиях $E=-1/(4q_l^2)$ имеются квазинечетные связанные состояния с волновыми функциями нечетных состояний одномерного атома водорода [2]. Волновые функции этих состояний с точностью до нормировки имеют вид (4) при $x>0$ и вид (4) с заменой аргумента $x\to|\lambda x|$ при $x<0$. При $x=0$ эти функции имеют «нечетное» поведение ($\psi(0)=0$, $\psi'(x)$ при $x\to 0$ конечна и непрерывна). Потенциал (22) на эти состояния не действует ($<\psi_{l_1} V_\delta \psi_{l_2}>=0$).

Наконец, при двустороннем отталкивании (знак «плюс» и $\lambda>0$ у потенциала (14)) при нашем выборе четных состояний одномерного атома водорода [1, 2] имеется только одно нормируемое «связанное» состояние при $E=0$ с волновой функцией (11), $x>0$. При $x<0$ аргумент функции (11) заменяется на $|\lambda x|$. Появление этого уровня связано с притягивающей частью сингулярного потенциала (22) (в двух последних слагаемых надо изменить знак). Волновая функция этого состояния имеет при $x=0$ резкий максимум $\left(\lim\limits_{x\to\pm 0} \frac{\psi'(x)}{\psi(0)}=\mp\infty\right)$, обусловленный сингулярным потенциалом (22).

Найденные новые одномерные кулоновские решения УШ представляют практический интерес («размер» одномерного связанного состояния имеет порядок боровского радиуса, который в случае границы двух диэлектриков может намного превосходить боровский радиус в пустоте, так как эффективный заряд $Q=\frac{e}{2}\,\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_{1,2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}<e$ [5], где e — заряд электрона) и служат основой для решения других проблем, например задачи о движении электрона в щели между проводниками, которая будет рассмотрена в отдельной публикации.

Авторы благодарны А. В. Борисову и В. Ч. Жуковскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гостев В. Б., Гостев И. В., Френкин А. Р.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. **35**, № 2. С. 27.

2. Гостев В. Б., Перес-Фернандес В. К., Френкин А. Р., Чижов Г. А.//Изв. вузов. Физика. 1990. № 5. С. 104.

3. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. А. Абрамовица и И. Стиган. М., 1979.

4. Гостев В. Б., Френкин А. Р.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1987. **28**, № 5. С. 77.

5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1993.

Поступила в редакцию
06.06.94