напряжений, соотношения нормальных и тангенциальных составляющих на поверхности разрыва, а также от размера и формы разрыва.

2. Направление активизации и развития разломов может быть определено по величине сброшенного напряжения в процессе предшествующего события.

3. Описанная методика позволяет рассчитать изменение направления вспарывания в очагах землетрясений типа чистого взброса или чистого сдвига и предсказать возможное развитие сейсмического процесса в пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Райс Дж. Механика очага землетрясения. М., 1982.
2. Житников Ю. В., Тулинов Б. М.//Изв. АН СССР, Механика тв. тела. 1984. № 5. С. 44.
3. Гольдштейн Р. В., Житников Ю. В.//Пластичность и разрушение твердых тел. М., 1988. С. 57.
4. Гольдштейн Р. В., Капцов А. В.//Изв. АН СССР. Механика тв. тела. 1982. № 4. С. 173.
5. Житников Ю. В., Тулинов Б. М.//Там же. С. 168.
6. Eberhart-Phillips D.//J. Geophys. Res. 1989. 94. P. 15.565.
7. Michael A. J.//J. Geophys. Res. 1987. 92. P. 7963.

Поступила в редакцию
21.03.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 2

УДК 551.466

НОВОЕ ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЛИННЫХ ВОЛН НА ВОДЕ

С. А. Арсеньев, М. М. Вахрушев, Н. К. Шелковников

(кафедра физики моря и вод суши)

Получено эволюционное уравнение, обобщающее уравнение Кортевега—де Фриза на случай учета высших приближений по параметрам амплитудной и фазовой дисперсии. Новое уравнение более точно описывает высокочастотное крыло спектра длинных волн на воде.

В последнее время в физических исследованиях интенсивно изучаются различные модификации уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ). Чаще всего они содержат высшие производные относительно неизвестной величины. Например, в [1] для описания неустойчивых дрейфовых волн в плазме предложено уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, \tag{1}$$

которое при $\alpha=0$ и $\gamma=0$ превращается в обычное КдФ, а при $\beta=0$ может описывать и химические реакции с турбулентным перемешиванием [2, 3]. Здесь же, в [1], приведены результаты решения уравнения (1) при всех положительных коэффициентах в левой части. В работах [4, 5] уравнение типа (1), но с отрицательными коэффициентами α и γ получено при изучении сейсмических волн. В [6, 7] изучались решения КдФ с пятой производной, описывающие электромагнитные и сейсмические волны:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\delta\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}=0, \tag{2}$$

а в работах [8, 9] — сейсмические волны и с шестой производной. Поскольку уравнение КдФ впервые получено в теории длинных волн на воде [10], представляется важным вывести его обобщения типа (1), (2) именно из этой теории. Физический смысл получающихся коэффициентов становится прозрачным, а теоретические решения допускают сравнительно несложную экспериментальную проверку в лабораторных каналах [11].

Будем исходить из нелинейных уравнений теории длинных гравитационных волн на воде [12]:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < z < s + \alpha\eta, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \\ &\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 = 0, \end{aligned}\right\} z = 1 + \alpha\eta, \tag{4}$$

$$\partial \Phi / \partial z = 0, \quad z = 0, \tag{5}$$

в которых $x = x'/\lambda$, $z = z'/H$, $t = t'c_0/\lambda$, $\eta = \eta'/a$, $\Phi = c_0 \Phi'/g\lambda a$ — безразмерные переменные, Φ' и $c_0 = \sqrt{gH}$ — потенциал скорости и лагранжева скорость длинных волн. Ось z' направлена вертикально вверх, начало координат лежит на дне, возмущение поверхности воды η отсчитывается вверх от уровня спокойной воды: $z' = H$, $\beta = H^2/\lambda^2$, $\alpha = a/H$, λ — длина волны, H — невозмущенная глубина, a — характерная амплитуда волны.

Решение задачи (3)—(5) ищем в виде разложения потенциала по степеням параметра β:

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} F_0}{\partial x^{2m}} \beta^m. \tag{6}$$

При этом уравнение (3) и условие на дне (5) оказываются удовлетворенными, а граничные условия на поверхности воды (4) принимают вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\alpha\eta)\frac{\partial F_0}{\partial x}\right] - \beta\left[\frac{1}{6}(1+\alpha\eta)^3 \frac{\partial^4 F_0}{\partial x^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha}{2}(1+\alpha\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^3 F_0}{\partial x^3}\right] + \frac{\alpha\beta^2}{24}(1+\alpha\eta)^4 \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^5 F_0}{\partial x^5}\beta^2 + O(\beta^3) = 0, \tag{7}$$

$$\eta + \frac{\partial F_0}{\partial t} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial F_0}{\partial x}\right)^2 - \frac{\beta}{2}(1+\alpha\eta)^2\left[\frac{\partial^3 F_0}{\partial x^2 \partial t} + \alpha \frac{\partial F_0}{\partial x}\frac{\partial^3 F_0}{\partial x^3} - \alpha\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{\beta^2}{2}(1+\alpha\eta)^4\left\{\frac{1}{12}\frac{\partial^5 F_0}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\alpha}{4}\left(\frac{\partial^3 F_0}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{\alpha}{12}\left(\frac{\partial F_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^5 F_0}{\partial x^5}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha}{3}\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}\frac{\partial^4 F_0}{\partial x^4}\right\}\beta^2 + O(\beta^3) = 0. \tag{8}$$

Система уравнений (7), (8) относительно уровня η и функции F_0 замкнута. Однако вместо F_0 удобно вводить неизвестную величину $u_0 = \partial F_0/\partial t$. Дифференцируя (8) по x и учитывая, что α и β одного порядка малости, перепишем (7), (8) в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial u_0^2}{\partial x} - \frac{\beta}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(1+\alpha\eta)^2\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} + \alpha u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \right.\right.$$

$$-\alpha\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2\Big]\Big\}+\frac{\beta^2}{24}\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\alpha\eta)^4\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3\,\partial t}\right]+O(\beta^3,\ \alpha\beta^2,\ \beta\alpha^2)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\alpha\eta)\,u_0\right]-\frac{\beta}{6}(1+\alpha\eta)^3\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}-\frac{\alpha\beta}{2}(1+\alpha\eta)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+$$

$$+O(\beta^3,\ \alpha\beta^2,\ \alpha^2\beta)=0. \tag{10}$$

Величина u_0 является первым членом в разложении скорости u в волне по параметру β:

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=u_0-\frac{z^2}{2}\beta\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{z^4}{24}\beta^2\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4}+O(\beta^3). \tag{11}$$

Поэтому физически более наглядные результаты получаются при введении средней по глубине скорости течения $U=\overline{\partial\Phi/\partial z}$, $z\in[0,1+\alpha\eta]$. Осредняя (11), получим

$$u_0=U+\frac{\beta}{6}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\alpha\beta}{3}\eta\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\frac{\beta^2}{120}\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4}. \tag{12}$$

Дифференцируя (12) по x и подставляя результат снова в (12), найдем с требуемой точностью

$$u_0=U+\frac{\beta}{6}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\alpha\beta}{3}\eta\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{7}{360}\beta^2\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+O(\beta^3). \tag{13}$$

Наконец, подставляя (13) в (9), (10), получим

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}(\eta U)-\frac{\beta^2}{120}\frac{\partial^5 U}{\partial x^5}+O(\beta^3)=0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial t}+\alpha U\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\beta}{3}\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\,\partial t}+\frac{\alpha\beta}{3}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\eta\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)-U\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}-\right.$$

$$\left.-3\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t}\right)+2\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}-\frac{1}{45}\beta^2\frac{\partial^5 U}{\partial x^4\,\partial t}+O(\beta^3)=0. \tag{15}$$

В частном случае очень малых параметров α и β из (14), (15) следует известная система уравнений Буссинеска [13]:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\alpha\eta)\,U\right]+O(\alpha\beta\cdot\beta^2)=0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial t}+\alpha U\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\beta}{3}\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\,\partial t}+O(\alpha\beta\cdot\beta^2)=0. \tag{17}$$

Наконец, при полном отсутствии дисперсии ($\beta=0$) и нелинейности ($\alpha=0$) система (14), (15) переходит в уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}=0, \tag{18}$$

описывающие линейные длинные волны на воде. Для волн, распространяющихся в одну сторону от источника, система (18) имеет решение $U=\eta$, $\partial\eta/\partial t=-\partial\eta/\partial x$. Известно [13] и решение системы (16), (17):

$$U=\eta+\alpha A+\beta B+O(\alpha^2,\ \beta^2), \tag{19}$$

$$A=\left(-\frac{1}{4}\right)\eta^2,\quad B=\left(\frac{1}{6}\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}, \tag{20}$$

причем входящий в (19), (20) уровень η определяется из классического уравнения КдФ [10]

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=-\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{3}{2}\alpha\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\beta}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+O(\beta^2). \tag{21}$$

Имея в виду (19), будем искать решение (14), (15) в виде

$$U=\eta+\alpha A+\beta B+\alpha\beta C+\beta^2 D+\alpha^2 E. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (14), (15), получим

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}+\alpha\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial\eta^2}{\partial x}\right)+\beta\frac{\partial B}{\partial x}+\alpha\beta\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial\eta B}{\partial x}\right)+$$

$$+\alpha^2\left(\frac{\partial E}{\partial x}-\frac{\partial\eta A}{\partial x}\right)+\beta^2\left(\frac{\partial D}{\partial x}-\frac{1}{120}\frac{\partial^5\eta}{\partial x^5}\right)+O(\beta^3)=0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}+\alpha\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\eta^2}{\partial x}\right)+\beta\left(\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{1}{3}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\,\partial t}\right)+$$

$$+\alpha\beta\left[\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{1}{3}\frac{\partial^3 A}{\partial x^2\,\partial t}+\frac{\partial\eta B}{\partial x}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\eta\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial t}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\eta\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\frac{2}{3}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right]+\alpha^2\left[\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial\eta A}{\partial t}\right]+$$

$$+\beta^2\left[\frac{\partial D}{\partial t}-\frac{1}{3}\frac{\partial^3 B}{\partial x^2\,\partial t}-\frac{1}{45}\frac{\partial^5\eta}{\partial x^4\,\partial t}\right]+O(\beta^3)=0. \tag{24}$$

Уравнение (24) в отличие от (23) содержит производные по t от функций $A(\eta)$, $B(\eta)$, $C(\eta)$, $D(\eta)$, $E(\eta)$. Для того чтобы сделать уравнения (23), (24) совместными, мы должны в (24) перейти к производным по x, используя предыдущее приближение, т. е. уравнение КдФ (21). Имеем

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial A}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}=-\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{3}{2}\alpha\eta\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\beta}{6}\frac{\partial A}{\partial\eta}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+O(\beta^2). \tag{25}$$

Но так как $\partial A/\partial x=(\partial A/\partial\eta)/(\partial\eta/\partial x)$, то $\partial A/\partial\eta=(\partial A/\partial x)/(\partial\eta/\partial x)$. Таким образом, (25) принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{3}{2}\alpha\eta\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\beta}{6}\frac{\partial A}{\partial x}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\Big/\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+O(\beta^2). \tag{26}$$

И аналогично для $\partial B/\partial t$, $\partial C/\partial t$, $\partial D/\partial t$, $\partial E/\partial t$. Подставляя выражения (26) в (24) получим

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial t}+\alpha\left(\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\beta\left(-\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{1}{3}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)+$$

$$+\alpha^2\left(-\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial\eta A}{\partial x}-\frac{3}{2}\eta\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\beta^2\left[-\frac{1}{6}\frac{\partial B}{\partial x}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\Big/\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{7}{90}\frac{\partial^5\eta}{\partial x^5}+\frac{1}{3}\frac{\partial^3 B}{\partial x^3}-\frac{\partial D}{\partial x}\right]+\alpha\beta\left[-\frac{1}{6}\frac{\partial A}{\partial x}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\Big/\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}-\frac{3}{2}\eta\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial\eta B}{\partial x}+\frac{17}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{5}{6}\eta\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right]+$$

$$+O(\beta^3)=0. \tag{27}$$

Сравнивая (27) и (23), найдем следующую систему уравнений для определения коэффициентов:

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial\eta^2}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial\eta^2}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial x},\quad \frac{\partial B}{\partial x}=-\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{1}{3}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial \eta A}{\partial x}=\frac{\partial \eta A}{\partial x}-\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{3}{2}\eta\frac{\partial A}{\partial x},\quad \frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial \eta B}{\partial x}=$$

$$=-\frac{1}{6}\frac{\partial A}{\partial x}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\Big/\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{1}{3}\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}-\frac{3}{2}\eta\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial \eta B}{\partial x}+$$

$$+\frac{17}{6}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{5}{6}\eta\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3},\quad -\frac{1}{6}\frac{\partial B}{\partial x}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\Big/\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{7}{90}\frac{\partial^5\eta}{\partial x^5}+$$

$$+\frac{1}{3}\frac{\partial^3 B}{\partial x^3}-\frac{\partial D}{\partial x}=\frac{\partial D}{\partial x}-\frac{1}{120}\frac{\partial^5\eta}{\partial x^5}.$$

Интегрируя ее, найдем коэффициенты:

$$A=-\frac{1}{4}\eta^2,\quad B=\frac{1}{6}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2},\tag{28}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{1}{4}\eta\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{7}{6}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2},\tag{29}$$

$$\frac{\partial D}{\partial x}=-\frac{1}{72}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)^2\Big/\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\frac{3}{40}\frac{\partial^5\eta}{\partial x^5},\tag{30}$$

$$E=\frac{1}{8}\eta^3.\tag{31}$$

Подставляя (28)—(31) в (23), получим эволюционное уравнение для возмущения уровня:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\left(1+\frac{3}{2}\alpha\eta-\frac{3}{8}\alpha^2\eta^2\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\beta}{6}\left[1+\frac{5}{2}\alpha\eta-\right.$$

$$\left.-\frac{\beta}{12}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^{-1}\right]\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\frac{2}{3}\alpha\beta\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\beta^2}{15}\frac{\partial^5\eta}{\partial x^5}=0\tag{32}$$

и аналогично при подстановке (28)—(31) в (27). Выпишем и размерный вид нового уравнения:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\sqrt{gH}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\eta}{H}-\frac{3}{8}\frac{\eta^2}{H^2}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+$$

$$+H^2\frac{\sqrt{gH}}{6}\left[1+\frac{5}{2}\frac{\eta}{H}-\frac{H^2}{12}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^{-1}\right]\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+$$

$$+\frac{2}{3}H\sqrt{gH}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{H^4}{15}\sqrt{gH}\frac{\partial^5\eta}{\partial x^5}=0.\tag{33}$$

Уравнение (32) является обобщением уравнения КдФ (21) на случай учета высших порядков в разложениях по параметрам амплитудной α и фазовой дисперсии β. Сравнивая (32) с (21), мы видим появление кубичной нелинейности с отрицательным коэффициентом, уменьшающим скорость солитонных решений. Кроме того, учет высшей дисперсии β^2, необходимый в теории длинных волн для описания высокочастотного участка спектра, приводит к появлению пятой производной от уровня, хотя член с четвертой производной отсутствует. Это, впрочем, неудивительно, например, в [1] показано, что член с четвертой производной возникает только при учете диссипации. Тем не менее в (32) появился член со второй производной, причем с положительным (на участке роста уровня $\partial\eta/\partial x<0$) коэффициентом, означающим наличие здесь неустойчивости. Известно [14], что член со второй производной возникает в теории длинных волн на воде из-за вязкости. Однако в данном случае образовавшаяся нелинейно-дисперсионная вязкость оказывается пропорциональной градиенту от колеблющегося уровня воды и знакопеременной:

$$\nu = \frac{2}{3} H c_0 \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{2}{3} H \sqrt{gH} \frac{\partial\eta}{\partial x}. \qquad (34)$$

Подобные эффекты имеют место во внутренних волнах, развивающихся на нижней границе верхнего квазиоднородного слоя в океане [15].

В заключение приведем также более прозрачную, чем (32), безразмерную форму нового уравнения, содержащую известное в теории нелинейных волн число Урселла $\mathrm{Ur}=\alpha/\beta=a\lambda^2/H^3$:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta\left(\frac{3}{4}\frac{\partial\eta^2}{\partial x}\mathrm{Ur} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right) +$$
$$+ \beta^2\left\{\frac{1}{15}\frac{\partial^5\eta}{\partial x^5} + \left[\frac{5}{12}\eta\,\mathrm{Ur} - \frac{1}{72}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^{-1}\right]\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} +\right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\mathrm{Ur} - \frac{1}{8}\frac{\partial\eta^3}{\partial x}\mathrm{Ur}^2\right\} = 0. \qquad (35)$$

Первые четыре члена в уравнении (35) представляют собой классическое уравнение КдФ, остальные получены нами. Для уравнения КдФ типично условие $\mathrm{Ur}\simeq 1$. Поэтому для описания возмущений типа солитонов или уединенных волн, для которых $\lambda \gg H$, $\beta \ll 1$, уравнения КдФ вполне достаточно: из (35) мы видим, что в этом случае новые члены, имеющие порядок β^2, малы по сравнению с членами порядка β. Исключением здесь являются случаи малых глубин (прибрежная область), где $H \to 0$ и необходимо учитывать не только квадратичную, но и кубичную нелинейность. Здесь целесообразно вместо КдФ использовать более точное уравнение

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \sqrt{gH}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\eta}{H} - \frac{3}{8}\frac{\eta^2}{H^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + H^2\frac{\sqrt{gH}}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0 \qquad (36)$$

(оно записано в размерном виде).

Наконец, в реальных землетрясениях при колебаниях океанского дна может генерироваться цуг волн цунами с $\lambda \sim H$ и $\beta \sim 1$. В этом случае пренебрежение членами порядка β^2 становится недопустимым и мы должны использовать полное уравнение (35) или (33). В целом представляется, что полученное нами новое уравнение (32), (33) или (35) более точно, чем уравнение КдФ, описывает эволюцию длинных волн на воде, поскольку является следующим приближением теории. Можно надеяться поэтому, что его применение для изучения трансформации длинных, но сравнительно высокочастотных волн цунами позволит лучше прогнозировать последствия их воздействия на берега океана.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 94-05-16028а и 94-05-16066а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kawahara T.//Phys. Rev. Lett. 1983. **51**, N 5. P. 381.
2. Kuramoto Y., Tzuzuki T.//Progr. Theor. Phys. 1976. **55**, N 2. P. 356.
3. Sivashinsky G. I.//Annual Rev. Fluid Mech. 1983. **15**. P. 179.
4. Nikolaevsky V. N.//Phys. Earth and Planet. Interiors. 1988. **50**, N 1. P. 32.
5. Николаевский В. Н.//Нелинейные волновые процессы. М., 1987. С. 273.
6. Островский Л. А.//Нелинейные волны. Динамика и эволюция. М., 1989. С. 29.
7. Николаевский В. Н.//Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1992. № 5. С. 110.

8. Николаевский В. Н.//ДАН СССР. 1989. **307,** № 3. С. 570.
9. Николаевский В. Н.//ДАН СССР 1991. **317,** № 5. С. 1103.
10. Korteweg D. I., de Vries G.//Phil. Mag. 1895. **39,** Ser. 5. P. 422.
11. Арсеньев С. А., Губарь А. Ю., Шелковников Н. К.//Океанология. 1993. **33,** № 2. С. 184.
12. Арсеньев С. А.//ДАН. 1994. **334,** № 5. С. 112.
13. Габов С. А. Введение в теорию нелинейных волн. М., 1988.
14. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И.//УФН. 1971. **103,** № 2. С. 193.
15. Зилитинкевич С. С., Крейман К. Д., Фельзенбаум А. И.//ДАН СССР. 1988. **300,** № 5. С. 1226.

Поступила в редакцию
25.04.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 2

УДК 539.038

ВАРИАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ПРИЛИВНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

В. И. Григорьев, Е. В. Григорьева

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Получены оценки для вариаций геомагнитного поля, порождаемых вследствие бароэлектрического эффекта приливными воздействиями.

Перераспределение электрических зарядов в проводнике, вызываемое неоднородностями внутренних напряжений, — бароэлектрический эффект, как показано в [1], приводит, в частности, к тому, что градиенты давлений в планете, обуславливаемые приливными силами, порождают «приливные» электрические поля. Оценки для такого поля, возникающего над Землей из-за воздействий Луны и Солнца, показывают, что ему присущи многие черты поля ясной погоды, что позволяет по-новому взглянуть на проблемы геоэлектрики. Но кроме электрического приливные воздействия порождают также и «приливное» магнитное поле, дающее вклад в вариации результирующего геомагнитного поля. Цель настоящей заметки — оценить масштабы и основные черты этих вариаций. При этом мы будем пользоваться некоторыми упрощающими допущениями: будет учитываться приливное воздействие на Землю только со стороны Луны; из всех факторов, определяющих временные зависимости, будет приниматься в расчет только суточное вращение Земли, так как изменения, обязанные движению Земли и ее спутника вокруг общего центра масс, имеют на порядок больший период; угловая скорость суточного вращения Земли будет считаться постоянной. Некоторые другие положения будут уточняться ниже по ходу изложения. Таким образом, рассматривается следующая упрощенная ситуация:

на равномерно вращающуюся с угловой скоростью ω планету — электронейтральный шар радиуса R — со стороны «покоящегося» спутника массы m, находящегося на расстоянии R_0 от центра планеты, действует приливная сила

$$\mathbf{f} = Gm\tau\,\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{r}}{R_0^3}, \tag{1}$$

где вектор $\mathbf{R}_0$ проводится от центра Луны к центру Земли, а $\mathbf{r}$ — от центра Земли к точке наблюдения, $\mathbf{n}=\mathbf{R}_0/R_0$, $\tau(\mathbf{r})$ — плотность вещест-