ЛИТЕРАТУРА

1. Асанов Г. С.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. **35.** № 1. С. 19.
2. Асанов Г. С.//Там же. № 2. С. 13.
3. Бюклинг Е., Каянти К. Кинематика элементарных частиц. М., 1975.
4. French A. P. Special Relativity. N. Y., 1968.

Поступила в редакцию
29.08.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 4

УДК 530.145

СВОЙСТВА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЕТЕ—СОЛПИТЕРА ДЛЯ ДВУХ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2

Н. П. Клепиков

(кафедра теоретической физики)

Рассмотрены релятивистская инвариантность системы уравнений, переход к импульсному представлению, центро-отделительное преобразование и предельные переходы к системе свободных частиц, к уравнению Дирака для одной частицы в кулоновском поле неподвижного центра и к уравнению Шрёдингера для двух частиц.

1. Введение

В предыдущей статье [1] автором предложена система двух уравнений для связанной системы двух частиц со спином 1/2 и электромагнитным взаимодействием, заменяющая уравнение Бете—Солпитера. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned}&\left(i\gamma^\sigma \frac{\partial}{\partial x_1^\sigma} - \frac{m_1 c}{\hbar}\right)\chi(x_1,\ x_2) = \\ &= \frac{e_1 e_2}{i\hbar c}\int dx_2' \gamma^\mu \mathcal{D}_{\mu\nu}(x_1 - x_2')\,\chi(x_1,\ x_2')\,\widetilde{\gamma^\nu \mathcal{G}^{(2)}}(x_2 - x_2'), \\ &\chi(x_1,\ x_2)\left(i\widetilde{\gamma}^\tau \frac{\partial}{\partial x_2^\tau} - \frac{m_2 c}{\hbar}\right) = \\ &= \frac{e_1 e_2}{i\hbar c}\int dx_1' \mathcal{G}^{(1)}(x_1 - x_1')\,\gamma^\mu \mathcal{D}_{\mu\nu}(x_1' - x_2)\,\chi(x_1',\ x_2)\,\widetilde{\gamma}^\nu.\end{aligned} \quad (1)$$

Использованы обычные обозначения квантовой электродинамики. Тильда означает транспонирование. Волновая функция $\chi(x_1, x_2)$ есть матрица 4×4, нормировка которой исследована в [1].

Ниже мы рассмотрим некоторые свойства системы (1), показывающие, что эта система уравнений накладывает на волновую функцию более сильные требования, чем уравнение Бете—Солпитера, которое может рассматриваться как условие разрешимости системы (1), а также удовлетворяет ряду предельных условий. В [1] рассмотрены некоторые принципы построения системы волновых уравнений для системы из $N\geqslant3$ частиц, но структура этих уравнений и их свойства исследованы недостаточно полно.

2. Предельный переход к случаю системы невзаимодействующих частиц

Уравнение Бете—Солпитера не допускает предельного перехода к системе двух уравнений Дирака для невзаимодействующих частиц при $e_1e_2 \to 0$. В то же время система (1) допускает такой переход. Действительно, положим в (1) $e_1e_2=0$, а волновую функцию представим в виде

$$\chi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\,\widetilde{\psi}_2(x_2). \qquad (2)$$

Тогда первое уравнение дает

$$\left(i\gamma^{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_1^{\sigma}} - \frac{m_1 c}{\hbar}\right)\psi_1(x_1) = 0, \qquad (3)$$

а транспонирование второго уравнения приводит к

$$\left(i\gamma^{\tau}\frac{\partial}{\partial x_2^{\tau}} - \frac{m_2 c}{\hbar}\right)\psi_2(x_2) = 0. \qquad (4)$$

3. Релятивистская инвариантность системы уравнений

Известно, что при переходе к описанию физических систем с точки зрения наблюдателя в иной инерциальной системе отсчета, при котором точки, имевшие координаты x, приобретают координаты $x' = \Lambda x + a$, причем $\widetilde{\Lambda} g \Lambda = g$ (новая система отсчета четырехмерно повернута матрицей Λ по отношению к старой, а затем сдвинута на a; при этом метрика не меняется), уравнение Дирака для одной частицы записывается в штрихованных координатах в том же виде, как и в нештрихованных, если старая волновая функция связана с новой соотношением

$$\psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\,\psi'(x'), \qquad (5)$$

а матрица $S(\Lambda)$ удовлетворяет условиям

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^{\lambda} S(\Lambda) = \Lambda^{\lambda}_{\mu}\gamma^{\mu}, \quad \Lambda^{\lambda}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}, \quad S(\Lambda)\,\gamma^0 \widetilde{S}(\Lambda) = \operatorname{sign}\Lambda^0_0 \gamma^0. \qquad (6)$$

Поскольку при отсутствии взаимодействия между частицами волновая функция, являющаяся решением уравнения (1), переходит в произведение спинора первой частицы на транспонированный спинор второй, совместная волновая функция $\chi(x_1, x_2)$ должна преобразовываться при преобразовании Λ посредством умножения на $S^{-1}(\Lambda)$ слева и на $\widetilde{S}^{-1}(\Lambda)$ справа:

$$\chi(x_1, x_2) = S^{-1}(\Lambda)\,\chi'(x_1', x_2')\,\widetilde{S}^{-1}(\Lambda). \qquad (7)$$

Действительно, подставляя $\chi(x_1, x_2)$ в виде (7) в уравнения (1), умножая эти уравнения на $S(\Lambda)$ слева и на $\widetilde{S}(\Lambda)$ справа и пользуясь соотношениями (6), инвариантностью четырехмерного элемента объема и функции распространения фотона, находим систему уравнений, отличающуюся от (1) только тем, что все координаты отнесены к штрихованной системе отсчета.

4. Переход к импульсному представлению

Поскольку функции распространения электронов и фотона значительно проще записываются в импульсном представлении, чем в координатном, целесообразно произвести переход к импульсному представлению. В уравнениях (1) сделаем подстановку

$$\chi(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\int d^4p_1 d^4p_2 \chi(p_1, p_2)\exp\left(-i\frac{x_1p_1}{\hbar} - i\frac{x_2p_2}{\hbar}\right),$$

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x) = \frac{\hbar^2}{(2\pi\hbar)^4}\int d^4q \mathscr{D}_{\mu\nu}(q)\exp\left(-i\frac{xq}{\hbar}\right), \tag{8}$$

$$\mathscr{G}^{(a)}(x) = \frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^4}\int d^4p \mathscr{G}^{(a)}(p)\exp\left(-i\frac{xp}{\hbar}\right).$$

Все 8 компонент векторов p_1 и p_2 являются независимыми переменными. Тогда находим

$$(\gamma^\sigma p_{1\sigma} - m_1c)\chi(p_1, p_2) = \frac{e_1e_2}{i(2\pi)^4\hbar c}\int d^4q\gamma^\mu\mathscr{D}_{\mu\nu}(q)\chi(p_1-q, p_2+q)\widetilde{\gamma}^\nu\widetilde{\mathscr{G}}^{(2)}(p_2),$$

$$\chi(p_1, p_2)(\widetilde{\gamma}^\tau p_{2\tau} - m_2c) = \frac{e_1e_2}{i(2\pi)^4\hbar c}\mathscr{G}^{(1)}(p_1)\int d^4q\gamma^\mu\mathscr{D}_{\mu\nu}(q)\chi(p_1-q, \tag{9}$$

$$p_2+q)\widetilde{\gamma}^\nu.$$

5. Центро-отделительное преобразование в импульсном и координатном представлениях

Инвариантностью системы уравнений для системы частиц относительно выбора инерциальной системы отсчета можно воспользоваться для центро-отделительного преобразования [2] системы уравнений. Безвращательному лоренцовскому переходу от системы отсчета, где для атома в целом $\mathbf{P}=0$, а масса атома равна M, к системе отсчета, где импульс имеет заданное значение $\mathbf{P}=\mathbf{n}Mc\,\mathrm{sh}\,\chi$, а энергия равна $\mathscr{E}=Mc^2\,\mathrm{ch}\,\chi$, соответствует матрица

$$\Lambda(P) = \begin{pmatrix} \frac{\mathscr{E}}{Mc^2} & \frac{P_x}{Mc} & \frac{P_y}{Mc} & \frac{P_z}{Mc} \\ \frac{P_x}{Mc} & 1+\frac{P_x^2}{M(\mathscr{E}+Mc^2)} & \frac{P_xP_y}{M(\mathscr{E}+Mc^2)} & \frac{P_xP_z}{M(\mathscr{E}+Mc^2)} \\ \frac{P_y}{Mc} & \frac{P_xP_y}{M(\mathscr{E}+Mc^2)} & 1+\frac{P_y^2}{M(\mathscr{E}+Mc^2)} & \frac{P_yP_z}{M(\mathscr{E}+Mc^2)} \\ \frac{P_z}{Mc} & \frac{P_xP_z}{M(\mathscr{E}+Mc^2)} & \frac{P_yP_z}{M(\mathscr{E}+Mc^2)} & 1+\frac{P_z^2}{M(\mathscr{E}+Mc^2)} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

действующая на компоненты координат и импульсов, и матрица $S(P) = \mathrm{ch}(\chi/2) + \mathbf{n}\vec{\alpha}\,\mathrm{sh}(\chi/2)$, имеющая вид

$$S(P) = \frac{1}{\sqrt{2M(\mathscr{E}+Mc^2)}}\begin{pmatrix} \mathscr{E}/c+Mc & 0 & P_z & P_x-iP_y \\ 0 & \mathscr{E}/c+Mc & P_x+iP_y & -P_z \\ P_z & P_x-iP_y & \mathscr{E}/c+Mc & 0 \\ P_x+iP_y & -P_x & 0 & \mathscr{E}/c-Mc \end{pmatrix} \tag{11}$$

и действующая на компоненты волновой функции. Здесь $\mathscr{E}$, $\mathbf{P}$ и M связаны соотношением $\mathscr{E}^2 - c^2\mathbf{P}^2 = M^2c^4$.

Центро-отделительное преобразование представляется в виде

$$\chi(p_1, p_2) = \delta^4(p_1+p_2-P)S(P)\varphi(\mathbf{k}, k_0)\widetilde{S}_1(P)(2\pi\hbar)^2, \tag{12}$$

где величины $\mathbf{k}$ и k_0 определены в [2] и обозначены там как $\mathbf{k}$ и q. При пространственном повороте системы отсчета на угол φ вектор $\mathbf{k}$ поворачивается на тот же угол в обратную сторону, а k_0 не меняется. При лоренцевском переходе вектор $\mathbf{k}$ испытывает поворот на угол Ω (см. [2]), а k_0 не меняется.

Уравнения (9) приобретают вид

$$(\gamma^\sigma p_{1\sigma}^{(c)}-m_1c)\,\varphi(\mathbf{k},\ k_0)=\frac{e_1e_2}{i\,(2\pi)^4\,\hbar c}\int d\mathbf{q}\,dq_0\,\gamma^\mu\mathscr{D}_{\mu\nu}(\mathbf{q},\ q_0)\,\varphi(\mathbf{k}-\mathbf{q},\ k_0-q_0)\times$$
$$\times\widetilde{\gamma}^\nu\mathscr{G}^{(2)}(p_2^{(c)}),$$
$$\varphi(\mathbf{k},\ k_0)\,(\widetilde{\gamma}^\tau p_{2\tau}^{(c)}-m_2c)=$$
$$=\frac{e_1e_2}{i\,(2\pi)^4\,\hbar c}\mathscr{G}^{(1)}(p_1^{(c)})\int d\mathbf{q}\,dq_0\,\gamma^\mu\mathscr{D}_{\mu\nu}(\mathbf{q},\ q_0)\,\varphi(\mathbf{k}-\mathbf{q},\ k_0-q_0)\,\widetilde{\gamma}^\nu, \tag{13}$$

где верхний индекс (c) означает, что соответствующая величина берется в системе центра атома (системе отсчета, где $\mathbf{P}=0$). При квантовомеханическом описании система событий характеризуется не точкой в фазовом пространстве системы, а облаком событий, ограниченным в своих размерах снизу соотношениями неопределенности.

После замены переменных интегрирования $\mathbf{k}-\mathbf{q}\to\mathbf{q}$, $k_0-q_0\to q_0$ находим

$$\begin{aligned}&(\gamma^\sigma p_{1\sigma}^{(c)}-m_1c)\,\varphi(\mathbf{k},\ k_0)=\\&=\frac{e_1e_2}{i\,(2\pi)^4\,\hbar c}\int d\mathbf{q}\,dq_0\,\gamma^\mu\mathscr{D}_{\mu\nu}(\mathbf{k}-\mathbf{q},\ k_0-q_0)\,\varphi(\mathbf{q},\ q_0)\,\widetilde{\gamma}^\nu\widetilde{\mathscr{G}}^{(2)}(p_2^{(c)}),\\&\varphi(\mathbf{k},\ k_0)\,(\widetilde{\gamma}^\tau p_{2\tau}^{(c)}-m_1c)=\\&=\frac{e_1e_2}{i\,(2\pi)^4\,\hbar c}\mathscr{G}^{(1)}(p_1^{(c)})\int d\mathbf{q}\,dq_0\,\gamma^\mu\mathscr{D}_{\mu\nu}(\mathbf{k}-\mathbf{q},\ k_0-q_0)\,\varphi(\mathbf{q},\ q_0)\,\widetilde{\gamma}^\nu.\end{aligned}\tag{14}$$

В (13) и (14)

$$\begin{aligned}&\mathbf{p}_1^{(c)}=\mathbf{k},\ \ \mathbf{p}_2^{(c)}=-\mathbf{k},\ \ \mathscr{E}_1^{(c)}=\frac{m_1Mc^2}{m_1+m_2}+ck_0,\ \ \mathscr{E}_2^{(c)}-\frac{m_2Mc^2}{m_1+m_2}-ck_0,\\&\mathscr{D}_{\mu\nu}(\mathbf{q},\ q_0)=\frac{4\pi g_{\mu\nu}}{q_0^2-\mathbf{q}^2+i0},\ \ \mathscr{G}^{(a)}(p_a^{(c)})=\frac{\gamma p_a^{(c)}+m_ac}{p_{a0}^2-\mathbf{p}_a^2-m_a^2c^2+i0}.\end{aligned}\tag{15}$$

Переходя согласно (8) к координатному представлению, получим

$$\chi(x_1,\ x_2)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}(\mathbf{PR}-\mathscr{E}T)\right)S(P)\,\varphi(\vec{\rho},\ \tau)\,\widetilde{S}(P), \tag{16}$$

где $\mathscr{E}$ и $\mathbf{P}$ — собственные значения операторов энергии и импульса всей системы с массой M, а $\mathbf{R}$, T, $\vec{\rho}$ и τ — переменные для облака событий, определенные в [2]. Фаза $\Phi=\mathbf{PR}-\mathscr{E}T$ лоренц-инвариантна. При сдвиге начала координат на $\mathbf{a}$ и τ волновая функция приобретает фазовый множитель $\exp\left(\frac{i}{\hbar}(\mathbf{Pa}-\mathscr{E}\tau)\right)$.

Функция $\varphi(\vec{\rho},\tau)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\left(i\gamma^0\left(\frac{m_1Mc}{(m_1+m_2)\,\hbar}+\frac{\partial}{\partial\tau}\right)-i\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial\vec{\rho}}-\frac{m_1c}{\hbar}\right)\varphi(\vec{\rho},\ \tau)=$$

$$= \frac{e_1 e_2}{i\hbar c} \int d\vec{\rho}'\, d\tau'\, \gamma^\mu \mathscr{D}_{\mu\nu} (\vec{\rho}', \tau')\, \varphi (\vec{\rho}', \tau')\, \widetilde{\gamma}^\nu \widetilde{\mathscr{G}}^{(2)} (\vec{\rho}' - \vec{\rho}, \tau' - \tau),$$

$$\varphi (\vec{\rho}, \tau) \left(i\gamma^0 \left(\frac{m_2 Mc}{(m_1 + m_2)\hbar} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \widetilde{\vec{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \vec{\rho}} - \frac{m_2 c}{\hbar} \right) =$$

$$= \frac{e_1 e_2}{i\hbar c} \int d\vec{\rho}'\, d\tau' \mathscr{G}^{(1)} (\vec{\rho}' - \vec{\rho}, \tau' - \tau)\, \gamma^\mu \mathscr{D}_{\mu\nu} (\vec{\rho}', \tau')\, \varphi (\vec{\rho}', \tau')\, \widetilde{\gamma}^\nu. \qquad (17)$$

6. Свойство симметрии волновой функции

Рассмотрим второе уравнение (14), транспонируем его, заменим в нем $m_1 \rightleftarrows m_2$, $p_1^{(c)} \rightleftarrows p_2^{(c)}$ (или, что то же самое, как показывают соотношения (15), $\mathbf{k} \rightleftarrows -\mathbf{k}$, $k_0 \rightleftarrows -k_0$) и сравним его с первым уравнением той же системы. Они совпадают или пропорциональны, если

$$\widetilde{\varphi} (-\mathbf{k}, -k_0; m_2, m_1) = \pm \varphi (\mathbf{k}, k_0; m_1, m_2). \qquad (18)$$

В частном случае, когда $m_1 = m_2$, опуская массы, запишем

$$\varphi (-\mathbf{k}, -k_0) = \pm \varphi (\mathbf{k}, k_0). \qquad (19)$$

Выбор знака определяется нерелятивистским пределом.

Соотношения (18) и (19) и являются теми дополнительными условиями, которые накладываются на волновую функцию в силу удовлетворения обоих уравнений (1), а не только уравнения Бете—Солпитера, и обеспечивают совместность уравнений. Эти соотношения были найдены в дипломной работе [3], выполненной под руководством автора.

7. Предельный переход от системы уравнений типа Бете—Солпитера для двух частиц к уравнению Дирака для одной частицы в кулоновом поле неподвижного центра

В уравнениях (9) сделаем замену переменных $p_1 - q \rightleftarrows q$ и при $e_1 e_2 = -e^2$ запишем систему несколько подробнее:

$$(\gamma^0 p_{10} - \vec{\gamma} \mathbf{p}_1 - m_1 c)\, \chi (p_1, p_2) = \frac{4\pi i e^2}{(2\pi)^4 \hbar c} \int dq_0\, d\mathbf{q}\, \gamma^\mu g_{\mu\nu} \chi (q, p_1 + p_2 - q)\, \widetilde{\gamma}^\nu \times$$

$$\times \frac{1}{(p_{10} - q_0)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{q})^2 + i0} \frac{\gamma^0 p_{20} - \widetilde{\vec{\gamma}} \mathbf{p}_2 + m_2 c}{p_{20}^2 - \mathbf{p}_2^2 - m_2^2 c^2 + i0},$$

$$\chi (p_1, p_2)\, (\gamma^0 p_{20} - \widetilde{\vec{\gamma}} \mathbf{p}_2 - m_2 c) = \frac{4\pi i e^2}{(2\pi)^4 \hbar c} \frac{\gamma_0 p_{10} - \vec{\gamma} \mathbf{p}_1 + m_1 c}{p_{10}^2 - \mathbf{p}_1^2 - m_1^2 c^2 + i0} \int dq_0 \times \qquad (20)$$

$$\times d\mathbf{q}\, \gamma^\mu g_{\mu\nu} \chi (q, p_1 + p_2 - q)\, \widetilde{\gamma}^\nu \frac{1}{(p_{10} - q_0)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{q})^2 + i0}.$$

Волновую функцию, входящую в эти уравнения, представим в виде

$$\chi (p_1, p_2) = \chi (\mathbf{p}_1) \frac{1}{p_{10} - (\mathscr{E}/c - i0)} \frac{1}{p_{20} - (m_2 c - i0)} \delta^3 (\mathbf{p}_2). \qquad (21)$$

После подстановки (21) в систему уравнений (20) последняя принимает вид

$$(\gamma^0 p_{10}-\vec{\gamma}\mathbf{p}_1-m_1c)\,\chi(\mathbf{p}_1)\,\frac{1}{p_{10}-(\mathscr{E}/c-i0)}\,\frac{1}{p_{20}-(m_2c-i0)}\,\delta^3(\mathbf{p}_2)=$$

$$=\frac{4\pi ie^2}{(2\pi)^4\hbar c}\int d\mathbf{q}\,\gamma^\mu g_{\mu\nu}\chi(\mathbf{q})\,\widetilde{\gamma}^\nu\delta^3(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{q})\,\frac{\gamma^0 p_{20}-\vec{\widetilde{\gamma}}\mathbf{p}_2+m_2c}{p_{20}^2-\mathbf{p}_2^2-m_2^2c^2+i0}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq_0}{q_0-(\mathscr{E}/c-i0)}\,\frac{1}{p_{10}+p_{20}-q_0-(m_2c-i0)}\,\frac{1}{(p_{10}-q_0)^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2+i0},\tag{22}$$

$$\chi(\mathbf{p}_1)\,(\gamma^0 p_{20}-\vec{\widetilde{\gamma}}\mathbf{p}_2-m_2c)\,\frac{1}{p_{10}-(\mathscr{E}/c-i0)}\,\frac{1}{p_{20}-(m_2c-i0)}\,\delta^3(\mathbf{p}_2)=$$

$$=\frac{4\pi ie^2}{(2\pi)^4\hbar c}\,\frac{\gamma^0 p_{10}-\vec{\gamma}\mathbf{p}_1+m_1c}{p_{10}^2-\mathbf{p}_1^2-m_1^2c^2+i0}\int d\mathbf{q}\,\gamma^\mu g_{\mu\nu}\chi(\mathbf{q})\,\widetilde{\gamma}^\nu\delta^3(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{q})\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq_0}{q_0-(\mathscr{E}/c-i0)}\,\frac{1}{p_{10}+p_{20}-q_0-(m_2c-i0)}\,\frac{1}{(p_{10}-q_0)^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2+i0}.$$

Проинтегрируем обе части каждого из уравнений по $\mathbf{p}_2$ в бесконечных трехмерных пределах. В результате в правой части уравнения первого уравнения (22) $\mathbf{p}_2$ заменяется на $\mathbf{q}-\mathbf{p}_1$, а в левой части второго уравнения $\mathbf{p}_2$ заменяется нулем.

В получившиеся уравнения входит интеграл

$$I_0=\int\limits_{-\infty}^{\infty} dq_0/\{[q_0-(\mathscr{E}/c-i0)]\,[q_0-(p_{10}+p_{20}-m_2c+i0)]\times$$

$$\times[q_0-(p_{10}+\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})^2}-i0)]\,[q_0-(p_{10}-\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}+i0)]\}=$$

$$=-2\pi i\,\{1/([p_{10}-\mathscr{E}/c+p_{20}-m_2c+i0]\,[(p_{20}-m_2c)^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2+i0])+$$

$$+1/[2\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}\,[p_{10}-\mathscr{E}/c-\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}+i0)]\,[p_{20}-m_2c+$$

$$+\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}+i0]]\}.\tag{23}$$

Система уравнений теперь пишется в виде

$$(\gamma^0 p_{10}-\vec{\gamma}\mathbf{p}_1-m_1c)\,\chi(\mathbf{p}_1)\,\frac{1}{p_{10}-(\mathscr{E}/c-i0)}\,\frac{1}{p_{20}-(m_2c-i0)}=$$

$$=\frac{4\pi ie^2}{(2\pi)^4\hbar c}\int d\mathbf{q}\,\gamma^\mu g_{\mu\nu}\chi(\mathbf{q})\,\widetilde{\gamma}^\nu\,\frac{\gamma^0 p_{10}+\vec{\widetilde{\gamma}}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})+m_2c}{p_{30}^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2-m_2^2c^2+i0}\,(-2\pi i)\times$$

$$\times\{1/[p_{10}-(\mathscr{E}/c-p_{20}+m_2c-i0)]\,[p_{20}-m_2c)^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2+i0]+$$

$$+1/[2\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}\,[p_{10}-(\mathscr{E}/c+\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}-i0)]\times$$

$$\times[p_{20}-m_2c+\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}+i0]]\},\tag{24}$$

$$\chi(\mathbf{p}_1)\,(\gamma^0 p_{20}-m_2c)\,\frac{1}{p_{10}-(\mathscr{E}/c-i0)}\,\frac{1}{p_{20}-(m_2c-i0)}=$$

$$=\frac{4\pi ie^2}{(2\pi)^4\hbar c}\,\frac{\gamma^0 p_{10}-\vec{\gamma}\mathbf{p}_1+m_1c}{p_{10}^2-\mathbf{p}_1^2-m_1^2c^2+i0}\int d\mathbf{q}\,\gamma^\mu g_{\mu\nu}\chi(\mathbf{q})\,\widetilde{\gamma}^\nu\,(-2\pi i)\times$$

$$\times\{1/([p_{20}-(m_2c+\mathscr{E}/c-p_{10}-i0)][(p_{20}-m_2c)^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2+i0])+$$
$$+1/[2\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}[p_{10}-\mathscr{E}/c-\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}+i0]\times$$
$$\times[p_{20}-(m_2c-\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}-i0)]]\}. \qquad (25)$$

Проинтегрируем уравнение (25) по p_{20} в бесконечных пределах, а затем — по p_{10} в таких же пределах. В правую часть последнего уравнения входит интеграл, который в результате замены переменных $p_{20}-m_2c\to p_{20}$ принимает вид

$$I_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_{10}\frac{\gamma^0p_{10}-\vec{\gamma}\mathbf{p}_1+m_1c}{p_{10}^2-\mathbf{p}_1^2-m_1^2c^2+i0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_{20}\times$$
$$\times\{1/([p_{20}-(\mathscr{E}/c-p_{10}-i0)][p_{20}^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2-i0])+$$
$$+1/[2\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}[p_{10}-\mathscr{E}/c-\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}+i0][p_{20}+\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}+i0]]\},$$
$$(25)$$

не зависящий от m_2. Разделив уравнение

$$\chi(\mathbf{p}_1)\,m_2(\gamma^0-1)=\frac{-8e^2iI_2}{(2\pi)^4\hbar c}\int d\mathbf{q}\,\gamma^\mu g_{\mu\nu}\chi(\mathbf{q})\,\tilde{\gamma}^\nu \qquad (26)$$

на m_2 и перейдя к пределу $m_2\to\infty$, получаем условие на волновую функцию

$$\chi(\mathbf{p}_1)(\gamma^0-1)=0. \qquad (27)$$

Этому условию удовлетворяют функции, имеющие произвольные компоненты в первых двух столбцах и нули в последних двух.

Первое уравнение (24) проинтегрируем сначала по p_{10} в бесконечных пределах, а затем — по p_{20} в таких же пределах. Получаем уравнение

$$\left(\gamma^0\frac{\mathscr{E}}{c}-\vec{\gamma}\mathbf{p}_1-m_1c\right)\chi(\mathbf{p}_1)=\frac{4\pi ie^2}{(2\pi)^4\hbar c}\,2\int d\mathbf{q}\,\gamma^\mu g_{\mu\nu}\chi(\mathbf{q})\,\tilde{\gamma}^\nu I_1, \qquad (28)$$

где

$$I_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_{20}\frac{\gamma^0p_{20}+\tilde{\vec{\gamma}}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})+m_2c}{p_{20}^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2-m_2^2c^2+i0}\left\{\frac{1}{(p_{20}-m_2c)^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2+i0}+\right.$$
$$\left.+1/\{2\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}[p_{20}-(m_2c-\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}-i0)]\}\right\}=$$
$$=2\pi i\{[\gamma^0(m_2c-\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}+\tilde{\vec{\gamma}}(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})+m_2c]/\{-2\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}\times$$
$$\times[(m_2c-\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2})^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2-m_2^2c^2]\}+$$
$$+(1/[(\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2+m_1^2c^2}+m_2c)^2-(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2]+$$
$$+1/[2\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}[-\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2+m_2^2c^2}-m_2c+\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}]])\times$$
$$\times(-\gamma^0\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2+m_2^2c^2}-\tilde{\vec{\gamma}}(\mathbf{q}-\mathbf{p}_1)+m_2c)/[-2\sqrt{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2+m_2^2c^2}]\}.$$
$$(29)$$

Предел этого интеграла при $m_2 \to \infty$ равен

$$\lim_{m_2\to\infty} I_1 = \frac{\pi i}{2} \frac{\gamma^0+1}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}. \tag{30}$$

Легко проверить, что для функции, удовлетворяющей условию (27),

$$\gamma^\mu g_{\mu\nu}\chi(\mathbf{q})\tilde{\gamma}^\nu(\gamma^0+1) = 2\gamma^0\chi(\mathbf{q}). \tag{31}$$

Тогда уравнение (28) принимает вид

$$\left(\gamma^0\frac{\mathscr{E}}{c} - \vec{\gamma}\mathbf{p}_1 - m_1 c\right)\chi(\mathbf{p}_1) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar c}\gamma^0\int d\mathbf{q}\frac{\chi(\mathbf{q})}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{q})^2}, \tag{32}$$

что совпадает с уравнением Дирака для частицы со спином 1/2 и массой m_1 в притягивающем поле неподвижного центра. Каждый из двух столбцов волновой функции удовлетворяет одному и тому же уравнению.

Этот результат опровергает утверждение некоторых авторов [4, 5] о невозможности точного предельного перехода от теории Бете—Солпитера к теории Дирака при $m_2 \to \infty$. Заметим, что эти авторы исходили не из системы (1), а из одного уравнения с двумя операторами Дирака или одного уравнения без операторов Дирака.

8. Предельный переход от уравнения Бете—Солпитера для двух частиц к уравнению Шрёдингера для связанной системы из двух частиц

Переход к нерелятивистскому случаю наиболее удобно производить, исходя из уравнения Бете—Солпитера без операторов Дирака. Совершив над ним центро-отделительное преобразование, мы можем при $e_1 e_2 = -e^2$ записать его в виде

$$\varphi(\mathbf{k}, k_0) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4\hbar c}\frac{\gamma^0(m_1Mc/(m_1+m_2)+k_0) - \vec{\gamma}\mathbf{k} + m_1c}{(m_1Mc/(m_1+m_2)+k_0)^2 - \mathbf{k}^2 - m_1^2c^2 + i0}\int d\mathbf{q}\,dq_0\gamma^\mu \times$$
$$\times \mathscr{D}_{\mu\nu}(\mathbf{k}-\mathbf{q}, k_0-q_0)\varphi(\mathbf{q}, q_0)\tilde{\gamma}^\nu\frac{\gamma^0(m_2Mc/(m_1+m_2)-k_0) + \tilde{\vec{\gamma}}\mathbf{k} + m_2c}{(m_2Mc/(m_1+m_2)-k_0)^2 - \mathbf{k}^2 - m_2^2c^2 + i0}. \tag{33}$$

Волновую функцию, входящую в (33), представим в виде

$$\varphi(\mathbf{k}, k_0) = \frac{\varphi(\mathbf{k})\sqrt{2\pi\hbar}}{k_0 - \{c[(m_1^2-m_2^2)/2M + ((m_2-m_1)M)/2m] - i0\}}, \tag{34}$$

где матрица $\varphi(\mathbf{k})$ имеет только четыре отличных от нуля компоненты в верхнем левом углу и $m = m_1 + m_2$. Представив массу системы в приближенном виде $M = m_1 + m_2 + \mathfrak{T}/c^2$, находим

$$\frac{\varphi(\mathbf{k})}{k_0 - \{c[(m_1^2-m_2^2)/2M + (m_2+m_1)M/2m] - i0\}} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4\hbar c}\times$$
$$\times\frac{\gamma^0(m_1c + m_1\mathfrak{T}/((m_1+m_2)c) + k_0) - \vec{\gamma}\mathbf{k} + m_1c}{[m_1c + m_1\mathfrak{T}/((m_1+m_2)c) + k_0]^2 - \mathbf{k}^2 - m_1^2c^2 + i0}\int d\mathbf{q}\int dq_0/\{q_0 -$$
$$- c[(m_1^2-m_2^2)/2M + (m_2-m_1)M/2m] + i0\}\gamma^\mu\mathscr{D}_{\mu\nu}(\mathbf{k}-\mathbf{q}, k_0-q_0)$$

$$\times \frac{\varphi(\mathbf{q})}{q_0 - \{c[(m_1^2 - m_2^2)/2M + M(m_2 - m_1)/2m] - i0\}} \times$$

$$\times \tilde{\gamma}^\nu \frac{\gamma^0 (m_2 c + m_2 \mathfrak{T}/((m_1 + m_2)c) - k_0) + \tilde{\vec{\gamma}}\mathbf{k} + m_2 c}{(m_2 c + m_2 \mathfrak{T}/((m_1 + m_2)c) - k_0)^2 - \mathbf{k}^2 - m_2^2 c^2 + i0}. \tag{35}$$

Функцию распространения фотона возьмем в кулоновой калибровке. Выписываем только ее 00-компоненту $\mathscr{D}_{00} = -4\pi/(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2$, так как для волновой функции рассматриваемой структуры все остальные компоненты суммы $\gamma^\mu \mathscr{D}_{\mu\nu} \varphi(\mathbf{q}, q_0)\gamma^\nu$ исчезают при умножении ее на $\gamma^0 + 1$ слева. Тогда интеграл по q_0 вычисляется тривиально, после чего вычисляется интеграл по k_0 от обеих частей уравнения в бесконечных пределах:

$$\varphi(\mathbf{k}) = \frac{-4\pi i e}{(2\pi)^4 \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{c} \frac{\gamma^0 (m_1 c + m_1 \mathfrak{T}/((m_1 + m_2)c) + k_0) - \vec{\gamma}\mathbf{k} + m_1 c}{(m_1 c + m_1 \mathfrak{T}/((m_1 + m_2)c) + k_0)^2 - \mathbf{k}_2 - m_1^2 c^2 + i0} \times$$

$$\times \int \frac{d\mathbf{q}\, \varphi(\mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \frac{\gamma^0 (m_2 c + m_2 \mathfrak{T}/((m_1 + m_2)c) - k_0) + \tilde{\vec{\gamma}}\mathbf{k} + m_2 c}{(m_2 c + m_2 \mathfrak{T}/((m_1 + m_2)c) - k_0)^2 - \mathbf{k}^2 - m_2^2 c^2 + i0}. \tag{36}$$

Интеграл, входящий в (36), равен

$$I = \frac{2\pi i}{c} \left\{ \frac{\gamma^0 \left(-\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_1^2 c^2}\right) - \vec{\gamma}\mathbf{k} + m_1 c}{-2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_1^2 c^2}} \times \right.$$

$$\times \Phi \frac{\gamma^0 \left((m_1 + m_2)c + \mathfrak{T}/c + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_1^2 c^2}\right) + \tilde{\vec{\gamma}}\mathbf{k} + m_2 c}{\left((m_1 + m_2)c + \mathfrak{T}/c + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_1^2 c^2}\right)^2 - \mathbf{k}^2 - m_2^2 c^2} +$$

$$+ \frac{\gamma^0 \left((m_1 + m_2)c + \mathfrak{T}/c - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_2^2 c^2}\right) - \vec{\gamma}\mathbf{k} + m_1 c}{\left((m_1 + m_2)c + \mathfrak{T}/c - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_2^2 c^2}\right)^2 - m_1^2 c^2} \times$$

$$\left. \times \Phi \frac{\gamma^0 \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_2^2 c^2} + \tilde{\vec{\gamma}}\mathbf{k} + m_2 c}{-2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_2^2 c^2}} \right\}, \quad \Phi = \int d\mathbf{q}\, \varphi(\mathbf{q})/(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2. \tag{37}$$

Теперь переходим к пределу при $c \to \infty$. Предел первого члена (37) равен нулю, а второй дает

$$2\pi i \frac{\gamma^0 + 1}{2\left(\mathfrak{T} - \dfrac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2}\mathbf{k}^2\right)} \Phi \frac{\gamma^0 + 1}{2}. \tag{38}$$

С учетом того что $(\gamma^0 + 1)\varphi(\mathbf{q})(\gamma^0 + 1) = 4\varphi(\mathbf{q})$, уравнение для функции $\varphi(\mathbf{k})$ приобретает вид

$$\left(\mathfrak{T} - \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2}\mathbf{k}^2\right)\varphi(\mathbf{q}) = -\frac{e^2}{2\pi^2 \hbar} \int d\mathbf{q} \frac{\varphi(\mathbf{q})}{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}, \tag{39}$$

совпадающий с уравнением Шрёдингера в импульсном представлении для двух частиц с массами m_1 и m_2 и зарядами e и $-e$, взаимодействующих по закону Кулона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клепиков Н. П.//Ядерная физика. 1995. **58**, № 4. С. 647.
2. Клепиков Н. П.//Там же. 1995. **58**, № 5. С. 939.
3. Урюпина Н. В. Дипломная работа. МГУ (физ. фак.), 1992.
4. Baker W. A., Glover F. N.//Phys. Rev. 1955. **99**. P. 317.
5. Gorelick J. L., Groth H.//J. Phys. G. 1977. **3**. P. 751.

Поступила в редакцию
07.10.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 4

УДК 519.2

О ФАКТИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ, ВЫПОЛНЕННЫХ НА ЛИНЕЙНОМ ПРИБОРЕ

Ю. П. Пытьев, С. П. Бондаренко, Д. В. Поляков

(кафедра компьютерных методов физики)

Введено и исследовано понятие эффективного ранга линейной модели эксперимента, определяющего фактическую размерность как результатов измерений, так и множества значений определяемых параметров исследуемого объекта. Показано, что величина эффективного ранга позволяет охарактеризовать качество решения задачи интерпретации измерений: предельную разрешающую способность, информативность измерений и другие важные характеристики эксперимента.

Основные обозначения

$\mathscr{R}_m$ — евклидово пространство;
$\dim \mathscr{R}_s = s$ — размерность $\mathscr{R}_s$;
$\mathscr{R}(A)$ — пространство значений оператора A;
$\mathscr{N}(A)$ — нуль-пространство (ядро) оператора A;
$\mathscr{N}^{\perp}(A)$ — ортогональное дополнение $\mathscr{N}(A)$;
$\operatorname{rank} A$ — ранг оператора A;
A^* — оператор, сопряженный с A;
A^- — оператор, псевдообратный к A;
P, Π — ортогональные проекторы;
$\|A\|_2$ — норма Гильберта—Шмидта оператора A.

Введение

В последнее время при проведении различного рода физических экспериментов неоднократно проявлялся интерес к вопросу о том, какую информацию об измеряемой величине можно получить с гарантированной точностью. Понятно, что в каждом конкретном эксперименте ответ на поставленный вопрос будет определяться техническими характеристиками используемых приборов, точностью модели эксперимента и помехами, возникающими в процессе измерения. Было бы неплохо построить количественную меру, которая в этом смысле характеризовала бы качество решения задачи интерпретации. Тогда, используя математическую модель прибора, вид помех, сопровождающих процесс измерения, и задавая желаемую точность, исследователь до проведения эксперимента знал бы предельные возможности прибора.

Рассмотрим математическую модель типичной линейной схемы измерений в физических исследованиях, определенную равенством

$$\xi = Af + \nu, \qquad (1)$$