ЛИТЕРАТУРА

1. Клепиков Н. П.//Ядерная физика. 1995. 58, № 4. С. 647.
2. Клепиков Н. П.//Там же. 1995. 58, № 5. С. 939.
3. Урюпина Н. В. Дипломная работа. МГУ (физ. фак.), 1992.
4. Baker W. A., Glover F. N.//Phys. Rev. 1955. 99. P. 317.
5. Gorelick J. L., Groth H.//J. Phys. G. 1977. 3. P. 751.

Поступила в редакцию
07.10.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 4

УДК 519.2

О ФАКТИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ, ВЫПОЛНЕННЫХ НА ЛИНЕЙНОМ ПРИБОРЕ

Ю. П. Пытьев, С. П. Бондаренко, Д. В. Поляков

(кафедра компьютерных методов физики)

Введено и исследовано понятие эффективного ранга линейной модели эксперимента, определяющего фактическую размерность как результатов измерений, так и множества значений определяемых параметров исследуемого объекта. Показано, что величина эффективного ранга позволяет охарактеризовать качество решения задачи интерпретации измерений: предельную разрешающую способность, информативность измерений и другие важные характеристики эксперимента.

Основные обозначения

$\mathcal{R}_m$ — евклидово пространство;
$\dim \mathcal{R}_s = s$ — размерность $\mathcal{R}_s$;
$\mathcal{R}(A)$ — пространство значений оператора A;
$\mathcal{N}(A)$ — нуль-пространство (ядро) оператора A;
$\mathcal{N}^{\perp}(A)$ — ортогональное дополнение $\mathcal{N}(A)$;
$\operatorname{rank} A$ — ранг оператора A;
A^* — оператор, сопряженный с A;
A^- — оператор, псевдообратный к A;
P, Π — ортогональные проекторы;
$\|A\|_2$ — норма Гильберта—Шмидта оператора A.

Введение

В последнее время при проведении различного рода физических экспериментов неоднократно проявлялся интерес к вопросу о том, какую информацию об измеряемой величине можно получить с гарантированной точностью. Понятно, что в каждом конкретном эксперименте ответ на поставленный вопрос будет определяться техническими характеристиками используемых приборов, точностью модели эксперимента и помехами, возникающими в процессе измерения. Было бы неплохо построить количественную меру, которая в этом смысле характеризовала бы качество решения задачи интерпретации. Тогда, используя математическую модель прибора, вид помех, сопровождающих процесс измерения, и задавая желаемую точность, исследователь до проведения эксперимента знал бы предельные возможности прибора.

Рассмотрим математическую модель типичной линейной схемы измерений в физических исследованиях, определенную равенством

$$\xi = Af + \nu, \tag{1}$$

в котором измеряемый сигнал f априори считается произвольным вектором $\mathcal{R}_m$, $A\in\mathcal{R}_m\to\mathcal{R}_n$ — линейный оператор, действующий из евклидова пространства $\mathcal{R}_m$ (сигналов) в евклидово пространство $\mathcal{R}_n$ (измерений) и моделирующий измерительный прибор, ν — случайный вектор $\mathcal{R}_n$ с заданным математическим ожиданием $\mathbf{E}\nu=0$ и ковариационным оператором Σ, моделирующий погрешность измерения. Короче говоря, далее предполагается, что задана модель $[A,\Sigma]$ схемы измерения (1) [1]. В начале интерпретации измерения (1) задан линейный оператор $U\in\mathcal{R}_m\to\mathcal{R}_k$, определяющий представляющие интерес параметры Uf сигнала f, и требуется определить линейный оператор $R\in\in\mathcal{R}_n\to\mathcal{R}_k$ так, чтобы

$$h(R,\ U)=\sup_{f\in\mathcal{R}_m}\mathbf{E}\,\|R\xi-Uf\|^2\sim\min_R. \tag{2}$$

Задача (2) разрешима, если и только если $U(I-A^-A)=0$, причем при невырожденном операторе Σ решение задачи единственно и дается равенством

$$R(U)=U(A^*\Sigma^{-1}A)^-A^*\Sigma^{-1}. \tag{3}$$

Так определенный оператор $R=R(U)$ даст максимально точную в среднем квадратичном (с. к.) линейную оценку $R(U)\xi$ вектора Uf. При этом с. к. погрешность интерпретации

$$h(R(U),\ U)=h_*(U)=\sup_{f\in\mathcal{R}_m}\mathbf{E}\,\|R(U)\xi-Uf\|^2=\operatorname{tr}U(A^*\Sigma^{-1}A)^-U^*. \tag{4}$$

Предположим, что задача (2) разрешима при $U=I$, и пусть требуется, чтобы с. к. ошибка оценивания f не превосходила δ. Если $h(R(I),I)>\delta$, то f невозможно оценить с требуемой точностью, и возникает вопрос о «части» f, имеющей максимальную размерность, которая допускает оценивание с требуемой точностью на основании измерения (1). «Максимальную размерность» естественно назвать эффективным рангом, который будет зависеть от требуемой точности и модели схемы измерения (1), т. е. от пары операторов A, Σ и δ. Работа посвящена исследованию и применениям эффективного ранга модели при интерпретации эксперимента.

Задача интерпретации линейной функции измерений

В ряде случаев представляет интерес задача, в которой требуется выделить составляющую f, размерность которой не меньше заданного $k\leqslant m$, и указать не более q линейных комбинаций измерений, обеспечивающих максимальную точность оценивания упомянутой составляющей f.

Пусть $S\in\mathcal{R}_n\to\mathcal{R}_q$ — линейный оператор, причем $q\leqslant n$, $\operatorname{rank}S=q$ и задана модель $[A,\Sigma]$ схемы измерения (1). В задаче интерпретации линейной функции $S\xi$ измерения задан линейный оператор $U\in\mathcal{R}_m\to\mathcal{R}_k$ и требуется определить линейный оператор R из условия

$$\sup_{f\in\mathcal{R}_m}\mathbf{E}\,\|RS\xi-Uf\|^2\sim\min_R. \tag{5}$$

Решение задачи (5) дается в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть* $S\in\mathcal{R}_n\to\mathcal{R}_q$, $\operatorname{rank}S=q$, *оператор* Σ *невырожден и выполнено условие*

$$U(I-(SA)^-SA)=0, \tag{6}$$

тогда

$$\inf_{R'} \sup_{f\in\mathscr{R}_m} \mathbf{E}\,\| R'S\xi - Uf\|^2 = \operatorname{tr} U(B^*PB)^- U^*$$

достигается на $R=R(U)=U(B^*PB)^-B^*(S\Sigma^{1/2})^-$, *где* $P=(S\Sigma^{1/2})^-S\Sigma^{1/2}$ — *ортогональный проектор на* $\mathscr{N}^{\perp}(S\Sigma^{1/2})$, $B=\Sigma^{-1/2}A$. *Если условие* (6) *не выполнено, задача* (5) *не разрешима* [2].

Доказательство. По условию теоремы оператор Σ, а следовательно, и $S\Sigma S^*$ невырождены. Тогда

$$\inf_{R'} \sup_{f\in\mathscr{R}_m} \mathbf{E}\,\| R'S\xi - Uf\|^2 = \operatorname{tr} U(A^*S^*(S\Sigma S^*)^{-1}SA)^- U^* = \operatorname{tr} U(B^*PB)^- U^*,$$

причем оператор $R=R(U)$, на котором достигается нижняя грань, имеет вид

$$R(U)=U(A^*S^*(S\Sigma S^*)^{-1}SA)^- A^*S^*(S\Sigma S^*)^{-1} = U(B^*PB)^- B^*(S\Sigma^{1/2})^-.$$

Если условие (6) не выполнено, левая часть в (5) равна бесконечности. ∎

Пусть $U=\Pi_s$, где Π_s — ортогональный проектор в $\mathscr{R}_m$, определяющий ортогональную проекцию $\Pi_s f$ вектора f на s-мерное подпространство $\mathscr{R}_s \subset \mathscr{R}_m$ ($\operatorname{rank}\Pi_s=s$). Согласно (6), ортогональная проекция $\Pi_s f$ вектора f может быть оценена лишь при условии

$$\Pi_s \leqslant (SA)^-SA. \tag{7}$$

Рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$\inf_{\substack{R' \\ \Pi_s:\,\operatorname{rank}\Pi_s\geqslant k,\ \Pi_s\leqslant(SA)^-SA \\ P:\,\operatorname{rank}P\leqslant t}} \sup_{f\in\mathscr{R}_m} \mathbf{E}\,\| R'S\xi - \Pi_s f\|^2,$$

где P — ортогональный проектор, определенный в лемме 1.

В этой задаче требуется определить ортогональный проектор Π_s, $k\leqslant s\leqslant m$, на подпространство $\mathscr{R}_s\subset\mathscr{R}_m$, наименее пораженное шумом среди всех подпространств $\mathscr{R}_m$ размерности s, а также ортогональный проектор $P=P_t$, $t\leqslant n$, $t=\operatorname{rank}P_t$, на котором достигается минимум.

Следующие результаты имеют непосредственное отношение к рассматриваемой задаче.

Лемма 2. *Пусть* Π — *ортогональный проектор на* $\mathscr{L}(e_1, e_2, e_k)$, *где* e_i, $i=1,\ldots,k\leqslant m$, *ортонормированные собственные векторы задачи на собственные значения*

$$B^*Be_i=\beta_i^2 e_i, \quad i=1,\ \ldots,\ m,\ \beta_1^2\geqslant\beta_2^2\geqslant\ldots\geqslant\beta_m^2. \tag{8}$$

Тогда

$$\operatorname{tr}\Pi(B^*B)^-\Pi=\operatorname{tr}(\Pi B^*B\Pi)^-=\operatorname{tr}\Pi(\Pi B^*B\Pi)^-\Pi.$$

Доказательство. По условию

$$\operatorname{tr}\Pi(B^*B)^-\Pi=\sum_{i=1}^{\min(k,r)}\beta_i^{-2}, \text{ где } r=\operatorname{rank}(B^*B)$$

$$\Pi B^*B\Pi e_i=\begin{cases}\beta_i^2 e_i & i=1,\ \ldots,\ k,\\ 0 & i=k+1,\ \ldots,\ m.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\operatorname{tr}(\Pi B^*B\Pi)^-=\sum_{i=1}^{\min(k,r)}\beta_i^{-2}. \ ∎$$

Лемма 3. *Пусть* $B \in \mathcal{R}_m \to \mathcal{R}_n$, Π *и* P — *ортогональные проекторы в* $\mathcal{R}_m$ *и* $\mathcal{R}_n$ *соответственно, причем* $\Pi \leqslant (B^*PB)^- B^*PB$.

Тогда $\Pi (B^*PB)^- \Pi \geqslant \Pi (B^*B)^- \Pi$.

Доказательство. Поскольку для любого ортогонального проектора P выполнено неравенство $B^*PB \leqslant B^*B$, то согласно [2]

$$(B^*PB)^- \geqslant (B^*PB)^- (B^*PB) (B^*B)^- (B^*PB)^- (B^*PB)$$

и, следовательно,

$$\Pi\ (B^*PB)^- \Pi \geqslant \Pi (B^*PB)^- (B^*PB) (B^*B)^- (B^*PB)^- (B^*PB) \Pi = \\ = \Pi (B^*B)^- \Pi,$$

поскольку ортогональный проектор Π является частью ортогонального проектора $(B^*PB)^- (B^*PB)$. ■

Заметим, что условие (7) эквивалентно условию $\Pi_s \leqslant (PB)^- PB$, где $P = (S\Sigma^{1/2})^- S\Sigma^{1/2}$, поскольку $\mathcal{N}(SA) = \mathcal{N}(S\Sigma^{1/2}B) \subset \mathcal{N}((S\Sigma^{1/2})^- S\Sigma^{1/2}B) \subset \subset \mathcal{N}(S\Sigma^{1/2}PB) = \mathcal{N}(S\Sigma^{1/2}B) = \mathcal{N}(SA)$.

Теорема. *Пусть* Π *и* P — *ортогональные проекторы,* $k \leqslant m$, $t \leqslant n$, $k \leqslant t$. *Тогда*

$$\min_{\substack{\Pi:\, \operatorname{rank}\Pi \geqslant k,\ \Pi \leqslant (PB)^- PB \\ P:\, \operatorname{rank} P \leqslant t}} \operatorname{tr} \Pi (B^*PB)^- \Pi = \sum_{i=1}^{k} \beta_i^{-2} \tag{9}$$

достигается на ортогональном проекторе Π_k, $(\operatorname{rank}\Pi_k = k)$, *проецирующем на* $\mathcal{L}$ $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$, *где* e_i, $i = 1, \ldots, k$, $(k \leqslant r = \operatorname{rank} (B^*B))$ — *ортонормированные собственные векторы задачи* (8), *и на любом ортогональном проекторе* P_q $(\operatorname{rank}\ P_q = q)$, *проецирующем на* $\mathcal{L}(s_1, s_2, \ldots, s_q)$, $k \leqslant q \leqslant t$, *где* $s^i = \beta_i^{-1} Be_i$, $i = 1, \ldots, r$, — *ортонормированная система в* $\mathcal{R}_n$, $s_{r+1}, \ldots, s_n$ — *любые линейно независимые векторы из ортогонального дополнения* $\mathcal{L}(s_1, s_2, \ldots, s_r)$ *в* $\mathcal{R}_n$.

Доказательство. Согласно [2]

$$\min_{\Pi:\, \operatorname{rank}\Pi \geqslant k,\ \Pi \leqslant B^- B} \operatorname{tr} \Pi (B^*B)^- \Pi = \operatorname{tr} \Pi_k (B^*B)^- \Pi_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i^{-2},$$

Π_k — ортогональный проектор ($\operatorname{rank}\ \Pi_k = k$) на $\mathcal{L}$ $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$. Как известно, (см., напр., [2]), ортонормированный базис $\{e_i\}$ (8) порождает в $\mathcal{R}_n$ ортонормированную систему $s_i = \beta_i^{-1} Be_i$, $i = 1, \ldots, r$. Пусть $s_{r+1}, \ldots$ $\ldots, s_n$ — любые линейно независимые векторы из ортогонального дополнения $\mathcal{L}(s_1, s_2, \ldots, s_r)$ в $\mathcal{R}_n$. Тогда, выбрав $P = P_q$, где P_q — ортогональный проектор на $\mathcal{L}(s_1, s_2, \ldots, s_q)$, $k \leqslant q \leqslant t$, получим согласно лемме 3

$$\Pi_k (B^*B)^- \Pi_k \leqslant \Pi_k (B^*PB)^- \Pi_k = \Pi_k (B^*B)^- \Pi_k.$$

При этом для любого ортогонального проектора P

$$\min_{\Pi:\, \operatorname{rank}\Pi \geqslant k,\ \Pi \leqslant (PB)^- PB} \operatorname{tr} \Pi (B^*PB)^- \Pi \geqslant \min_{\Pi:\, \operatorname{rank}\Pi \geqslant k,\ \Pi \leqslant (PB)^- PB} \operatorname{tr} \Pi (B^*B)^- \Pi \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\Pi:\, \operatorname{rank}\Pi \geqslant k,\ \Pi \leqslant B^- B} \operatorname{tr} \Pi (B^*B)^- \Pi = \operatorname{tr} \Pi_k (B^*B)^- \Pi_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i^{-2}, \tag{10}$$

а при $P = P_q$ в (10) выполняются равенства. ■

Следствие. Минимальный проектор P, на котором достигается минимум (10), имеет ранг k и дается равенством $P = B\Pi_k (B\Pi_k)^-$.

Эффективный ранг модели измерения

На основании изложенных в предыдущих пунктах результатов введем понятие эффективного ранга модели $[A, \Sigma]$ схемы измерения (1). Как известно, каждой модели $[A, \Sigma]$ соответствует специфическая расширяющаяся последовательность линейных подпространств пространства $\mathcal{R}_m$ входных сигналов, каждое из которых характеризуется минимальным (среди всех линейных подпространств такой же размерности) значением с. к. погрешности оценивания находящихся в нем сигналов. Каждое из таких «экстремальных» линейных подпространств $\mathcal{L}_s$ есть линейная оболочка первых s ортонормированных собственных векторов задачи (8). Если Π_s — ортогональный проектор на $\mathcal{L}_s$, то, согласно выражению (4) и равенствам (8) (напомним, что $B=\Sigma^{-1/2}A$), с. к. погрешность оценки $R(\Pi_s)\xi$ сигнала $\Pi_s f$ удовлетворяет неравенству

$$h_*(\Pi_s) = \sum_{j=1}^{s} \beta_j^{-2} \leqslant h_*(U_s),$$

где U_s — ортогональный проектор на любое линейное подпространство входных сигналов размерности s, $s=1, ..., m$.

Ортонормированный базис $\{e_j\}$ (8) евклидова пространства $\mathcal{R}_m$ называется собственным базисом модели $[A, \Sigma]$. Этот базис порождает в $\mathcal{R}_n$ ортонормированную систему

$$s_j = \beta_j^{-1}\Sigma^{-1/2}Ae_j, \quad j = 1, \ldots, r, \quad \beta_1^2 \geqslant \beta_2^2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_r^2 > \beta_{r+1}^2 = \ldots$$
$$\ldots = \beta_m^2 = 0$$

($r=\operatorname{rank} A$) и для оценивания ортогональной проекции $\Pi_k f$, $k<r$, в этом случае достаточно знать $\tilde{\xi}_j = (s_j, \Sigma^{-1/2}\xi)$, $j=1, ..., k$, так как согласно (3) и (8)

$$\Pi_k (A^*\Sigma^{-1}A)^- A^*\Sigma^{-1}\xi = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^{-1}(s_j, \Sigma^{-1/2}\xi)\, e_j, \quad k = 1, \ldots, r.$$

Следовательно, минимальная с. к. погрешность, сопутствующая оцениванию k-мерной ортогональной составляющей f, дается формулой $h = \sum_{i=1}^{k} \beta_i^{-2}$, где β_i^2, $i=1, ..., r=\operatorname{rank} A$ — собственные значения задачи (8).

Определение. *Эффективным рангом модели* $[A, \Sigma]$ *назовем функцию*

$$\rho_{[A,\Sigma]}(h) = \begin{cases} \max\left(k: \sum_{i=1}^{k} \beta_i^{-2} \leqslant h\right), & \beta_1^{-2} \leqslant h, \\ 0, & \beta_1^{-2} \geqslant h, \quad h \in \mathcal{R}_+, \end{cases}$$

определенную на полупрямой $\mathcal{R}_+ = [0, +\infty)$ *и принимающую значения* $0, 1, 2, ..., r=\operatorname{rank} A$.

Функция $\rho_{[A,\Sigma]}(h)$ — максимальная размерность ортогональной составляющей $f \in \mathcal{R}_m$, которую можно оценить со с. к. погрешностью, не превосходящей $h \in \mathcal{R}_+$. Если точность оценивания, определяемая с. к. погрешностью h, считается приемлемой, то любая линейная комбинация первых $\rho_{[A,\Sigma]}(h)$ собственных векторов задачи (8) может быть оценена с такой точностью, соответственно первые $\rho_{[A,\Sigma]}(h)$ собственных векторов задачи (8) показывают, какие детали сигнала $f\in\mathscr{R}_m$ допускают оценивание с приемлемой точностью. Для оценивания ортогональной составляющей f размерности $\rho_{[A,\Sigma]}(h)$ со с. к. погрешностью, не превосходящей $h\in\mathscr{R}_+$, требуется $\rho_{[A,\Sigma]}(h)$ линейных комбинаций измерений $\tilde{\xi}_j=(s_j, \Sigma^{-1/2}\xi)$.

Сформулируем основные свойства функции $\rho_{[A,\Sigma]}(h)$.

Лемма 4

1. *Эффективный ранг* $\rho_{[A,\Sigma]}(h)$ *является неубывающей функцией* $h\in\mathscr{R}_+$, причем $\lim\limits_{h\to\infty}\rho_{[A,\Sigma]}(h)=r=\operatorname{rank}A$.

2. *Если модель* $[A,\Sigma]$ *равномерно не хуже модели* $[\tilde{A},\tilde{\Sigma}]$, $([A,\Sigma]\prec\prec[\tilde{A},\tilde{\Sigma}]$, *см.* [1]), *то* $\rho_{[A,\Sigma]}(h)\geqslant\rho_{[\tilde{A},\tilde{\Sigma}]}(h)$.

3. *Если* $\Sigma>0$ *и* $\|\Sigma\|_2\to 0$, *то* $\rho_{[A,\Sigma]}(h)\to r=\operatorname{rank}A$, *т. е.* $\lim\limits_{\|\Sigma\|_2\to 0}\rho_{[A,\Sigma]}(h)=r$.

Доказательство

1. Непосредственно следует из определения.

2. Пусть Π_k и $\tilde{\Pi}_k$ — ортогональные проекторы на первые k векторов базиса моделей $[A,\Sigma]$ и $[\tilde{A},\tilde{\Sigma}]$ соответственно, причем $k\leqslant\min(r,\tilde{r})$. Согласно [1] модель $[A,\Sigma]$ равномерно не хуже модели $[\tilde{A},\tilde{\Sigma}]$, если $A^-A\geqslant\tilde{A}^-\tilde{A}$ и $\tilde{A}^-\tilde{A}[(A^*\Sigma^{-1}A)^- -(\tilde{A}^*\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{A})^-]\tilde{A}^-\tilde{A}\leqslant 0$. Учитывая, что модель $[A,\Sigma]$ равномерно не хуже модели $[\tilde{A},\tilde{\Sigma}]$, и принимая во внимание экстремальные свойства базиса модели, имеем

$$\operatorname{tr}\Pi_k(A^*\Sigma^{-1}A)^-\Pi_k\leqslant\operatorname{tr}\tilde{\Pi}_k(A^*\Sigma^{-1}A)^-\tilde{\Pi}_k\leqslant\operatorname{tr}\tilde{\Pi}_k(\tilde{A}^*\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{A})^-\tilde{\Pi}_k\leqslant$$
$$\leqslant\operatorname{tr}U_k(\tilde{A}^*\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{A})^-U_k,$$

где U_k — ортогональный проектор на любое линейное подпространство размерности k, удовлетворяющий условию $U_k\leqslant\tilde{A}^-\tilde{A}$. Из написанных неравенств следует, что $\sum\limits_{i=1}^{k}\beta_i^{-2}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}\tilde{\beta}_i^{-2}$ для любого $k\leqslant\tilde{r}\leqslant r$, где β_i^2, $i=1,\ldots,r=\operatorname{rank}A$ и $\tilde{\beta}_i^2$, $i=1,\ldots,\tilde{r}=\operatorname{rank}\tilde{A}$ — собственные значения задачи (8) для моделей $[A,\Sigma]$ и $[\tilde{A},\tilde{\Sigma}]$ соответственно, причем $\tilde{r}\leqslant r$, поскольку $[A,\Sigma]\prec[\tilde{A},\tilde{\Sigma}]$. Следовательно, для любого $h\in\mathscr{R}_+$, $\rho_{[A,\Sigma]}(h)\geqslant\geqslant\rho_{[\tilde{A},\tilde{\Sigma}]}(h)$.

3. Обозначим через $\sigma^2_{\min}$ и $\sigma^2_{\max}$ минимальное и максимальное собственные значения оператора Σ. Пусть $\Sigma>0$. Тогда $\sigma_{\max}^{-2}I\leqslant\Sigma^{-1}\leqslant\sigma_{\min}^{-2}I$ и для любого $e\in\mathscr{R}_m$

$$\sigma_{\max}^{-2}\|Ae\|^2\leqslant(A^*\Sigma^{-1}Ae,\ e)\leqslant\sigma_{\min}^{-2}\|Ae\|^2. \qquad (11)$$

Пусть $e=e_r$ — собственный вектор задачи (8), отвечающий минимальному отличному от нуля собственному значению β_r^2. В этом случае неравенства (11) можно переписать в виде

$$\sigma_{\max}^{-2}\|Ae_r\|^2\leqslant\beta_r^2\leqslant\sigma_{\min}^{-2}\|Ae_r\|^2.$$

Условие $\|\Sigma\|_2\to 0$ эквивалентно условию $\sigma^2_{\max}\to 0$. Следовательно, $\beta_r^2\to\infty$, и для любого $k\leqslant r$ $\sum\limits_{i=1}^{k}\beta_i^{-2}\to 0$. Отсюда получаем, что для любого $h\in\in\mathscr{R}_+$ $\lim\limits_{\|\Sigma\|_2\to 0}\rho_{[A,\Sigma]}(h)=r$. ■

На рис. 1, 2 представлены графики зависимостей $h=\sum_{i=1}^{k}\beta_i^{-2}=h(k)$ и $\rho_{[P,\Sigma]}(h)$, $h\in\mathscr{R}_+$, $k=1,2,...,r$, $(r=10)$ в задаче восстановления

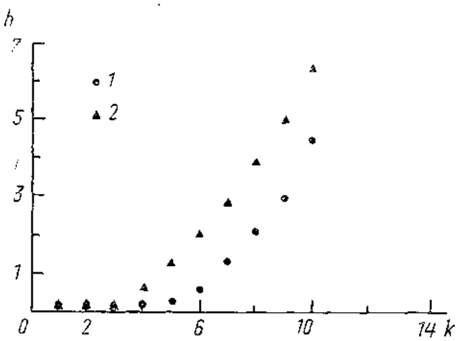

Рис. 1. Зависимость с. к. погрешности оценивания профиля вертикального распределения озона от размерности его представления для модели измерения спектра рассеянного ультрафиолетового излучения при фиксированном зенитном угле Солнца $\theta_s=70°$ (*1*) и $45°$ (*2*)

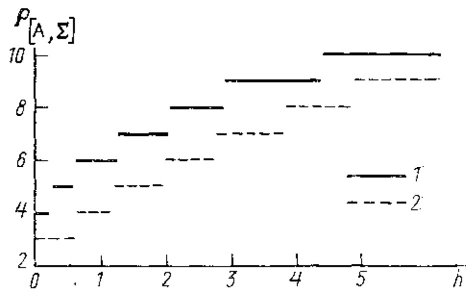

Рис. 2. График эффективного ранга модели измерения спектра рассеянного ультрафиолетового излучения при фиксированном зенитном угле Солнца $\theta_s=70°$ (*1*) и $45°$ (*2*) в задаче оценивания вертикального распределения озона

вертикального профиля озона по измерению спектра ультрафиолетовой радиации при фиксированном положении Солнца $(m=15,\ n=10)$. Из рис. 1, 2 видно, что $\rho_{[A(\theta_s=45°),\Sigma]}(h)\leqslant\rho_{[A(\theta_s=70°),\Sigma]}(h)$ и, следовательно, измерение под углом $\theta_s=70°$ позволяет более точно восстановить вертикальный профиль озона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пытьев Ю. П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
2. Пытьев Ю. П. Математические методы анализа эксперимента. М., 1989.

Поступила в редакцию
21.11.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 4

УДК 519.6

МОЖНО ЛИ РЕШИТЬ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННУЮ ЗАДАЧУ БЕЗ ЗНАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ДАННЫХ?

А. С. Леонов *, **А. Г. Ягола**

(кафедра математики)

Показано, что нахождение устойчивого решения операторного уравнения без знания погрешностей его данных возможно лишь для корректно поставленных задач.

Написать эту заметку нас побудило появление серии работ [1—4], где предприняты попытки решения некорректных задач без использования величин погрешностей их данных. Можно ли вообще решить не-

*) МИФИ.