

7. Чернин А. Д. // Сообщ. САО. 1987. 53. С. 35.
8. Tully R. V. // Astrophys. J. 1987. 321. P. 280.
9. Governato H. J. // Astrophys. J. 1991. 371. P. L 15.
10. Bhavsar S. P., Barrow Z. D. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1985. 213. P. 857.
11. Zerf D. C., Whitmore B. C. // Astrophys. J. 1991. 383. P. 542.
12. Караченцев И. Д. // Пробл. космич. физики. 1970, 5. С. 201.
13. Vaucouleurs G. de, Vaucouleurs A. de, Corwin H. J. The Second Reference Catalogue of Bright Galaxies. Austin, 1976.
14. Vaucouleurs G. de, Vaucouleurs A. de, Corwin H. J. et al. The Third Reference Catalogue of Bright Galaxies. Springer-Verlag. 1990.
15. Hickson P. // Astrophys. J. 1988. 331. P. 64.
16. Bhavsar S. P., Barrow Z. D. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1985. 213. P. 357.
17. Gott H. J. // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1977. 15. P. 235.
18. Diaferio A., Ramella M., Geller M. J., Ferrari A. // Preprint N 3577. Harvard-Shithsonian Cen. for Astrophys. Cambridge. 1993.
19. Sulentic P. // Astrophys. J. 1987. 322. P. 605.
20. Williams J. // Astron. J. 1991. 101. P. 1957.

Поступила в редакцию
10.05.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 5

УДК 537.86

О «ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ» ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛА В ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

А. В. Гусев, В. В. Кулагин

(ГАНШ)

Исследуется устойчивость оптимального алгоритма обнаружения полезного сигнала в гравитационно-волновом эксперименте к изменению априорных сведений о параметрах внешнего воздействия и динамических параметрах гравитационного детектора береговского типа.

1. Пороговая чувствительность твердотельных гравитационных антенн (ТГА) как единого измерительного комплекса, состоящего из собственно гравитационного детектора (высокодобротный механический резонатор) и электромеханического преобразователя, определяется следующей формулой [1, 2]:

$$(h_0)_{\min} = (4\sigma_T/l) (Q\omega_0\tau_0/F)^{-1/2}, \quad (1)$$

где h_0 — амплитуда вариации метрики; σ_T^2 — дисперсия тепловых шумов; l , Q и $\omega_0 = 2\pi f_0$ — длина, добротность и резонансная частота; τ_0 — длительность гравитационно-волнового (ГВ) импульса; F — коэффициент шума электромеханического преобразователя.

При обобщенном анализе шумов в ТГА используется стандартная методика описания шумящих линейных систем [3]. Эквивалентная по шумам схема ТГА, соответствующая 1-й системе электродинамических аналогий [4], приведена на рис. 1.

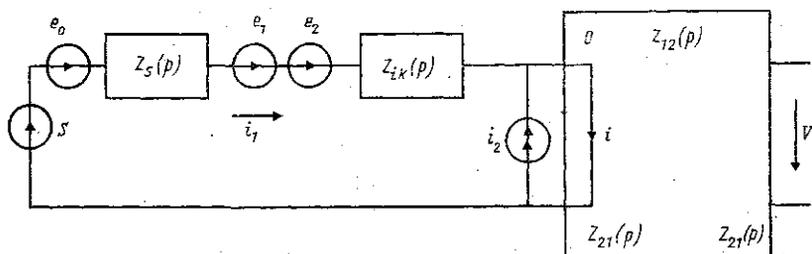


Рис. 1

Здесь $Z_s(p) = Lp + R + 1/(pC)$ — импеданс входного контура; L , C и R — «масса», «гибкость» и «коэффициент трения» механического осциллятора; $p = d/dt$; $\{Z_{ik}(p)\}$ — характеристические Z -параметры электромеханического преобразователя как четырехполюсника; S — полезный сигнал; $V = Z_{21}(p)i$ — выходное напряжение, $i = Z_{21}^{-1}(p)V$ — «наблюдаемая» переменная в эквивалентной по шумам схеме линейного четырехполюсника.

Источники шумов в системе: 1) e_0 — тепловые шумы входного контура со спектральной плотностью $N_0 = 2kTR$, где k — постоянная Больцмана, T — физическая температура; 2) сторонние ланжевеновские источники e_1 и $i_2 = pq_2$ как «причина» собственных шумов электромеханического преобразователя [3].

В дальнейшем будем предполагать, что e_1 и q_2 — независимые дельта-коррелированные процессы:

$$K_{e_1}(\tau) = N_1\delta(\tau), \quad K_{q_2}(\tau) = N_2\delta(\tau).$$

Минимальный коэффициент шума F такого преобразователя определяется следующей формулой [2]:

$$F(x_0) = F_1 F_2(x_0) \approx F_2(x_0). \quad (2)$$

Здесь

$$F_1 = 1 + N_1/N_0; \quad F_2(x_0) = x_0(\exp\{-x_0\} + x_0 + 1)^{-1}, \quad (3)$$

где $x_0 = \beta\tau_0$, $\beta = [\sigma_T^2 F_1 / (N_2 \tau^*)]^{1/2}$, $\tau^* = \alpha^{-1}$ — время релаксации ТГА. Можно показать, что для любых x

$$(1/x) \leq F_2(x) - 1 \leq (2/x). \quad (4)$$

Формула (4) существенно упрощает расчет минимального коэффициента шума F для реального датчика в типичной ситуации для ТГА с непосредственной связью механической системы и электромеханического преобразователя, когда $N_1 \ll N_0$.

При выводе формул (2) и (3) предполагалось, что выходной сигнал V поступает на вход оптимального приемника, синтез которого предполагает наличие априорной информации о форме полезного сигнала S и реактивных (для системы с малой диссипацией) параметрах ТГА.

Цель работы: анализ «чувствительности» оптимального алгоритма обнаружения ГВ-импульса к отклонению длительности ГВ-импульса τ_0 и резонансной частоты ТГА ω_0 относительно ожидаемых (априорных) значений:

$$\hat{\tau} = (\tau_0)_{pr}, \quad \hat{\omega}_0 = (\omega_0)_{pr}.$$

2. Уравнения движения ТГА в одночастотном режиме [2] следующие:

$$\begin{aligned} [pL_0 + R_0 + (pC_0)^{-1}]i_1 &= L_0(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)q_1 = \lambda S + e, \\ q &= q_1 + q_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где L_0 , R_0 и C_0 — эквивалентные динамические параметры системы; $2\alpha = R_0/L_0$, $\omega_0^2 = (L_0 C_0)^{-1}$; $q_1 = p^{-1}i_1$, $q = p^{-1}i$; $e = e_0 + e_1$; λ — случайная величина, принимающая на интервале наблюдения два возможных значения: $\lambda = 1$ при наличии сигнала и $\lambda = 0$ при его отсутствии.

В дальнейшем будет использована стандартная модель ГВ-импульса в виде резонансного цуга с прямоугольной огибающей

$$S(t) = S_0 A(t) \sin \omega_0 t,$$

где $A(t) = 1$ при $0 \leq t \leq \tau_0$ и $A(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > 0$.

В эксперименте резонансная частота ТГА ω_0 и длительность ГВ-импульса τ_0 могут отличаться от априорных (ожидаемых) значений $\hat{\omega}_0 = (\omega_0)_{pr}$ и $\hat{\tau} = (\tau_0)_{pr}$:

$$\omega_0 = \hat{\omega}_0 + \Delta, \quad |\Delta| \ll \omega_0; \quad \tau_0 \leq \hat{\tau}.$$

Принимая во внимание систему уравнений (5), в квазигармоническом приближении имеем

$$q \approx a_1 \cos \omega_0 t - b_1 \sin \omega_0 t + q_2, \quad (6)$$

$$a_1(t) = -\lambda S_0 u(t) + n_1(t), \quad b_1(t) = n_2(t). \quad (7)$$

Здесь

$$u(t) \leftrightarrow u_\omega(j\omega) = -\varepsilon A_\omega(j\omega) (j\omega + \alpha)^{-1}, \quad A(t) \leftrightarrow A_\omega(j\omega) = \\ = [1 - \exp\{-j\omega\tau_0\}] / (j\omega); \quad \varepsilon = (2L_0\omega_0)^{-1};$$

$n_1(t)$ и $n_2(t)$ — независимые гауссовские экспоненциально-коррелированные шумы:

$$B_1(\tau) = B_2(\tau) = B(\tau) = \sigma_\varepsilon^2 \exp\{-\alpha|\tau|\},$$

где $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_T^2 F_1 = \varepsilon^2 N_0 F_1 / \alpha$.

Пусть $G(t)$ — сигнал локального гетеродина. Тогда на выходе соответствующего синхронного детектора с учетом выражения (6) имеем

$$H(t) * [G(t)q(t)] \approx a_1 \cos \Delta t - b_1 \sin \Delta t + \kappa_\alpha, \quad (8)$$

где $H(t)$ — импульсная характеристика фильтра низких частот; κ_α — белый шум, функция корреляции которого определяется формулой

$$B_{\kappa_\alpha}(\tau) = 2N_2 \delta(\tau).$$

Подстановка выражения (7) в формулу (8) приводит к следующей формуле:

$$a \approx \lambda S_0 u \cos \Delta t + n_a + \kappa_\alpha, \quad (9)$$

где $n_a = (a_1 \cos \Delta t - b_1 \sin \Delta t | \lambda = 0)$ — гауссовская помеха с функцией корреляции

$$B_{n_a}(\tau) = B(\tau) \cos \Delta \tau.$$

Аддитивная смесь сигнала и шума (9) поступает на вход линейного приемника, максимизирующего отношение сигнал/шум при нулевой расстройке $\Delta = 0$ и совпадении длительности ГВ-импульса τ_0 с ожидаемой, $\tau_0 = \hat{\tau}$.

При неограниченном интервале наблюдения $-\infty < t < \infty$ и известном моменте прихода t' полезного сигнала $S(t-t')$ оптимальное устройство можно реализовать в виде одноканального корреляционного приемника, формирующего переменную [5]

$$M_0 = K_0 \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \rho(t) dt = K_0 (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} a_\omega(j\omega) \rho_\omega^*(j\omega) d\omega, \quad (10)$$

где K_0 — произвольный масштабный коэффициент; $a(t) \leftrightarrow a_\omega(j\omega)$; $\rho(t) \leftrightarrow \rho_\omega(j\omega)$, $\rho(t)$ — опорный сигнал, спектр Фурье которого определяется следующей формулой:

$$\rho_{\omega}(j\omega) \approx \beta^2 (\beta^2 + \omega^2)^{-1} (1 - \exp\{-j\omega\tau\}), \quad (11)$$

где введенный выше параметр $\beta \gg \alpha$.

Из выражений (10) и (11) находим

$$M_0 \approx K_0 (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\omega}(j\omega) \beta^2 (\beta^2 + \omega^2)^{-1} (1 - \exp\{j\omega\tau\}) d\omega. \quad (12)$$

Для обнаружения полезного сигнала с неизвестным моментом прихода оптимальное устройство содержит дополнительный блок оценки неизвестного параметра t' [5] и может быть реализовано либо в виде многоканального корреляционного приемника, либо в виде пассивного оптимального фильтра, структурная схема которого приведена на рис. 2. На этом рисунке использованы следующие обозначения: 1 — линейный фильтр Винера с передаточной функцией

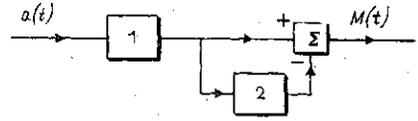


Рис. 2

$$K_{1\omega}(j\omega) = K_0 \beta^2 (\beta^2 + \omega^2)^{-1} \exp\{-j\omega t_m\}, \quad (13)$$

2 — линия задержки, время задержки которой τ_d определяется ожидаемой длительностью ГВ-импульса $\hat{\tau} = (\tau_0)_{pr}$; $\tau_d = \hat{\tau}$.

В формуле (13) $t_m = t_0 - \hat{\tau} \gg \beta^{-1}$, t_0 — момент наблюдения: $M(t_0) = M_0$.

3. Принимая во внимание выражение (12), находим среднее значение $\langle M_0 \rangle$ случайной величины M_0 при наличии полезного сигнала на входе ($\lambda=1$):

$$\langle M_0 \rangle \approx (K_0 S_0 \sigma \tau_0 / 2) \Gamma_1 (1 + \xi^2)^{-1}, \quad \tau_0 \ll \hat{\tau}. \quad (14)$$

Здесь

$$\Gamma_1 = x_0^{-1} \{ x_0 (1 + \cos \xi \hat{x}) - \cos 2\varphi [1 - \exp\{-\hat{x}\} - \cos \xi x_0 (\exp\{-x_0\} - \exp\{-(\hat{x} - x_0)\})] - \sin 2\varphi \sin \xi x_0 (\exp\{-x_0\} + \exp\{-(\hat{x} - x_0)\}) \},$$

где $x_0 = \beta \tau_0 \ll \hat{x} = \beta \hat{\tau}$; $\xi = \Delta / \beta$; $\cos 2\varphi = (1 - \xi^2) / (1 + \xi^2)$, $\sin 2\varphi = 2\xi / (1 + \xi^2)$.

Для ТГА рассматриваемого типа с непосредственной связью механической системы и электромеханического преобразователя и для реалистической оценки длительности ГВ-импульса $\tau_0 = 10^{-3}$ с имеем $x_0 \ll 1$. Тогда в линейном приближении по малому параметру x_0 получим

$$\Gamma_1 \approx \Gamma_{10} = (\cos \xi \hat{x} - \exp\{-\hat{x}\}), \quad x_0 \rightarrow 0. \quad (15)$$

Так как Γ_{10} не зависит от длительности ГВ-импульса τ_0 , то формулу (15) можно использовать для оценки сигнальной характеристики ТГА при простейшей модели ГВ-импульса, встречающейся в литературе [6]:

$$S(t) \approx (S_0 \tau_0) \delta(t).$$

Дисперсия σ_0^2 случайной величины M_0 (12) определяется следующей формулой:

$$\sigma_0^2 = K_0^2 (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [2^{-1} (B_{\omega}(\omega - \Delta) + B_{\omega}(\omega + \Delta)) + 2N_2] |\rho_{\omega}(j\omega)|^2 d\omega,$$

где $B_{\omega}(\omega) = 2\sigma_e^2 \alpha (\omega^2 + \alpha^2)^{-1} \leftrightarrow B(\tau) = \sigma_e^2 \exp\{-\alpha|\tau|\}$.

Используя стандартную методику вычисления определенных интегралов, находим

$$\sigma_0^2 = K_0^2 \sigma_s^2 (2\hat{\tau}/\tau^*) (1 + \xi^2)^{-1} \Gamma_2. \quad (16)$$

Здесь

$$\Gamma_2 = \hat{x}^{-1} \{ \hat{x} [1 + \gamma \xi^2 \hat{x} \operatorname{sinc}^2(\xi \hat{x}/2)] + (1/2) [1 - \exp\{-\hat{x}\}] (c_1 + c_2) - \hat{x} c_1 \exp\{-\hat{x}\} \}; \quad \gamma = \beta / (2\alpha) \gg 1; \quad c_1 = \xi^2 (3 + \xi^2), \quad c_2 = 2(1 - 3\xi^2).$$

Отметим, что $\sigma_s^2 (2\hat{\tau}/\tau^*) \approx \sigma_\tau^2 (2\hat{\tau}/\tau^*)$ — дисперсия тепловых шумов на выходе разностного звена [1].

Для малой расстройки $\Delta^2 \ll \beta^2$ при $\xi^2 \ll 1$ имеем

$$\Gamma_2 \approx \hat{x}^{-1} \{ \hat{x} + \exp\{-\hat{x}\} - 1 + \gamma (\xi \hat{x})^2 \operatorname{sinc}^2(\xi \hat{x}/2) \}. \quad (17)$$

Отношение сигнал/шум (S/N) на выходе приемного устройства равно

$$S/N = \langle M_0 \rangle^2 / \sigma_0^2 = (S_0^2 \tau_0) / (2N_0 F^*),$$

где F^* — коэффициент шума при расстроенном приеме $\tau_0 \leq \hat{\tau}$ и $\Delta \neq 0$:

$$F^* = F_1 (\hat{\tau}/\tau_0) \Gamma_2 / \Gamma_1^2. \quad (18)$$

Подстановка формул (14) и (17) в выражение (18) приводит к следующему результату:

$$F^* \approx [x_0 (\cos \xi \hat{x} - \exp\{-\hat{x}\})^2]^{-1} [\hat{x} + \exp\{-\hat{x}\} - 1 + \gamma (\xi \hat{x})^2 \operatorname{sinc}^2(\xi \hat{x}/2)], \quad (19)$$

где $|\xi| \ll 1$.

Из основной формулы (19) для двух предельных возможных ситуаций $\hat{x} \gg 1$ и $\hat{x} \ll 1$ находим

$$F^* \approx [x_0 \cos^2 \xi \hat{x}]^{-1} [\hat{x} + 4\gamma \sin^2(\xi \hat{x}/2)] = (\hat{\tau}/\tau_0) \cos^{-2} \Delta \hat{\tau} [1 + 2(\hat{\tau}^*/\hat{\tau}) \sin^2(\Delta \hat{\tau}/2)], \quad \hat{x} \gg 1, \\ F^* \approx (2x_0)^{-1} [1 + (\beta/\alpha) \xi^2] = (2\beta\tau_0)^{-1} [1 + (\hat{\tau}^*/\hat{\tau}) \Delta^2 \hat{\tau}/\beta], \quad \hat{x} \ll 1. \quad (20)$$

Так как $\hat{\tau} \ll \tau^*$, зависимость коэффициента шума от величины расстройки $\Delta = \omega_0 - \hat{\omega}_0$ оказывается сильной. Допустимые уходы резонансной частоты ТГА ω_0 относительно ожидаемой $\hat{\omega}_0$ определяются следующими формулами:

$$|\Delta_m| \leq (2\hat{\tau}\tau^*)^{-1/2}, \quad \hat{x} \gg 1; \quad |\Delta_m| \leq (\beta/\tau^*)^{1/2}. \quad (21)$$

Предполагая, что условия (21) выполнены, имеем из (20)

$$F^* \approx (\hat{\tau}/\tau_0) \gg 1, \quad \hat{x} \gg 1; \quad F^* \approx 2/(\beta\tau_0) \approx F_{\min}, \quad \hat{x} \ll 1.$$

Пусть $\tau_p = \beta^{-1}$ — время установления колебаний в линейном фильтре I (см. рис. 2), импульсная характеристика которого определяется формулой

$$K_1(t) = (K_0/2) \exp\{-\beta|t - t_m|\} \leftrightarrow K_{1\omega}(j\omega).$$

Тогда, выбирая время задержки $\tau_d = \hat{\tau}$ таким образом, чтобы $\tau_d \ll \tau_p$, обеспечиваем разрешающую способность ТГА, близкую к пороговой

(1), (2). «Чувствительность» системы к возможным уходам резонансной частоты минимальна (см. (21)). В противоположной ситуации $\tau_a \gg \tau_b$ коэффициент шума ТГА резко возрастает, а устойчивость системы к уходам резонансной частоты падает.

4. Применение ТГА для «геофизических» наблюдений ($\tau_0 \approx \hat{\tau} \approx \tau_a \gg \tau_b$) стимулирует оценку коэффициента шума F^* при $x_0 \approx \hat{x} \gg 1$, когда

$$\Gamma_1 \approx 1 + \cos(\Delta\tau), \quad \Gamma_2 \approx 1 + (2\tau^*/\hat{\tau}) (\tau_b/\hat{\tau}) \sin^2(\Delta\tau/2).$$

Подстановка этих соотношений в выражение (18) позволяет определить зависимость коэффициента шума F^* от величины расстройки Δ .

5. Для ТГА типа «Geograph» (Италия [6]) или «Snail» («Улитка», ГАИШ МГУ) с пьезопреобразователем как датчиком малых смещений параметр β можно рассчитать по следующей формуле [7]:

$$\beta \approx (\sigma_T^2 \alpha / (2kT_0 r_n))^{1/2} K_{em}^2 (1 - K_{em}^2)^{-1} (l/L_R) / d,$$

где $T_0 = 300$ К, r_n — шумовое сопротивление предусилителя; K_{em} и d — коэффициент электромеханической связи и пьезомодуль керамики ТБЦС; $K_{em} \approx 0,41$, $d \cdot 10^{12} \approx 200$ Кл/Н; L_R — длина резонатора, $L_R \approx 1$ м; l — характерная величина, зависящая от конструктивных особенностей пьезопреобразователя: $l \approx 2l_0$, l_0 — толщина пьезотаблетки.

Для типичных параметров неохлаждаемых ТГА $\sigma_T \approx 2 \cdot 10^{-14}$ см, $\alpha \approx 5 \cdot 10^{-2}$ Гц, $2kT_0 r_n \approx \eta^2 \cdot 10^{-18}$ В²·с (η — численный коэффициент порядка единиц) и $l \approx 6$ см имеем

$$\beta \approx 2,71 \eta^{-1} \text{ Гц}, \quad \tau_b \approx 0,4 \eta \text{ с}.$$

Авторы выражают благодарность В. Н. Руденко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бичак И., Руденко В. Н. Гравитационные волны в ОТО и проблемы их обнаружения. М., 1989.
2. Гусев А. В., Цыганов А. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1993. 34, № 4. С. 44.
3. Айнбиндер И. М. Шумы радиоприемников. М., 1974.
4. Харкевич А. А. Теория преобразователей. М., 1976.
5. Сосулин Ю. Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1992.
6. Астрофизика, кванты и теория относительности/Под ред. Э. Амальди и Г. Пичелла. М., 1982.
7. Гусев А. В., Цыганов А. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. 33, № 5. С. 68.

Поступила в редакцию
08.02.95