6. Witten E. M.//Nucl. Phys. 1985. B249. P. 557.
7. Gundlach C., Ortiz E.//Phys. Rev. 1990. D42. P. 2521.
8. Baker W. M.//Class. Quantum. Grav. 1990. 7. P. 717.
9. Christensen S. M.//J. Phys. A: Math. Gen. 1980. 13. P. 3001.
10. Letelier P. S.//Class. Quantum. Grav. 1987. 4. P. L75.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971. Гл. 2, 2.162(1a).

Поступила в редакцию
22.07.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 3

УДК 539.12.01

О СООТНОШЕНИИ ПАРАМЕТРИЗАЦИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТОКОВ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Е. В. Баландина, Н. П. Юдин

(НИИЯФ; кафедра физики элементарных частиц)

Рассмотрена связь теоретико-полевой параметризации матричных элементов векторных токов с параметризацией, предложенной Ю. М. Широковым. Широковская параметризация актуальна при больших спинах частиц и в развивающейся релятивистской квантовой механике составных систем с небольшим числом степеней свободы.

1. Настоящая заметка посвящена обсуждению некоторых неочевидных вопросов соотношения двух различных параметризаций матричных элементов типа $\langle \mathbf{p}'m'|J^\mu|\mathbf{p}m\rangle$ от векторных токов. Для определенности будем считать J^μ электромагнитным током; $\mathbf{p}m$, $\mathbf{p}'m'$ — импульсы и проекции спинов на ось квантования в системе покоя начальной и конечной частицы; нормировка векторов состояния предполагается инвариантной:

$$\langle \mathbf{p}'|\mathbf{p}\rangle=(2\pi)^3\,2p_0\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}').$$

2. Наиболее распространенный способ параметризации тока $\langle \mathbf{p}'m'|J^\mu|\mathbf{p}m\rangle$ апеллирует к трансформационным свойствам полевых величин, и мы условно будем называть такую параметризацию полевой. Для частиц со спинами $s=1/2$ и 1 полевая параметризация тока имеет соответственно следующий хорошо известный вид [1]:

$$\langle \mathbf{p}'m'\,|J^\mu|\,\mathbf{p}m\rangle=\bar{u}'\left[F_1(q^2)\,\gamma^\mu-\frac{æ}{2M}\,\sigma^{\mu\nu}q_\nu F_2(q^2)\right]u,$$

$$\langle \mathbf{p}'m'\,|J^\mu|\,\mathbf{p}m\rangle=G_1(q^2)\,(\xi'^*\xi)\,\mathscr{P}^\mu+$$
$$+G_2(q^2)\,[\xi^\mu(\xi'^*q)-\xi'^{*\mu}(\xi q)]-G_3(q^2)\,\frac{(\xi q)\,(\xi'^*q)}{2M^2}\,\mathscr{P}^\mu. \qquad (1)$$

Здесь $F_{1,2}(q^2)$, $G_{1,2,3}(q^2)$ — формфакторы ($F_{1,2}$ называются дираковскими), $q^\mu=(p'-p)^\mu$, $\mathscr{P}^\mu=(p+p')^\mu$, γ^μ — дираковские матрицы, $\sigma^{\mu\nu}=1/2\,[\gamma^\mu,\ \gamma^\nu]$,

$$u=u(p,\ m)=\sqrt{p_0+M}\begin{pmatrix} w_m \\ \dfrac{\sigma\mathbf{p}}{p_0+M}\,w_m\end{pmatrix},$$

$\bar{u}=u^+\gamma^0$, $u'=u(p',\ m')$ — 4-спиноры, $\xi'=\xi(p',\ m')$, $\xi=\xi(p,\ m)$ — единичные 4-векторы,

$$\xi^{\mu}(p,\ m)=\begin{cases}\dfrac{\mathbf{e}_m\mathbf{p}}{M}, & \mu=0,\\[2ex] \mathbf{e}_m+\dfrac{\mathbf{p}\,(\mathbf{p}\mathbf{e}_m)}{M\,(M+p_0)}, & \mu=1,\ 2,\ 3,\end{cases}$$

где w_m, $\mathbf{e}_m$ — спиновые функции частицы в ее системе покоя:

$$w_{\pm 1/2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_{m=\pm 1}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{e}_x\pm i\mathbf{e}_y),$$

$$\mathbf{e}_0=\mathbf{e}_z,$$

$\mathbf{e}_{x,y,z}$ — единичные векторы вдоль осей x, y, z, M — масса частицы, p_0 — ее энергия, æ — аномальный магнитный момент.

Из-за сложности конструирования полей с более высокими спинами ($s\geqslant 3/2$) полевая параметризация является неудобной. Чтобы почувствовать это, достаточно, например, поставить вопрос о полевой параметризации тока для частицы со спином 9/2. Еще одним недостатком полевой параметризации является ее «необразность». Действительно, например, физический смысл используемых в ней векторов $\bar{u}'\gamma^{\mu}u$ или $\xi^{\mu}(\xi'^{*}q)-\xi'^{*\mu}(\xi q)$ не совсем ясен.

3. Появление релятивистских ускорителей тяжелых ионов, развитие релятивистской ядерной физики и создание релятивистской квантовой механики [2], несомненно, потребуют параметризации токов ядер с большими спинами. Поэтому необходимы другие подходы к этому вопросу. Универсальная, т. е. применимая при любых спинах, параметризация была предложена Ю. М. Широковым и А. А. Чешковым [3]. Мы будем называть ее широковской. Она состоит в следующем. Прежде всего, в матричном элементе $\langle \mathbf{p}'m'|J^{\mu}|\mathbf{p}m\rangle$ осуществляется «пересадка» спина с импульса $\mathbf{p}'$ на импульс $\mathbf{p}$. Пересадка означает, что после нее при лоренцевских преобразованиях спин конечной частицы поворачивается на тот же вигнеровский угол, что и спин начальной частицы. Она осуществляется с помощью обычной D-функции группы вращений, зависящей от углов, определяемых импульсами $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$:

$$\langle \mathbf{p}'m'\,|J^{\mu}|\,\mathbf{p}m\rangle=\sum_{\widetilde{m}'}D^{s}_{m'\widetilde{m}'}(p',\ p)\,\langle \mathbf{p}'\widetilde{m}'\,|J^{\mu}|\,\mathbf{p}m\rangle.$$

Угол поворота при пересадке легко определяется из найденного Широковым [4] явного выражения для D-матрицы при спине $s=1/2$:

$$D\,(p',\ p)=\frac{(p_0+M)\,(p_0'+M')-(\sigma\mathbf{p}')\,(\sigma\mathbf{p})}{\sqrt{2\,(p_0+M)\,(p_0'+M')\,(pp'+MM')}},$$

где $pp'=p_0p'_0-\mathbf{p}\mathbf{p}'$.

Далее, матричный вектор $\langle \mathbf{p}'\widetilde{m}'\,|J^{\mu}|\,\mathbf{p}m\rangle$ может зависеть только от четырех векторов: p^{μ}, p'^{μ}, $\Gamma^{\mu}_{\widetilde{m}'m}(p)$, $R^{\mu}_{\widetilde{m}'m}=i\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}(\Gamma_{\nu})_{\widetilde{m}'m}p'_{\sigma}p_{\rho}$. Здесь $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$—единичный антисимметричный тензор, а $\Gamma^{\mu}_{\widetilde{m}'m}(p)\equiv\Gamma^{\mu}(p)$ представляет собой матричный псевдовектор. Его обычно называют релятивистским спином. Он имеет вид

$$\Gamma^{\mu}(p)=\begin{cases}\dfrac{\mathbf{sp}}{M}, & \mu=0,\\ \mathbf{s}+\dfrac{\mathbf{p}(\mathbf{ps})}{M(M+p_0)}, & \mu=1,\ 2,\ 3,\end{cases}$$

где s — оператор спина в системе покоя частицы.

При лоренцевских преобразованиях Γ^{μ} трансформируется по закону

$$\Gamma^{\mu}(p)\rightarrow D^{+}(R)\,\Gamma^{\mu}(p')\,D(R)=\Lambda^{\mu}_{\nu}\Gamma^{\nu}(p);$$

где $R=R_W$ — вигнеровский поворот, определяемый следующим образом:

$$R_W=L^{-1}_{\Lambda p}\Lambda L_p, \tag{2}$$

L_p — лоренцевский буст, осуществляющий преобразования

$$(L_p)\,\tilde{p}^{\mu}=p^{\mu},\ \tilde{p}^{\mu}=(M,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Теперь мы можем сформулировать широковский способ параметризации. Векторы p, p', Γ, R должны входить в выражение J^{μ} со скалярными матричными множителями типа $(p'\Gamma)^n$, но таким образом, чтобы, во-первых, выполнялись законы сохранения тока и четности и, во-вторых, общая степень матриц Γ не превышала $n=2s$. В результате для спина $s=1/2$ имеем

$$\langle \mathbf{p}'\tilde{m}'\,|J^{\mu}|\,\mathbf{p}m\rangle=\{f_1(q^2)\,\mathcal{P}^{\mu}+f_2(q^2)\,R^{\mu}\}_{\tilde{m}'m};$$

для спина $s=1$

$$\langle \mathbf{p}'\tilde{m}'\,|J^{\mu}|\,\mathbf{p}m\rangle=\{[f_1(q^2)+f_2(q^2)\,(\mathbf{p}'\Gamma)^2]\,\mathcal{P}^{\mu}+f_3(q^2)\,R^{\mu}\}_{\tilde{m}'m}.$$

4. Полевая и широковская параметризации выглядят существенно различными и представляется интересным обсудить связь этих параметризаций.

Рассмотрим сначала ситуацию при спине $s=1/2$. При полевой параметризации в качестве двух базисных векторов для представления тока используются векторы $\bar{u}'\gamma^{\mu}u$ и $\bar{u}'\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}u$ (или $\mathcal{P}^{\mu}\bar{u}'u$). Однако выбор базисных векторов является неоднозначным. Например, вместо вектора $\bar{u}'\gamma^{\mu}u$ можно выбрать псевдовектор $\bar{u}'\gamma^5\gamma^{\mu}u$ и соответственно вектор $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\bar{u}'\gamma^5\gamma_{\nu}up'_{\sigma}p_{\rho}$. Широковской параметризации будут отвечать следующие базисные векторы:

$$\bar{u}'\,(\hat{p}+M)\,\gamma^5\gamma^{\mu}u,\ \ \mathcal{P}^{\mu}\bar{u}'u,$$

где

$$\hat{p}=p_{\mu}\gamma^{\mu}\ \text{ и }\ \gamma^5=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что выполняется соотношение

$$\bar{u}(p',\ m')\,(\hat{p}+M)\,\gamma^5\gamma^{\mu}\,u(p,\ m)=$$
$$=\sum_{m_1}\bar{u}(p',\ m')\,u(p,\ m_1)\,\bar{u}(p,\ m_1)\,\gamma^5\gamma^{\mu}u(p,\ m),$$

и матрица $\bar{u}(p,\ m_1)\gamma^5\gamma^{\mu}u(p,\ m)$ с точностью до множителя совпадает с матрицей $\Gamma^{\mu}_{m_1m}(p)$ релятивистского спина. Действительно, поскольку [5]

$$u(p, m) = S(L_p)\, u(0, m),$$

$$\bar{u}(p, m) = \bar{u}(0, m)\, S^{-1}(L_p),$$

$$S^{-1}(L_p)\, \gamma^\mu S(L_p) = (L_p)^\mu_\nu \gamma^\nu,$$

то

$$\bar{u}(p, m)\, \gamma^5\gamma^\mu u(p, m) = (L_p)^\mu_\nu\, \bar{u}(0, m_1)\, \gamma^5\gamma^\nu u(0, m) =$$

$$= 4M\,(L_p)^\mu_\nu \Gamma^\nu_{m_1 m}(0) = 4M\Gamma^\mu_{m_1 m}(p).$$

Вводя теперь вектор $R^\mu = i\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\bar{u}\gamma^5\gamma_\nu u p'_0 p_\rho$, получим полный аналог широковской параметризации:

$$\langle \mathbf{p}'m' \,|J^\mu|\, \mathbf{p}m\rangle = \sum_{\tilde{m}} \bar{u}(p', m')\, u(p, \tilde{m})\, \{f_1(q^2)\, \mathscr{P}^\mu + f_2(q^2)\, R^\mu\}_{\tilde{m}m},$$

где матрица $\bar{u}(p', m')\, u(p, \tilde{m})$ с точностью до инвариантного множителя совпадает с широковской матрицей пересадки спина:

$$\bar{u}(p', m')\, u(p, \tilde{m}) = \sqrt{2(pp' + M^2)}\, D^{1/2}_{m'\tilde{m}}(p', p).$$

Для формфакторов $f_{1,2}$ и $F_{1,2}$ получаем следующие соотношения:

$$f_1(q^2) = \frac{4M^2F_1(q^2) + q^2\, æ\, F_2(q^2)}{2M\sqrt{1M^2 - q^2}},$$

$$f_2(q^2) = \frac{?- 4\,\{F_1(q^2) + æ\, F_2(q^2)\}}{M\sqrt{4M^2 - q^2}}.$$

5. Приведенные рассуждения выглядят до некоторой степени искусственными. Существует, однако, и более «канонический» переход от полевой параметризации к широковской, но в терминах полевых величин. Для этого заметим, что дираковские спиноры $u(p, m)$ при преобразованиях Лоренца Λ трансформируются, как несложно убедиться, следующим образом:

$$u(p, m) \to u'(p', m) = S(\Lambda)\, u(p, m) = u(p', m')\, D^{1/2}_{m'm}(R_W),$$

где R_W — уже встречавшийся нам вигнеровский поворот (2). Отсюда следует, что трансформационные свойства спинора $u(p, m)$ и вектора состояния $|\mathbf{p}m\rangle$ совпадают. Соответственно для $u(p,m)$ имеет место широковская пересадка спина

$$u(p', m') = \sum_m u(p';\, p, m)\, D^{1/2}_{mm'}(p, p'),$$

где $u(p';\, p, m)$ — 4-спинор со спином, пересаженным на импульс p:

$$u(p';\, p, m) = \sqrt{p'_0 + M}\begin{pmatrix} w'_m \\ \dfrac{\sigma\mathbf{p}'}{p'_0 + M}\, w'_m \end{pmatrix}$$

и

$$w'_m = w_{m'} D^{1/2}_{m'm}(p', p).$$

В результате для матричного элемента от тока имеем следующее соотношение:

$$\langle \mathbf{p}'m' \,|J^\mu|\, \mathbf{p}m\rangle = \bar{u}(p', m')\, A^\mu u(p, m) =$$

$$= \Sigma\, D^{1/2}_{m'\tilde{m}}(p', p)\, \bar{u}(p';\, p, \tilde{m})\, A^\mu u(p, m),$$

где $A^\mu \equiv A^\mu_{\alpha\beta}$ — векторный оператор, действующий на спинорные индексы.

Процедура параметризации теперь может быть проведена двояким образом. Если мы используем соотношение

$$S^{-1}(\Lambda) A^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$$

для отбора дираковских матриц и их комбинаций, то получим стандартную полевую параметризацию. Если же будем использовать закон преобразования всего матричного элемента

$$\bar{u}(p'; p, \tilde{m}) A^\mu u(p, m), \tag{3}$$

то придем к одному из вариантов широковской параметризации. Действительно, поскольку спины начальной и конечной частицы преобразуются одинаковым образом, то матричный элемент (3) может быть выражен через матричный вектор $\bar{u}(p, m')\gamma^5\gamma^\mu u(p, m) \equiv 4M\Gamma^\mu_{m'm}(p)$ (точнее, $R^\mu_{m'm}$) и вектор $\mathscr{P}^\mu$.

6. Для частиц со спином $s=1$ способом п. 4 не удается установить связь широковской и полевой параметризаций. Остается только способ типа п. 5. Как и в п. 5, он основывается на следующем свойстве векторов $\xi(p, m)$:

$$\xi(p, m) \to \xi'(p', m) = \Lambda\xi(p, m) = \xi(p', m') D^1_{m'm}(R_W).$$

Соответственно для $\xi(p, m)$ допустима широковская пересадка спина:

$$\langle \mathbf{p}'m' | J^\mu | \mathbf{p}m \rangle = \xi'^* \mathscr{A}^\mu \xi = \sum_{\tilde{m}} D^1_{m'\tilde{m}}(p', p)\, \xi^*(p'; p, \tilde{m})\, \mathscr{A}^\mu \xi(p, m).$$

Опять-таки, если параметризовать величину $\mathscr{A}^\mu_{\alpha\beta}$, у которой теперь α, β — векторные индексы, то получится обычная полевая параметризация (1). Если же параметризовать матричный элемент $\xi^*(p'; p, \tilde{m}) \mathscr{A}^\mu \xi(p, m)$ в целом, то получается широковская параметризация, где роль матричного вектора $\Gamma^\mu_{\tilde{m}m}(p)$ играет величина

$$\xi^*(p, m') W^\mu(p)\, \xi(p, m), \tag{4}$$

равная в точности, как легко проверить, релятивистскому спину $\Gamma^\mu(p)$. Величина $W^\mu(p)$ есть выраженный в полевых переменных псевдотензор Паули—Любаньского [6]:

$$W^\mu = -\frac{1}{2M} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \hat{\Sigma}_{\nu\sigma} p_\rho,$$

где $\hat{\Sigma}_{\nu\sigma}$ — оператор тензора спина векторной частицы:

$$\hat{\Sigma}_{\alpha\beta} = (\Sigma_{\alpha\beta})^{\mu\nu} = -i\,(g^\mu_\alpha g^\nu_\beta - g^\nu_\alpha g^\mu_\beta).$$

7. В заключение приведем неочевидные и полезные выражения для матрицы пересадки спина $s=1$:

$$D^1(p', p) = 1 + \frac{is[\mathbf{p}', \mathbf{p}]\{(p_0 + M)(p_0' + M) - \mathbf{p}\mathbf{p}'\} - (\mathbf{s}[\mathbf{p}', \mathbf{p}])^2}{(p_0 + M)(p_0' + M)(pp' + M^2)} \tag{5}$$

и

$$D^1(p', p) = -(\xi^*\xi') + \frac{1}{pp' + M^2}(\xi^* p')(\xi' p). \tag{6}$$

Используя (5), (6) и (4), несложно найти уравнения, связывающие широковские формфакторы f_i с обычно используемыми G_i. Эти уравнения, однако, являются громоздкими и не позволяют простым образом выразить f_i через G_i. Поэтому мы их здесь не приводим.

Авторы признательны за ценные обсуждения В. Е. Троицкому и А. Ф. Крутову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mulders P. J.//Phys. Rep. 1990. **185**. P. 83.
2. Chung P. L., Coester F., Keister B. D., Polyzou W. N.//Phys. Rev. 1988. **C37**. P. 2000; Лев Ф. М.//ЭЧАЯ. 1990. **21**. С. 1251.
3. Чешков А. А., Широков Ю. М.//ЖЭТФ. 1963. **44**. С. 1982.
4. Широков Ю. М.//ДАН СССР. 1954. **99**. С. 737.
5. Новожилов Ю. В. Введение в теорию элементарных частиц. М., 1972.
6. Macfarlane A.//J. Math. Phys. 1963. **4**. P. 490.

Поступила в редакцию
09.12.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 3

РАДИОФИЗИКА

УДК 533.9.5—73

УВЕЛИЧЕНИЕ СТЕПЕНИ КОНВЕРСИИ СО В CO_2 ЗА СЧЕТ ДИССОЦИАЦИИ ВОДЫ В ПЛАЗМОХИМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А. А. Кузовников, А. В. Пономарева, В. С. Свиридкина

(кафедра физической электроники)

Проведено математическое моделирование химической кинетики и плазмохимических процессов в системе, содержащей CO, O_2, H_2O. Анализ механизма окисления CO в системе CO—O_2—H_2O показал, что основная доля CO_2 образуется в практически беспороговой реакции молекул CO с радикалами OH. Радикалы OH получаются в реакции диссоциации колебательно-возбужденных молекул H_2O. Показано, что использование неравновесной плазмы ($T_e=1$ эВ, $n_e/n_0 \sim 10^{-6}$) приводит к селективному направлению реакции по каналу окисления окиси углерода CO. Незначительное содержание свободных радикалов ($p_{OH}=1{,}5$ мм рт. ст.) приводит к увеличению степени конверсии CO до 60—70% даже для случая недостатка кислорода O_2 и уменьшению времени протекания процесса окисления на 1,5—2 порядка.

1. Введение

В настоящее время на биосферу крупных городов и промышленных центров большое негативное влияние оказывают продукты распада углеводородных топлив. К токсичным выбросам этого типа относят окись углерода CO, образование которой связано с обрывом цепей реакции окисления углеводородного топлива.

Анализ современных способов очистки, использующих каталитические методы, показывает, что их высокая стоимость и относительная недолговечность служат препятствием на пути внедрения в массовое производство. Естественным выходом из этой ситуации является переход к новым технологическим решениям, в частности к использованию плазмохимических процессов.