ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.171

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЁДИНГЕРА И НЕРАСПЛЫВАЮЩИЕСЯ ПАКЕТЫ

А. Г. Корниенко, И. М. Тернов, А. Р. Френкин, Г. А. Чижов

(кафедра теоретической физики)

Предложен новый метод решения нелинейных волновых уравнений типа Шрёдингера — метод квадратур, позволяющий получить решение в виде нерасплывающегося волнового пакета. С помощью этого метода впервые получено решение обобщенного нелинейного уравнения типа Шрёдингера.

1. Линейное уравнение Шрёдингера и расплывание пакета

Нелинейные уравнения типа уравнения Шрёдингера используются для описания распространения волновых пакетов в диспергирующих физических средах. В представленной работе предложен метод получения нелинейных уравнений, имеющих решения в виде пакета.

Рассмотрим одномерное уравнение (уравнение Шрёдингера)

$$i\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2},$$

решение которого может быть записано в следующей форме:

$$\Psi(x,\,t)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\widetilde{\Psi}(k)\exp\{i\,(kx-\omega(k)\,t)\}\,dk.$$

Для волнового пакета функция $\widetilde{\Psi}(k)$ должна иметь локальный максимум в некоторой точке $k=p$. Закон дисперсии определяется зависимостью $\omega(k)=k^2$ и является нелинейным. Волновой пакет, имеющий в начальный момент времени $t=0$ конечную ширину, всегда расплывается. Производная частоты по волновому числу определяет групповую скорость:

$$\left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right|_{k=p}=V.$$

Разложение частоты $\omega(k)$ в окрестности значений $k\approx p$ позволяет проследить влияние функциональной зависимости $\omega(k)$ на дисперсию волнового пакета:

$$\omega(k)=\omega(p)+\left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right|_{k=p}(k-p)+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2\omega(k)}{dk^2}\right|_{k=p}(k-p)^2+\ldots$$

Сумма членов ряда, начиная с третьего в этой формуле, приводит к расплыванию пакета. Расплывание отсутствует только в случае линейного закона дисперсии. Это справедливо не только для уравнения Шрёдингера, но и для волновых уравнений, содержащих вторую производную по времени, типа уравнений классической электродинамики в вакууме, где также нет расплывания из-за линейного закона дисперсии.

2. Конструирование нелинейного уравнения, имеющего решением нерасплывающийся волновой пакет

Любая функция одной переменной $z=x-Vt$, убывающая на бесконечности, описывает нерасплывающийся волновой пакет, движущийся со скоростью V в положительном направлении. По аналогии с линейной теорией (нерелятивистская квантовая механика), в которой свободному движению соответствует зависимость функции от фазы $\Psi\sim\sim\exp\{ipx\}$, где $p=V/2$, выберем решение в виде

$$\widetilde{\Psi}(x,\ t)=y(z)\exp\{ipz\}.$$

Эта функция описывает нерасплывающийся пакет, так как и амплитуда, и фаза функции $\widetilde{\Psi}$ зависят только от одной переменной z.

Когда интересующие нас величины описываются не самой функцией Ψ, а величиной $|\Psi|^2$, понятие волнового пакета допускает обобщение. Решение $\Psi(x, t)$, описывающее такой пакет, который мы будем называть обобщенным волновым пакетом, может отличаться дополнительным фазовым множителем $\exp\{i\delta t\}$, причем δ зависит от скорости V:

$$\Psi(x,\ t)=y(z)\exp\{ipz+i\delta t\}. \tag{1}$$

Будем считать $y=y(z)$ действительной положительной функцией.

Обобщенный волновой пакет не расплывается, если функция $|\Psi|^2=|\Psi(z)|^2$ является функцией только переменной z. В нашем случае это условие удовлетворяется автоматически.

Для нерасплывающегося обобщенного волнового пакета можно построить нелинейное уравнение:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+F(|\Psi|)\Psi. \tag{2}$$

Здесь $F(|\Psi|)$ — любая действительная функция, выбор которой реально ограничивается лишь условием разрешимости задачи. Уравнения такого вида используются, например, в нелинейной оптике [1—3]. В частном случае $F\sim|\Psi|^2$ это уравнение принято называть нелинейным уравнением Шрёдингера.

Введем линейный оператор $\widehat{L}=i\partial/\partial t+\partial^2/\partial x^2$, действие которого на функцию $\Psi(x, t)$ приводит к соотношению

$$\widehat{L}\Psi=\{y_{zz}+(p^2-\delta)y\}\exp\{ipz+i\delta t\},$$

и потребуем, чтобы функция $y(z)$ являлась решением уравнения

$$y_{zz}+(p^2-\delta)y-F(y)y=0. \tag{3}$$

Тогда функция (1) будет удовлетворять уравнению (2), линейному по фазе Ψ-функции (1).

Уравнение (3) можно считать линейным уравнением Шрёдингера

$$y_{zz}(z)+(E_0-U(z))y(z)=0,$$

с энергией $E_0=p^2-\delta$ и потенциалом $U(z)=F(y(z))$. Решение этого уравнения для ряда функций $F(y)$ может быть получено аналитически. Особенно простые решения получаются для степенной зависимости $F=F(y)$:

$$F(y)=-\beta y^{2\alpha},\quad \alpha>0,\ \beta>0.$$

В этом случае существуют решения нелинейных уравнений вида (2), экспоненциально убывающие на бесконечности, для которых величины I_1, I_2, I_3, определенные соотношениями

$$I_1=\int|\Psi|^2\,dx,\quad I_2=-\frac{i}{2}\int(\Psi^*\Psi_x-\Psi\Psi_x^*)\,dx,\quad I_3=\int\mathcal{H}\,dx,$$

$$\mathcal{H}=|\Psi_x|^2+2\int\limits_0^{|\Psi|}F(y)\,y\,dy,$$

не зависят от времени.

3. Решение нелинейного уравнения Шрёдингера

Решение уравнения (2) с нелинейностью, определяемой действительной функцией F, зависящей от $|\Psi|$, будем искать в виде обобщенного волнового пакета (1). Это решение можно записать в следующей форме:

$$\Psi(x,\ t)=y(z)\exp\{i(px-Et)\},$$

где

$$E=2p^2-\delta=p^2+E_0.$$

Функция $y(z)$ удовлетворяет уравнению

$$y_{zz}+(E_0-F(y))\,y=0,$$

для которого y_z является интегрирующим множителем [4].

Первый интеграл уравнения имеет вид

$$(y_z)^2=-E_0y^2+V(y),\ \text{где}\ V(y)=2\int\limits_0^y F(y')\,y'\,dy'.$$

Постоянная интегрирования в этом уравнении выбрана так, чтобы выполнялись условия

$$y(z_0)\to 0,\ \ y_z(z_0)\to 0\ \text{при}\ z_0\to-\infty.$$

Дальнейшее интегрирование в этом случае не представляет труда:

$$z-z_0=\int\limits_{y(z_0)}^{y(z)}\frac{dy'}{\sqrt{-E_0y'^2+V(y')}}.$$

Полученное выражение является решением нелинейного уравнения в неявном виде для любой допустимой функции $F(y)$. Постоянную интегрирования z_0 в этой формуле выберем так, чтобы решение уравнения было всюду регулярным.

В качестве примера построим решение для уравнения с нелинейностью вида $F(y)=-\beta y^{2\alpha}$. В этом случае квадратура имеет вид

$$z-z_0=\int\limits_{y(z_0)}^{y(z)}\frac{dy'}{y'\sqrt{-E_0-\frac{\beta}{\alpha+1}(y')^{2\alpha}}}.$$

Действительное решение существует при условии $E_0<0$. Так как граничное условие было задано при $z\to-\infty$, перед интегралами всюду выбран знак «плюс».

Вычислим этот интеграл:

$$2\alpha\gamma(z-z_0)=\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)\Bigg|_{x_0}^{x},$$

где

$$x=\frac{\beta}{(\alpha+1)\gamma^2}y^{2\alpha}.$$

Выберем постоянную z_0 следующим образом:

$$z_0=\frac{1}{2\alpha\gamma}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x_0}}{1+\sqrt{1-x_0}}\right).$$

Такой выбор приводит к сокращению расходимости при $z_0\to-\infty$, так что решение принимает вид

$$x=\mathrm{ch}^{-2}(\alpha\gamma z),$$

откуда следует выражение $y=\left\{\frac{(\alpha+1)\gamma^2}{\beta}\right\}^{\frac{1}{2\alpha}}\mathrm{ch}^{-\frac{1}{\alpha}}(\alpha\gamma z)$.

Таким образом, решением нелинейного уравнения Шрёдингера вида

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\beta|\Psi|^{2\alpha}\Psi$$

является функция

$$\Psi(x,\ t)=\left\{\frac{(\alpha+1)\gamma^2}{\beta}\right\}^{\frac{1}{2\alpha}}\mathrm{ch}^{-\frac{1}{\alpha}}\alpha\gamma(x-Vt)\exp\{i(px-Et)\},$$

описывающая нерасплывающийся волновой пакет с $E=p^2-\gamma^2$, а сохраняющиеся величины даются выражениями

$$I_1=\frac{2^{2/\alpha-1}}{\alpha\gamma}\left\{\frac{(\alpha+1)\gamma^2}{\beta}\right\}^{1/\alpha}B\left(\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\alpha}\right),\quad I_2=pI_1,$$

$$I_3=\left\{p^2+\frac{\alpha-2}{\alpha+2}\gamma^2\right\}I_1.$$

Подобным образом можно построить решение для других функций $F(y)$. Так, примененный нами метод квадратур позволяет найти решение нелинейного уравнения более общего вида, содержащего две нелинейности:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\beta|\Psi|^{2\alpha}\Psi-\delta|\Psi|^{\alpha}\Psi.$$

Решение этого уравнения в виде обобщенного волнового пакета дается выражением

$$\hat{L}\Psi=\{y_{zz}+(p^2-\delta)y\}\exp\{ipz+i\delta t\}\Psi(x,\ t)=\frac{a\exp\{i(px-Et)\}}{(b+\mathrm{ch}\,\alpha\gamma(x-Vt))^{1/\alpha}},$$

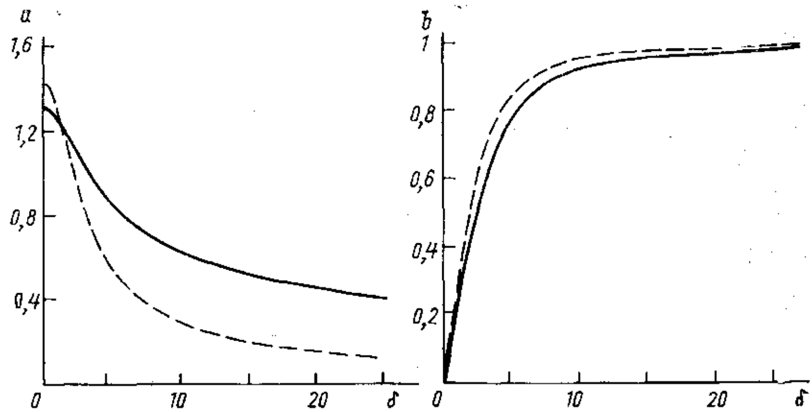
где

$$E=p^2-\gamma^2$$

$$a=\left\{\frac{(\alpha+2)\gamma^2}{\delta}\right\}^{1/\alpha}\left\{1+\frac{(\alpha+2)^2\beta\gamma^2}{(\alpha+1)\delta^2}\right\}^{-1/2\alpha},$$

$$b=\left\{1+\frac{(\alpha+2)^2\beta\gamma^2}{(\alpha+1)\delta^2}\right\}^{-1/2}.$$

Зависимость параметров a и b от δ при $\beta=\gamma=1$ для двух значений α показана на рисунке.



Зависимости a и b от δ при $\beta=\gamma=1$ и $\alpha=1$ (штриховая линия) и 2 (сплошная)

Предложенный метод построения решений в виде нерасплывающихся пакетов позволяет получать решения и в тех случаях, когда неизвестна или не существует соответствующая обратная задача рассеяния [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Маханьков В. Г., Рыбаков Ю. П., Санюк В. И.//УФН. 1994. **164, № 2.** С. 121.
2. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С.//УФН. 1986. **149, № 3.** С. 449.
3. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., 1979.
4. Халилов В. Р., Чижов Г. А. Динамика классических систем: Учеб. пособие. М., 1993.
5. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.

Поступила в редакцию
04.07.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 4

УДК 530.12:531.51

ФИНСЛЕРОВО ОБОБЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Г. С. Асанов

(кафедра теоретической физики)

Предложено обобщение гиперболических функций, позволяющее сформулировать обобщение преобразований Лоренца. Сохраняется закон простого сложения для быстрот. Обобщенные преобразования оставляют инвариантной специально-релятивистскую финслерову метрическую функцию.

1. Введение

Как хорошо известно, специальные преобразования Лоренца между двумя инерциальными системами отсчета S и S', движущимися в направлении общей оси x^1, могут быть записаны в виде