ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

КОНДЕНСАТЫ КХД И АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ФОРМФАКТОРА ПИОНА В МЕТОДАХ ПРАВИЛ СУММ

Д. В. Мещеряков, В. Б. Тверской

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Простое представление формфактора пиона с физически обоснованной аналитической структурой использовано в методах правил сумм КХД. Значения конденсатов КХД получены с помощью конечно-энергетических правил сумм и правил сумм Вайнштейна—Захарова—Шифмана. Подтверждено ранее предсказанное увеличение значений четырехкваркового и глюонного конденсатов.

1. Введение

За последние 10 лет метод правил сумм стал популярным инструментом исследования непертурбативной структуры КХД. Вайнштейн, Захаров и Шифман (ВЗШ) в рамках предложенных ими глобальных правил сумм КХД определили параметры адронных резонансов в терминах вакуумных ожиданий кварковых и глюонных полей — так называемых вакуумных конденсатов КХД [1]. В настоящее время считается, что вакуумные конденсаты, будучи существенно непертурбативными величинами, тесно связаны с явлением конфайнмента. Это делает задачу точного определения данных величин весьма важной и актуальной.

Определению величин конденсатов КХД различными методами было посвящено значительное число работ [1—8], но ситуация все еще остается неудовлетворительной. В работе [2] глюонный и четырехкварковый конденсаты определялись с помощью правил сумм ВЗШ, при этом было использовано простое представление формфактора пиона [9]. Несмотря на его простоту, оно правильно описывает экспериментальные данные в широком интервале энергий, приводит к согласующимся с экспериментом параметрам ρ-мезона и обладает физически ясной аналитической структурой. Полученное значение глюонного конденсата оказалось примерно в 6 раз больше «стандартного», приведенного в [1], а значение четырехкваркового конденсата превзошло «стандартное» значение примерно в 1,5 раза [2]. Эти результаты качественно согласуются (а значение глюонного конденсата согласуется и количественно) с результатами Бертлмана и др. [3]. В последней работе для определения значений конденсатов использовались правила сумм специального типа — конечно-энергетические, причем была продемонстрирована самосогласованность применяемого метода.

В работе [10] мы использовали представление формфактора пиона из [9] в конечно-энергетических правилах сумм и получили условие дуальности для метода правил сумм. С другой стороны, подход ВЗШ [1] приводит к слишком широкому интервалу для порога континуума и, следовательно, к меньшей надежности значений конденсатов, получаемых этим методом.

Поэтому в данной работе мы используем результат для порога континуума, полученный в [10], в правилах сумм ВЗШ. Таким путем можно сравнить подходы ВЗШ и конечно-энергетические правила сумм и получить более надежную информацию о конденсатах КХД.

2. Формфактор пиона и униформизующая переменная

В этом разделе мы приведем основные результаты [10], которые будут использованы в дальнейшем. Основной вклад в формфактор пиона при энергиях $|s| \leqslant 10$ ГэВ^2 дает ρ-мезон [9, 10]. Мы будем характеризовать этот вклад следующими параметрами: массой m_ρ, шириной Γ_ρ, длиной рассеяния $a_1{}^1$ и $\langle r_\pi{}^2 \rangle$ — среднеквадратичным радиусом пиона. Формфактор представляет собой граничное значение функции $F(s)$, аналитической в комплексной плоскости s с разрезом $[4\, m_\pi{}^2, \infty)$.

В области $4\, m_\pi{}^2 \leqslant s \leqslant 16\, m_\pi{}^2$ в условие унитарности дает вклад только двухчастичное состояние. Мы же будем считать двухчастичное условие унитарности справедливым на всем разрезе. В этом приближении функция $F(s)$ имеет разрез $(-\infty, 0]$ на втором листе своей римановой поверхности благодаря кроссинг-каналу p-волновой изовекторной амплитуды рассеяния [10]. В результате сделанных предположений и упрощений $F(s)$ является мероморфной функцией на четырехлистной римановой поверхности:

$$F(s) = \frac{C}{[(w-w_1)(w+w_1^*)(w-w_2)(w+w_2^*)]}, \tag{1}$$

где униформизующая переменная $w(s) = \sqrt{iq-1}$, $q = \sqrt{\frac{s}{4m_\pi^2} - 1}$, а C — нормировочная константа. В комплексной плоскости w образами действительной оси $\operatorname{Im} q = 0$ являются две гиперболы: $v^2 - u^2 = 1$, $uv = q/2$, где $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$.

В приближении нулевой ширины ρ-мезона полюсы w_1, $w_1{}^*$ расположены на верхней гиперболе $v > 0$ и симметричны по отношению к оси $u=0$. Полюсы w_2, $w_2{}^*$ расположены на гиперболе $v < 0$ и симметричны относительно той же оси. В данной работе мы используем значения параметров, соответствующие 4% точности экспериментальных характеристик ρ-мезона [9]. Эти значения таковы, что сдвиги полюсов w_1 и $w_1{}^*$ с гиперболы на второй лист римановой поверхности являются малыми и пропорциональными Γ_ρ / m_ρ. Это может интерпретироваться как пертурбативный эффект. Однако сдвиги полюсов w_2 и $w_2{}^*$ являются существенно большими, чем сдвиги верхних полюсов. Этот эффект может рассматриваться как непертурбативный. Можно сделать вывод, что данное представление позволяет явно выделить пертурбативные и непертурбативные параметры, что удобно для использования в методе правил сумм.

3. Конечно-энергетические правила сумм

Мы используем конечно-энергетические правила сумм в форме Бертлмана и др. [3]:

$$(-1)^{n-1} C_{2n} \langle O_{2n} \rangle = 8\pi^2 \int_0^{s_0} ds s^{n-1} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \pi(s) - \frac{s_0^n}{n} F_{2n}(s_0), \tag{2}$$

где $n = 1, 2, \ldots$, а $F_{2n}(s_0)$ представляют собой поправки теории возмущений, $F_{2n}(s_0) = 1 + \alpha_s(s_0)/\pi + O(\alpha_s^2)$. Здесь $\alpha_s(s_0)$ — бегущая константа связи КХД, величина $C_{2n}\langle O_{2n} \rangle$ — линейная комбинация вакуумных конденсатов фиксированной размерности $2n$ и s_0 — порог континуума. Для практического использования приведенных правил сумм необходимо вычислить интегралы R_{2n} в правых частях (2). Переписывая подынтегральные выражения в терминах формфактора пиона и принимая во внимание малость сдвигов полюсов w_1, w_1^* по отношению к положительной части гиперболы, используем хорошо известное представление дельта-функции: $\lim\limits_{a\to 0} \frac{a}{a^2+x^2} = \pi\delta(x)$. Интегрирование от 0 до s_0 в плоскости s превращается в плоскости w в интегрирование по положительной ветви гиперболы $\operatorname{Im} w > 0$. После некоторых вычислений получаем следующий результат:

$$R_{2n}(s_0) = \frac{8\pi^2 n}{s_0^n} (4m_\pi^2 (2u_1^2+1)^2)^{n-1} \Phi, \tag{3}$$

где

$$\Phi = \frac{4m_\pi^2 u_1^2 (u_1^2+1)\left(u_1^2 + (v_1 - \sqrt{2})^2\right)^2 \left(u_2^2 + (v_2 - \sqrt{2})^2\right)^2}{3\pi\delta (2u_1^2+1)^{\frac{5}{2}} ((u_1-u_2)^2 + (v_1-v_2)^2)((u_1+u_2)^2 + (u_1-v_2)^2)}, \tag{4}$$

δ — минимальное расстояние между гиперболой и $w = u_1 + iv_1$. Фактически изложенная процедура представляет собой выделение непертурбативного вклада в левую часть конечно-энергетических правил сумм, связанного с существованием ρ-мезона. Относительная простота использованного представления формфактора пиона позволяет получить простые конечно-энергетические соотношения для конденсатов КХД. Выписывая первые три уравнения (2) в явном виде и пренебрегая членами, пропорциональными массам u и d кварков [9], а также выражая вклады размерностей 4 и 6 через глюонный $\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \right\rangle$ и четырехкварковый конденсат $C_2 = \alpha_s \langle \bar{q} q\rangle^2$ [10] и пренебрегая членами $O(\alpha_s^2)$, получаем следующее конечно-энергетическое соотношение для $C_4\langle O_4\rangle$ и $C_6\langle O_6\rangle$:

$$\frac{C_6\langle O_6\rangle}{C_4\langle O_4\rangle} = \frac{2s_1}{3} \frac{3-\tau^2}{\tau-2}, \tag{5}$$

где $\tau = s_0/s_1$. Здесь $s_1 = 4m_\pi^2(2u_1^2+1)^2$. Это соотношение позволяет оценить s_0. Конденсаты размерностей 6 и 4, т. е. $C_6\langle O_6\rangle$ и $C_4\langle O_4\rangle$, имеют правильные знаки [1], только если левая часть (5) отрицательна. Это приводит к следующему условию для s_0: $2s_1 \leqslant s_0 \leqslant \infty$. Здесь s_1 может рассматриваться как квадрат эффективной массы ρ-мезона: $s_1 = 4m_\pi^2(2u_1^2+1)^2 = 0{,}63$ ГэВ^2. То есть имеем

$$1{,}26 \text{ ГэВ}^2 \leqslant s_0 \leqslant \infty. \tag{6}$$

Мы получили простое конечно-энергетическое соотношение для конденсатов КХД (5), которое позволяет проверить согласованность значений $C_6\langle O_6\rangle$, $C_4\langle O_4\rangle$ и s_0.

Из (5) можно получить условия для отношения величин конденсатов. Формулу (5) можно рассматривать как уравнение относительно τ. Это уравнение имеет решение в том и только в том случае, если

$$-1{,}0 \text{ ГэВ}^2 \leqslant \frac{C_6\langle O_6\rangle}{C_4\langle O_4\rangle} \leqslant 0, \quad \frac{C_6\langle O_6\rangle}{C_4\langle O_4\rangle} \leqslant -2{,}5 \text{ ГэВ}^2. \tag{7}$$

В неравенствах (7) нет зависимости от s_0. Легко видеть, что «стандартные» значения конденсатов из [1] дают $C_6\langle O_6\rangle / C_4\langle O_4\rangle = -1{,}77$ ГэВ^2, что не удовлетворяет полученным соотношениям. В противоположность этому значения конденсатов, полученных в работе [2], так же как и результаты [3], удовлетворяют условиям (7). Непосредственно из уравнений (2) с учетом ошибок параметров для значения s_0 получаем

$$0{,}52\ \text{ГэВ}^2 \leqslant s_0 \leqslant 1{,}40\ \text{ГэВ}^2. \tag{8}$$

Объединяя (8) с условием (6), которое является следствием конечно-энергетического соотношения (5), имеем

$$1{,}26\ \text{ГэВ}^2 \leqslant s_0 \leqslant 1{,}40\ \text{ГэВ}^2. \tag{9}$$

В результате численных расчетов с учетом (9) получаем

$$\begin{gathered} 0{,}05\ \text{ГэВ}^4 \leqslant C_4 \langle O_4 \rangle \leqslant 0{,}16\ \text{ГэВ}^4, \\ -0{,}45\ \text{ГэВ}^6 \leqslant C_6 \langle O_6 \rangle \leqslant -0{,}24\ \text{ГэВ}^6. \end{gathered} \tag{10}$$

Легко видеть, что значения, полученные Бертлманом и др. [3], хорошо согласуются с (10).

4. Правила сумм ВЗШ

В этом разделе мы рассмотрим правила сумм ВЗШ [1]. Пренебрегая в правилах сумм вкладом, пропорциональным $(m_u + m_d)$, как это было сделано в разделе 3, и используя при насыщении правил сумм приближение $R^{I=1}(s) = \sigma(e^+e^- \to \pi^+\pi^-)/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$, следуя разделу 3, для правых частей правил сумм получаем

$$\frac{2}{3} M^{-2} \int ds\, e^{-\frac{s}{M^2}} R^{I=1}(s) = \Psi(u_i, v_i), \quad i = 1,\ 2, \tag{11a}$$

$$\frac{2}{6} M^{-4} \int ds^2\, e^{-\frac{s}{M^2}} R^{I=1}(s) = s_1 \Psi(u_i, v_i), \quad i = 1,\ 2, \tag{11b}$$

где

$$\Psi = \frac{32 m_\pi^2 u_1^2 (u_1^2 + 1)\left(u_1^2 + (v_1 - \sqrt{2})^2\right)^2 \left(u_2^2 + (v_2 - \sqrt{2})^2\right)^2}{M^2 \delta (2u_1^2 + 1)^{\frac{5}{2}} \left((u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2\right)\left((u_1 + u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2\right)} e^{-\frac{s_1}{M^2}} \tag{12}$$

и δ — минимальное расстояние между гиперболой, $w_1 = u_1 + i w_1$, а M — борелевский параметр [1].

В [2] мы рассматривали s_0 как дополнительный свободный параметр. Однако ошибки численного определения значения s_0 составляли примерно 60%, так что можно сделать вывод, что в данном подходе определить значение s_0 с помощью правил сумм ВЗШ затруднительно. Поэтому возьмем значение s_0 из (9). Мы используем тот же интервал дуальности для параметра M, что и в [1]. Численное определение $C_4\langle O_4\rangle$ и $C_6\langle O_6\rangle$, входящих в качестве свободных параметров в левые части правил сумм, дает следующий результат:

$$\begin{gathered} 0{,}16\ \text{ГэВ}^4 \leqslant C_4 \langle O_4 \rangle \leqslant 0{,}28\ \text{ГэВ}^4, \\ -0{,}16\ \text{ГэВ}^6 \leqslant C_6 \langle O_6 \rangle \leqslant -0{,}08\ \text{ГэВ}^6. \end{gathered} \tag{13}$$

Значение $C_4\langle O_4\rangle$ в пределах ошибок определения согласуется с (10) и с результатами работы [3]. Согласие значений $C_6\langle O_6\rangle$, полученных с помощью конечно-энергетических правил сумм и правил сумм ВЗШ, не является таким же хорошим. Необходимо отметить, что значения (13) удовлетворяют (7).

5. Заключение

На основе простого представления формфактора пиона (1) мы получили конечно-энергетическое соотношение для конденсатов КХД размерностей 6 и 4 (5). Это соотношение позволяет оценить значение s_0-порога континуума (9). Кроме того, мы получили условие для отношения конденсатов КХД (7), с помощью которого можно проверить самосогласованность значений конденсатов. Наконец, мы нашли значения $C_4\langle O_4\rangle$ и $C_6\langle O_6\rangle$ с помощью конечно-энергетических правил сумм и правил сумм ВЗШ. Значения глюонного конденсата, вычисленное с помощью конечно-энергетических правил сумм и правил сумм ВЗШ, в пределах ошибок определения согласуются друг с другом. Согласие значений четырехкваркового конденсата, найденное двумя рассмотренными методами, не является таким же хорошим. Несмотря на это, можно сделать вывод, что использование конечно-энергетических соотношений в методе правил сумм ВЗШ с точностью до ошибок определения не приводит к противоречию результатов, получаемых в рамках двух рассмотренных подходов.

В качестве следующего шага было бы интересно исследовать возможные флуктуации конденсатов в духе подхода [11]. Как отмечалось в [11], при этом достигается большая стабильность результатов, получаемых с помощью правил сумм. Этим вопросам будут посвящены следующие работы.

Авторам приятно поблагодарить Р. А. Бертлмана, К. Шилхера, А. Бартла, Х. Питчмана, П. Хофера и К. Адама за интерес к работе и полезные обсуждения, а также И. В. Барьяхтара за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shifman M. A., Vainstein A. I., Zakharov V. I.//Nucl. Phys. 1979. **B147.** P. 3855; 448; 519.
2. Мещеряков Д. В.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. **32,** № 6. С. 44.
3. Bertlmann R. A., Domínguez C. A., Loewe M. et al.//Z. f. Phys. 1988. **C39.** P. 231.
4. Arbuzov B. A., Boos E. E., Turashvili K. Sh.//Z. f. Phys. 1986. **C30.** P. 287.
5. Gogokhia V. Sh., Kluge G., Magradze B. A.//KFKI Preprint. 1990. N09A.
6. Bordes J., Giménez V., Penarocha J. A.//Phys. Lett. 1989. **B223.** P. 252.
7. Гешкенбейн Б. Л.//Ядерная физика. 1990. **51.** С. 1121.
8. Ciulli S., Geniet F., Papadopoulos N. A., Schilder K.//Z. f. Phys. 1988. **C39.** P. 439.
9. Быковский Б. В., Мещеряков В. А., Мещеряков Д. В.//Ядерная физика. 1990. **51.** С. 783.
10. Meshcheryakov D. V.//Z. f. Phys. 1992. **C55.** P. 643.
11. Bakulev A. P., Radyushkin A. V.//Phys. Lett. 1991. **B271.** P. 223; Mikhailov S. V., Radyushkin A. V.//Phys. Rev. 1992. **D45.** P. 1754.

Поступила в редакцию
10.03.95