КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145.6

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЩЕЛИ

В. Б. Гостев, И. В. Гостев, А. Р. Френкин

(кафедра теоретической физики)

На основе правил продолжения решений одномерного стационарного уравнения Шрёдингера (УШ) найдены уровни энергии и волновые функции задачи о движении электрона между параллельными проводящими плоскостями.

В статье [1] нами на основе физических подходов указаны правила выбора четных решений УШ с четным одномерным потенциалом с особенностью

$$W=\lambda|x|^{-\nu},\quad -\infty<x<\infty,\quad 0<\nu\leqslant 2 \tag{1}$$

и правила перехода через особенность (1) для волновых функций частицы в поле «любых» потенциалов с сингулярностью (1). Эти правила заключаются в том, что локальные четные компоненты волновых функций продолжаются через особенность «локально четно».

Применим эти правила к УШ для заряженной частицы, движущейся в щели между двумя параллельными проводящими плоскостями ($x=\pm a$). Даже классическая электростатическая задача о нахождении потенциала заряда, наведенного на плоскостях, нетривиальна (суммирование потенциалов «изображений» расходится, необходимо решать уравнение Лапласа).

Потенциальная энергия взаимодействия точечного заряда e с проводящими плоскостями имеет вид [2]

$$V(x)=\frac{e^2}{8a}\begin{cases} 2\gamma+\psi(p)+\psi(1-p), & |x|<a,\\ 0, & |x|\geqslant a,\end{cases} \tag{2}$$

где $p=x/(2a)+1/2$, $\psi(z)$ — логарифмическая производная Г-функции [3], $\gamma=0{,}5272\ldots$. Этот же потенциал методом суммирования диаграмм был получен в [4]. Вблизи стенок потенциал имеет вид, соответствующий кулоновскому взаимодействию с ближайшим изображением:

$$\begin{aligned} V(x)&=-\frac{e^2}{4}(x+a)^{-1},\ x>-a,\ (x+a)\leqslant a,\\ V(x)&=-\frac{e^2}{4}(x-a)^{-1},\ x<a,\ (a-x)\ll a. \end{aligned} \tag{3}$$

Множители 1/8 в (2) и 1/4 в (3) получаются из-за подвижности «изображений» при движении заряда внутри щели [5]. В середине щели

$$V(0)=-\frac{e^2\ln 2}{2a},\quad \frac{dV(0)}{dx}=0. \tag{4}$$

Так как энергия основного состояния имеет порядок $E_0 \approx e^2/a_B$, где a_B — боровский радиус, то для щели макроскопической ширины ($a \gg \gg a_B$) $V(0)=0$.

В силу макроскопичности щели в нулевом приближении уровни и волновые функции находятся из упрощенного УШ с потенциалом

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{e^2}{4}(x+a)^{-1}, & x > -a, \\ 0, & x \leqslant -a \end{cases} \tag{5}$$

с последующим четным (нечетным) продолжением относительно $x=0$ [6].

Одномерная кулоновская задача была решена нами для свободного кулоновского потенциала (1) $\nu=1$ [7] и для разрывного кулоновского потенциала (5) [8]. В последнем случае уровни энергии находятся из уравнения

$$g(q) = \frac{1}{2q} = 0, \tag{6}$$

корни которого в порядке возрастания $0 < q_0 < q_1 < \ldots$ дают возрастающие уровни энергии с кулоновским сгущением при $E \to 0$ ($n \to \infty$):

$$E_n = -\frac{1}{4q_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \tag{7}$$

$$g(q) = \ln q - \frac{1}{2q} - \psi(q) - \pi \operatorname{ctg} \pi q, \quad g(q) \to -\pi \operatorname{ctg} \pi q -$$

$$-\frac{1}{12q^2}, q \gg 1, \quad 0 < q_0 < q_{0+} < 1 < q_1 < q_{1+} < 2 < \ldots, \tag{8}$$

где значения q_{n+} соответствуют четным уровням энергии одномерного атома водорода [7]. В формуле (7) и далее использованы «атомные» единицы $\hbar = 2m = |e|/2 = 1$, в которых единицей длины служит боровский радиус a_B.

В силу макроскопичности ширины щели для низких уровней особые точки $x = \pm a$ можно считать полностью независимыми (кроме учета четности [6]) и воспользоваться для волновых функций известными формулами [8]

$$\psi_n = N_n \begin{cases} \exp(-\sqrt{-E_n}\, |x+a|, & x < -a, \\ \psi_c(x+ap, \ q_n) & -a < x < 0, \end{cases} \tag{9}$$

где N_n — нормировочный множитель, а кулоновская функция $\psi_c(x, q)$ имеет вид [7]

$$\psi_c(x, q) = x \exp\left(-\frac{x}{2q}\right) U\left(1-q, 2, \frac{x}{q}\right) \Gamma(1-q), \quad \psi_c(0, q) = 1, \tag{10}$$

$U(\alpha, \beta, z)$ — регулярная при $z \to \infty$ вырожденная гипергеометрическая функция [3]. Так как потенциал (2), (3) четен, то в нулевом приближении имеет место двукратное вырождение каждого уровня по четности, и волновая функция (9) продолжается на $x > 0$ четно (нечетно).

Из вида волновой функции (9), (10) следует, что частицы сосредоточены вблизи стенок ($x = \mp a$), но непрерывная волновая функция ($\psi(-a) = 1$) не имеет максимума при $x = -a$: $\psi'(-a-0) = b > 0$,

$\lim\limits_{x\to -a+0} \psi(x)=\infty$, и максимум $\psi(x)$ $(\psi'(x_0)=0)$ достигается в классически доступной точке $x_0 \sim (n+1) a_B$.

За счет разности потенциалов (2) и (3)

$$\Delta V = -\frac{p^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-p^2)} \tag{11}$$

уровни сдвигаются вниз на величину

$$\Delta E_n = -K_n a^{-3}, \ K_n \sim 1. \tag{12}$$

Расщепление по четности имеет экспоненциально малый (a_B/a) порядок [6], четный уровень лежит ниже:

$$E_{n\pm} = E_n + \Delta E_n \mp \delta E_n, \tag{13}$$

$$\delta E_n = -2N_n^2 \psi_c(a, q_n)\, \psi_c'(0, q_n) \simeq N_n^2 q_n^{-1} a^{-2q_n} \exp\left(-\frac{a}{2q_n}\right). \tag{14}$$

Сдвиги (12), (14) малы по сравнению с низшими уровнями и расстояниями между ними (δE_n, $\Delta E_n \ll 1$ в шкале q).

Отметим, что скачок при $x=0$ нечетной волновой функции и производной четной функции нефизичен и фактически (для точного решения УШ с потенциалом (2), (3)) не имеет места. Из-за конечного кулоновского хвоста потенциалов (2), (3) не имеет места и сгущение уровней при $n\to\infty$ (7) — число уровней конечно, хотя и макроскопически велико ($n \sim a/a_B$).

В случае, когда между стенками щели имеется разность потенциалов ($V(-a)=A>0$, $V(+a)=0$), существуют две системы поверхностных состояний, вырождения по четности нет и состояния, сосредоточенные вблизи $x=-a$, при $0<E<A$ квазистационарны.

Таким образом, в щели существует конечное число практически двукратно вырожденных по четности уровней ($V(-x)=V(+x)$), причем основной уровень имеет конечную глубину вопреки утверждению ряда работ по одномерному кулоновскому УШ [9].

Авторы благодарны А. В. Борисову и В. Ч. Жуковскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гостев В. Б., Гостев И. В., Френкин А. Р.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. **35**, № 2. С. 27.
2. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М., 1954.
3. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., 1979.
4. Kreuser M.//J. Phys. A: Math. Gen. 1988. **21**. P. 3285.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1993.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1989.
7. Гостев В. Б., Перес-Фернандес В. К., Френкин А. Р., Чижов Г. А.//Изв. вузов, Физика. 1990. № 5. С. 104.
8. Гостев В. Б., Гостев И. В., Френкин А. Р.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. **36**, № 2. С. 11.
9. Moss R. E.//Amer. J. Phys. 1987. **55**. P. 397.

Поступила в редакцию
18.07.94