

УДК 519.2:534

О ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ ИНТЕРПРЕТАЦИИ: СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Ю. П. Пытьев, Чжоу Яомиц, С. А. Филатова
(кафедра компьютерных методов физики)

Работа посвящена сравнительному анализу различных классов решающих алгоритмов в задаче интерпретации измерений. Показано, в частности, что в некоторых из рассмотренных линейных задач интерпретации измерений применение более широкого класса нелинейных методов не приводит к улучшению качества интерпретации. Исследованы предельные возможности датчиков второго порядка в задачах измерения перемещения и скорости.

1. Введение

В работе рассматривается типичная задача интерпретации измерения, выполненного по схеме

$$\xi = Af + v,$$

в которой ξ — искаженный шумом v выходной сигнал прибора A , на вход которого поступил сигнал f от объекта и среды, возмущенных измерением. Задача интерпретации измерений состоит в том, чтобы извлечь из ξ как можно более точные значения параметров объекта, свойственные системе «объект—среда», не возмущенной измерением. При этом предполагается, что информация об искомым значениям параметров содержится в сигнале f и известен оператор U , позволяющий представить их в виде Uf . Оператор U моделирует то, что можно назвать идеальным измерительным прибором, который при измерении взаимодействует с объектом и средой так же, как A , на его вход поступает такой же сигнал f от объекта и среды, но его выходной сигнал Uf равен искомым значениям параметров объекта в системе «объект—среда», не возмущенной измерением.

Задача интерпретации измерения сводится к определению оператора R такого, что $R\xi$ — наиболее точная версия Uf [1]. В работе рассматриваются линейные и нелинейные задачи интерпретации измерения и сравниваются их предельные возможности при различных моделях измерений.

2. Линейные задачи интерпретации

Пусть $R\xi = RAf + Rv$, $f \in R_m$, $\xi \in R_n$, — линейное преобразование измерения ξ и задана модель $[A, \Sigma]$ схемы измерения (1), т. е. известен линейный оператор $A: R_m \rightarrow R_n$, шум v считается случайным вектором евклидова пространства R_n с известным математическим ожиданием $E v = 0$ и ковариационным оператором $\Sigma: R_n \rightarrow R_n$; f — априори произвольный вектор евклидова пространства R_m .

Линейная задача интерпретации измерения ξ для модели $[A, \Sigma]$ состоит в определении линейного оператора R как решения задачи на

минимум среднеквадратичной (с.к.) погрешности интерпретации $R\xi$ как Uf :

$$\sup_{f \in \mathcal{R}_m} E \|R\xi - Uf\|^2 \sim \min_R \quad (2)$$

в которой считается, что $U: \mathcal{R}_m \rightarrow \mathcal{R}_k$ — линейный оператор. Поскольку $\sup_{f \in \mathcal{R}_m} E \|R\xi - Uf\|^2 < \infty$, если и только если $RA=U$, то

$$\min_{R, RA=U} \sup_{f \in \mathcal{R}_m} E \|R\xi - Uf\|^2 = \min_{R, RA=U} E \|Rv\|^2.$$

Поэтому искомым линейным оператором $R_*: \mathcal{R}_m \rightarrow \mathcal{R}_k$ является решением задачи $E \|R_*v\|^2 = \min\{E \|Rv\|^2 | R: RA=U\}$, а соответственно погрешность интерпретации (редукции) измерения

$$\sup_{f \in \mathcal{R}_m} E \|R_*\xi - Uf\|^2 = \text{tr } R_*\Sigma R_*^*.$$

Теорема 1 [1]. Пусть $\Sigma > 0$ — невырожденный оператор, тогда задача (2) разрешима и имеет единственное решение $R_* = U(A^*\Sigma^{-1}A)^{-1}A^*\Sigma^{-1}$,

$$\text{если и только если } U(I-A^{-1}A) = 0. \quad (3)$$

При этом $h(U) = \text{tr } R_*\Sigma R_*^* = \text{tr } U(A^*\Sigma^{-1}A)^{-1}U^*$. ■

Хотя при решении задачи (2) не требуется знание распределения погрешности, тем не менее корреляционный оператор шума v является достаточно подробной его характеристикой, и в ряде экспериментов информация об измерительной погрешности недостаточна для задания Σ . Рассмотрим две возможные модели измерения, в которых оператор Σ априори неизвестен. В обоих случаях оператор A задан, а сведения о погрешности — различны [2].

В ряде экспериментов известно лишь, что средняя энергия шума ограничена: $E \|v\|^2 = \text{tr } \Sigma \leq \delta$. В этом случае будем говорить, что задана модель $[A, E \|v\|^2 \leq \delta]$ схемы измерения (1). Если априори известно, что $\|v\|^2 \leq \delta$ с вероятностью 1, то будем говорить, что задана модель $[A, \|v\|^2 \leq \delta \pmod{P}]$. Задачи редукции для этих моделей ставятся как вариационные задачи

$$h(R, U, \delta) = \sup_{f \in \mathcal{R}_m} \sup_{E \|v\|^2 \leq \delta} E \|R\xi - Uf\|^2 \sim \min_{R: RA=U} \sup_{E \|v\|^2 \leq \delta} E \|Rv\|^2, \quad (4)$$

$$h(R, U, \delta) = \sup_{f \in \mathcal{R}_m} \sup_{\|v\|^2 \leq \delta} E \|R\xi - Uf\|^2 \sim \min_{R: RA=U} \sup_{\|v\|^2 \leq \delta} E \|Rv\|^2 \quad (5)$$

соответственно. Здесь точная верхняя грань слева вычисляется по всем входным сигналам $f \in \mathcal{R}_m$ и по всем распределениям шума, подчиненным условию $E \|v\|^2 \leq \delta$ или $\|v\|^2 \leq \delta \pmod{P}$ в зависимости от модели погрешности; $\sup E \|Rv\|^2$ справа вычисляется по всем распределениям случайного вектора v , удовлетворяющим условиям, заданным в соответствующих моделях.

Теорема 2 [2]. Задачи (4), (5) разрешимы при условии (3), их решения R_* единственны, совпадают и даются равенством $R_* = UA^{-1}$.

*) A^{-1} — псевдообратный оператор к A .

При этом погрешность интерпретации

$$h(U, \delta) = h(R_*, U, \delta) = \delta \|U(A^*A) - U^*\|. \blacksquare$$

3. Нелинейные задачи интерпретации

Если о входном сигнале f и погрешности v в (1) известно, что $f \in \mathcal{F}$, $v \in \mathcal{N}$, где \mathcal{F} и \mathcal{N} — заданные ограниченные множества, $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}_n$ и $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}_m$ соответственно, то будем говорить, что задана модель $[A, \mathcal{F}, \mathcal{N}]$ схемы измерения (1). В этом случае задачу интерпретации (редукции) измерения (1) можно поставить как следующую задачу на условный минимакс [3]:

$$h_{\xi}(r, U) = \sup \{ \|r - Uf\|^2 \mid (f, v) : f \in \mathcal{F}, v \in \mathcal{N}, \xi = Af + v \} \sim \min, \quad (6)$$

в которой требуется минимизировать условную оценку $h_{\xi}(r, U)$ погрешности редукции (при условии, что ξ — результат измерения (1)). Ее решение $r_* = r_*(\xi)$ является искомой наиболее точной версией Uf , $f \in \mathcal{F}$, основанной на априорных данных и результате измерения ξ .

Дело в том, что при оговоренных условиях задачу редукции измерения (1) естественно поставить как задачу минимизации на множестве всех решающих функций $R(\cdot)$ максимальной (на множестве всех возможных f и ξ) погрешности $\|R(\xi) - Uf\|^2$ интерпретации $R(\xi)$ как Uf :

$$h(R(\cdot), U) = \sup \{ \|R(\xi) - Uf\|^2 \mid \xi = Af + v, f \in \mathcal{F}, v \in \mathcal{N} \} \sim \min. \quad (7)$$

Решение $r_* = r_*(\xi)$ задачи (6) дает решение задачи (7) — искомую функцию $R_*(\xi) = r_*(\xi)$ [3]. Что касается задачи (6), то ее решение имеет довольно простую геометрическую интерпретацию. Пусть для фиксированного $\xi \in A\mathcal{F} + \mathcal{N}$ $\mathcal{U}_{\xi} = \{Uf, f \in \mathcal{F}, \xi = Af + v, v \in \mathcal{N}\}$ и S_{ξ} — шар минимального радиуса, содержащий множество \mathcal{U}_{ξ} . Тогда, как известно [4], решение $r_*(\xi)$ задачи (6) есть центр S_{ξ} и $h_{\xi}(R_*(\xi), U) = (\text{diam } S_{\xi})^2/4$.

В свою очередь, оценка погрешности интерпретации

$$h(R_*(\cdot), U) = \sup \{ (\text{diam } S_{\xi})^2/4 \mid \xi \in A\mathcal{F} + \mathcal{N} \}. \quad (8)$$

При этом, очевидно, факт линейности U несуществен.

Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{R}_m$ и $\mathcal{N} = \{v \in \mathcal{R}_n, \|v\|^2 \leq \delta\}$, при этом задача (6) обретает следующий вид:

$$\sup \{ \|r - Uf\|^2 \mid f \in \mathcal{R}_m, v \in \mathcal{R}_n, \xi = Af + v, \|v\|^2 \leq \delta \} \sim \min. \quad (9)$$

Теорема 3. Если оператор U удовлетворяет условию (3), то решение задачи (9) существует, единственно и дается равенством

$$r_* = R(\xi) = UA^{-1}\xi, \quad (10)$$

погрешности интерпретации $h(R_*(\cdot), U) = \delta \|U(A^*A) - U^*\|$.

Согласно теоремам 2 и 3 решения задач (4), (5) и (9) совпадают. Теоремы 2 и 3 показывают, что в рассматриваемом случае модели измерения возможность использовать более широкий класс нелинейных решений не позволяет получить выигрыш в точности интерпретации по сравнению с линейной редукцией.

С другой стороны, если в теореме 1 корреляционный оператор Σ удовлетворяет условию $\text{tr} \Sigma \leq \delta$, то, очевидно, $h(U) \leq h(U, \delta)$, причем выигрыш в точности интерпретации может быть значительным. Если, например, A^*A — вырожденный оператор, то нетрудно убедиться, что $\inf\{h(U) = \text{tr} U(A^*\Sigma^{-1}A) - U^* | \text{tr} \Sigma = \delta\} = 0$, т. е. существует распределение шума v , при котором $\text{tr} \Sigma = E \|v\|^2 = \delta$ и вместе с тем возможна сколь угодно точная интерпретация измерения. Если оператор A^*A невырожден, то для $U=I$

$$\inf\{h(I) = \text{tr} (A^*\Sigma^{-1}A)^{-1} | \text{tr} \Sigma = \delta\} = \delta / \|(A^*A)\| \leq \delta \|(A^*A)^{-1}\| = h(I, \delta),$$

причем левая часть этого неравенства в прикладных задачах, как правило, существенно меньше, чем правая.

4. Вычислительный эксперимент

В вычислительном эксперименте исследована измерительно-вычислительная система (ИВС), измерительная часть которой является измерительным преобразователем (ИП) второго порядка [5] и описывается решением задачи Коши

$$\begin{aligned} y''(t) + 2\alpha y'(t) + \beta y(t) &= f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ y(0) &= y_0, \quad y'(0) = y'_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Пользуясь механической аналогией, можно сказать, что речь идет о колебательной системе, в которой α определяет затухание, β — упругость, и масса выбрана равной единице. Измерительные преобразователи второго порядка широко используются в научных исследованиях и промышленности, и исследование соответствующих ИВС представляет значительный интерес.

Рассмотрим задачу измерения перемещения опоры, на которой установлен ИП. Пусть функция $\chi(t)$, $0 \leq t \leq T$, задает движение опоры. Тогда в (11) $f(t) = \beta\chi(t)$, $0 \leq t \leq T$, и, если измеряются координаты $y(t)$, $0 \leq t \leq T$, измерительного преобразователя, то схема измерения (1) будет иметь вид

$$\xi(t) = y(t) + v(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (12)$$

где

$$y(t) = Pe^{-\alpha t} \cos \omega t + Qe^{-\alpha t} \sin \omega t + \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau;$$

$\omega = \sqrt{\beta - \alpha^2}$, $P = y_0$, $Q = (\alpha/\omega)y_0 + (1/\omega)y'_0$, $K(t) = (1/\omega)e^{-\alpha t} \sin \omega t$, $0 \leq t \leq T$ и выбран режим, при котором $\beta - \alpha^2 > 0$.

Рассмотрим следующие задачи интерпретации измерений.

1. Предположим, что начальные условия y_0 и y'_0 известны, причем $y_0 = 0$, и $y'_0 = 0$, и $f(t) = \beta\chi(t)$, $n = m$. Требуется определить $\chi(t)$ и $\chi'(t)$, т. е. $U = \beta^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ d/dt \end{pmatrix}$. В вычислительном эксперименте получены зависимости с. к. погрешности интерпретации измерения, представленные на рис. 1 и 2.

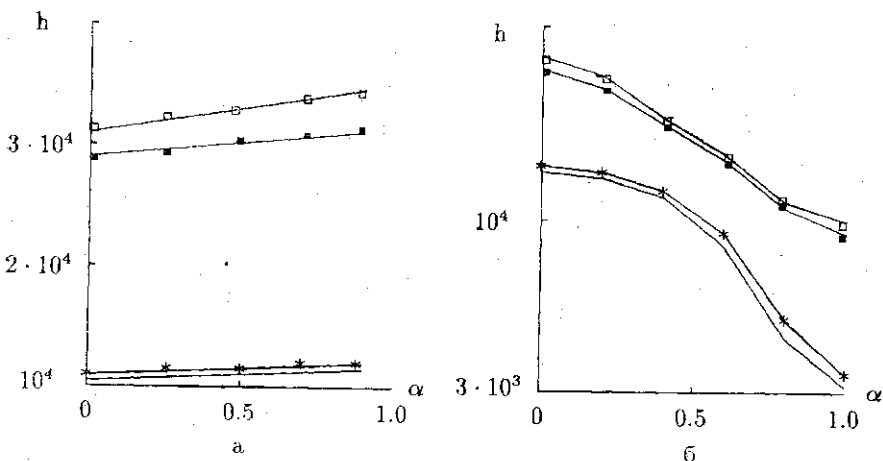


Рис. 1. Графики зависимости с. к. погрешности измерения перемещения опоры от коэффициента затухания α при $\beta = \text{const}$ (а) и $\omega = \text{const}$ (б). При известных начальных условиях: сплошная линия — для модели $[A, \Sigma]$, линия с черными квадратами — для модели $[A, \text{tr } \Sigma]$. При неизвестных начальных условиях: линия со звездочками — для модели $[A, \Sigma]$, со светлыми квадратами — для модели $[A, \text{tr } \Sigma]$

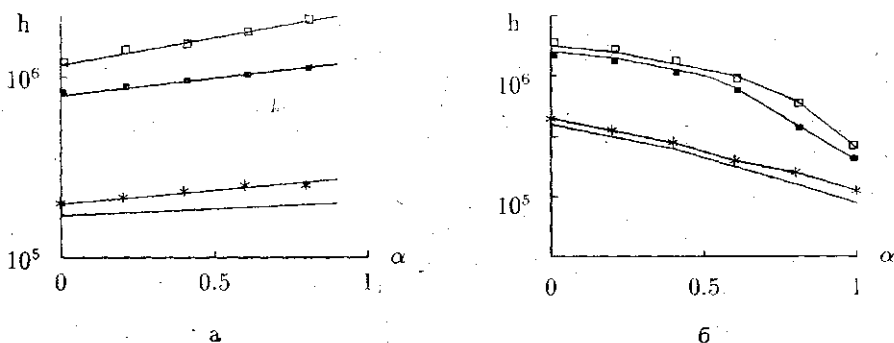


Рис. 2. Графики зависимости с. к. погрешности измерения скорости движения опоры от коэффициента затухания α при $\beta = \text{const}$ (а) и $\omega = \text{const}$ (б). Обозначения — как на рис. 1

2. Рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей, но с неизвестными начальными условиями y_0 и y_0' . Требуется определить $\chi(t)$, $\chi'(t)$, y_0 и y_0' . В этом случае в схеме измерения (1) $f = (y_0, y_0', \beta\chi(t_1), \dots, \beta\chi(t_m))^*$. Графики зависимости с. к. погрешности интерпретации измерения показаны на рис. 1 и 2.

Наконец, в задаче определения начальных условий погрешности определения y_0 для моделей $[A, \Sigma]$ и $[A, \text{tr } \Sigma]$ не зависят от α (погрешности определения y_0' показаны на рис. 3).

3. Рассмотрим задачу определения движения опоры, в которой перемещение датчика регистрируется относительно опоры, так что схема измерения имеет вид $\xi(t) = y(t) - \chi(t) + v(t)$, $0 \leq t \leq T$. Результаты, полученные в вычислительном эксперименте, представлены на рис. 4.

В этой задаче выигрыш в точности при известном ковариационном операторе существенно больше, чем в случае схемы измерения (12), изменился характер зависимости с.к. ошибки интерпретации от α . Существенно точнее и результаты интерпретации.

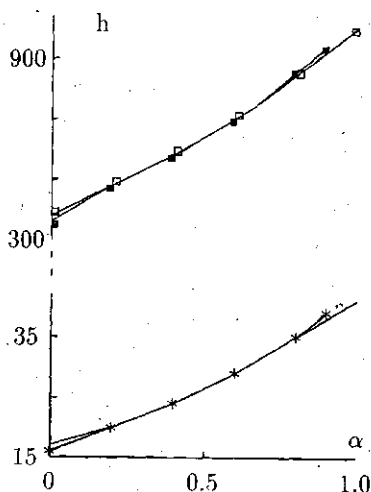


Рис. 3. Графики с.к. погрешности определения y_0' как функции α . При $\beta = \text{const}$: линия со звездочками — для модели $[A, \Sigma]$, с черными квадратами — для модели $[A, \text{tr} \Sigma]$; при $\omega = \pi/4$: сплошная линия — для модели $[A, \Sigma]$, со светлыми квадратами — для модели $[A, \text{tr} \Sigma]$

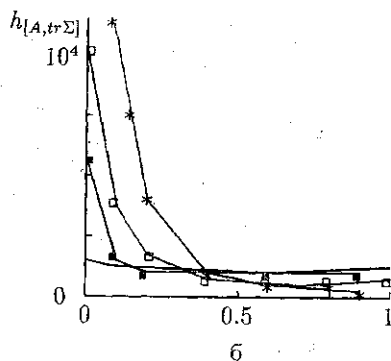
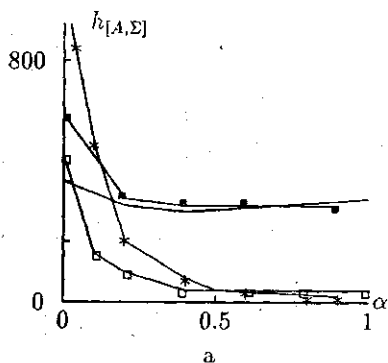


Рис. 4. Графики с.к. погрешности определения $\chi(t_i)$ и $\chi'(t_i)$ как функций α . При $\beta = \text{const}$: линия со звездочками — для $\chi(t_i)$, с черными квадратами — для $\chi'(t_i)$; при $\omega = \text{const}$: линия со светлыми квадратами — для $\chi(t_i)$, сплошная линия — для $\chi'(t_i)$

5. Условия, определяющие качество ИП второго порядка

В связи с полученными результатами, указывающими на существенно различный характер зависимости с.к. ошибки интерпретации измерений от параметров ИП, интересно получить условия, определяющие качество ИП 2-го порядка при решении любой линейной задачи интерпретации. Как известно, модель $[A, \Sigma]$ равномерно лучше, чем $[\tilde{A}, \tilde{\Sigma}]$ [1], и для любого оператора U позволяет оценить любой сигнал Uf с с.к. погрешностью $h(U)$ не большей, чем $\tilde{h}(U)$, если и только если $A^* \Sigma^{-1} A \geq \tilde{A}^* \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{A}$ или, что в данном случае одно и то же, $(A^* \Sigma^{-1} A)^{-1} \leq (\tilde{A}^* \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{A})^{-1}$. Пусть $\Sigma = \tilde{\Sigma} = I$. Дифференциальный оператор A^{-1} определяется условиями

$$(A^{-1}y)(t) = y''(t) + 2\alpha y'(t) + \beta y(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

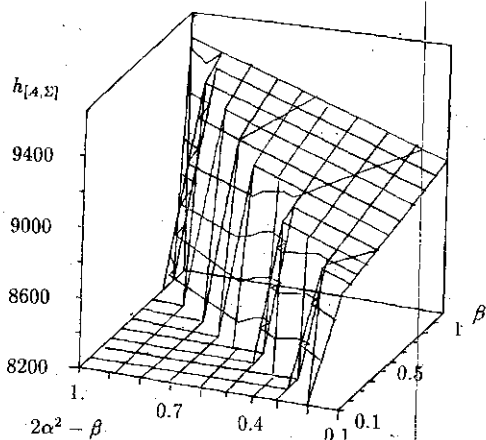
где $y(\cdot)$ — функция, определенная на $[0, T]$, имеющая абсолютно непрерывную первую производную $y'(\cdot)$ и интегрируемую с квадратом на

$[0, T]$ вторую $y''(\cdot)$. Для сопряженного оператора найдем $(A^{*-1}y)(t) = y''(t) - 2\alpha y'(t) + \beta y(t)$, $y(T) = y'(T) = 0$. При этом

$$((A^*A)^{-1}y)(t) = y''''(t) + 2(\beta - 2\alpha^2)y''(t) + \beta^2 y(t), \quad y(T) = y'(T) = 0,$$

$$y''(t) - 2\alpha y'(t) + \beta y(t)|_{t=0} = 0, \quad y''''(t) - 2\alpha y'''(t) + \beta y''(t)|_{t=0} = 0,$$

и, как нетрудно проверить, $(A^*A)^{-1} \leq (\tilde{A}^*\tilde{A})^{-1}$ на общей области определения, если $\tilde{\beta}^2 \geq \beta^2$, $\tilde{\beta} - 2\tilde{\alpha}^2 \geq \beta - 2\alpha^2$.



При этих условиях ИП с параметрами α, β обеспечит меньшую с. к. погрешность решения любой линейной задачи интерпретации, чем ИП с параметрами $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ (рис. 5).

Авторы выражают признательность РФФИ (93-01-00703) за финансовую поддержку исследований.

Рис. 5. Зависимости с. к. погрешности оценивая $\chi(t)$ от β и $2\alpha^2 - \beta$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пытьев Ю. П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
2. Пытьев Ю. П., Сердобольская М. Л. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 1988, 29, № 6. С. 78.
3. Пытьев Ю. П. // Матем. моделирование. 1992, 4, № 2. С. 76.
4. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., 1980.
5. Азицов А. М., Гордов А. Н. Точность измерительных преобразователей. Л., 1975.

Поступила в редакцию
06.05.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 6

УДК 621.391.822

НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТОКОВОГО ШУМА $1/f$

М. Е. Герценштейн, В. В. Потемкин

(кафедра физики колебаний)

Анализируется простейший класс нелинейных уравнений и показывается, какой степени нелинейность может приводить к спектру мощности вида $1/f$. Стационарность математической модели достигается введением импульсного источника. Дано обсуждение физических механизмов, которые могут приводить к изложенной модели.

До настоящего времени нет удовлетворительных теоретических моделей токового фликкерного шума $1/f$ в образце. Модели должны дать спектр шума, стационарность шума, интенсивность шума.

Мы ограничимся только первыми двумя требованиями и попытаемся найти математические модели, которые приводят к желаемым результатам. Отметим три обстоятельства.

Квантовая модель шума $1/f$, в которой токи низких частот возникают как результат интерференции Ψ -волн электрона, рассеянного кулоновским центром без излучения тормозного кванта и с излучением [1], оказалась несостоятельной. Для частот порядка 10 Гц и ниже модель требует образца километровых размеров, что намного превышает реальные микронные размеры.

Спектр мощности $1/\sqrt{f}$ требует особенности $1/\sqrt{f}$ в амплитуде, иначе нарушается аналитичность при малых частотах.

Конкретные механизмы равновесного шума $1/f$, у которых флуктуации электрического сопротивления связаны с флуктуациями термодинамических величин, запрещены термодинамикой [2].

Приведем соображения о том, что и при отказе от термодинамического равновесия линейная теория будет недостаточна. Пусть $\varphi(r, t)$ — величина, определяющая флуктуации проводимости, причем флуктуации проводимости линейно связаны с φ . Для медленных процессов φ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \Delta \varphi. \quad (1)$$

Для медленных процессов достаточно удержать первую производную по времени, появление лапласиана $\Delta \varphi$ следует из соображений инвариантности. Общее решение (1) будет

$$\varphi = \sum_s c_s \varphi_s(\bar{r}) \exp(-\lambda_s t), \quad (2)$$

где λ — собственные значения. Наиболее долго живут флуктуации, соответствующие минимальному собственному значению:

$$\lambda_{\min} = D/a^2,$$

где a — размер образца. Спектр мощности имеет вид

$$S(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \lambda^2}$$

и при $\omega \rightarrow 0$ выходит на плато, и тем самым спектр $1/f$ не получается. Простейшая физическая модель, которая приводит к уравнению (1) — это диффузия по кристаллической решетке каких-то образований — рассеивателей, на которых рассеиваются электроны. При этом, если ток по образцу однороден, то блуждание рассеивателя по образцу не приводит к флуктуациям тока.

В силу сказанного выше возьмем нелинейные уравнения. Простейший класс нелинейных уравнений имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\lambda \varphi^n, \quad (3)$$

где n — целочисленный показатель степени, $n \geq 1$. Член $\Delta \varphi$, содержащий пространственные производные, мы опустим, так как иначе уравнение трудно решается. Спектр шума $1/f$ не зависит от размеров образца, что указывает на то, что пространственные градиенты мало су-

ществены, и оправдывает пренебрежение членом $\Delta\varphi$. Решение уравнения (3) имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{[\lambda(n-1)(t+t_0)]^{\frac{1}{n-1}}}, \quad (4)$$

постоянная интегрирования включена в t_0 .

Найдем спектр, опуская постоянный множитель $[\lambda(n-1)]^{-\frac{1}{n-1}}$:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp(i\omega t) dt}{(t+t_0)^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{\exp(-i\omega t_0)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp i\omega(t+t_0) dt}{(t+t_0)^{\frac{1}{n-1}}}. \quad (5)$$

При малых частотах, полагая $\omega=0$, имеем

$$S_\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt (t+t_0)^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (6)$$

При $n \geq 2$ интеграл расходится, если $t \rightarrow 0$. Поэтому интеграл имеет особую точку при $\omega=0$.

Вводя параметр $\xi = \omega(t+t_0)$, получим

$$S_\varphi(\omega) = \frac{\exp(-i\omega t_0)}{\omega^{\frac{n-2}{n-1}} \sqrt{2\pi}} \int_{\omega t_0}^\infty \frac{\exp(i\xi) d\xi}{\xi^{\frac{1}{n-1}}}. \quad (7)$$

Поэтому для спектра мощности при малых частотах имеем

$$|S_\varphi^2(\omega)| = \omega^{2\frac{n-2}{n-1}}. \quad (8)$$

При $n=2$ имеем

$$S_\varphi(\omega) = \int_{\omega t_0}^\infty \frac{\exp(i\omega\xi) d\xi}{\xi} = \text{Ei}(i\omega t_0) \approx \ln \frac{1}{\gamma\omega t_0}, \quad (9)$$

где Ei — интегральный косинус [3]. Поэтому спектр имеет логарифмическую особенность.

При $n=3$ формула (5) будет иметь вид

$$S_\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \int_{\omega t_0}^\infty \exp(i\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi\omega}} \int_{(\omega t_0)^2}^\infty \exp(iy^2) dy. \quad (10)$$

Интеграл сводится к интегралу вероятности от комплексного аргумента:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\omega t_0)^2}^\infty \exp(iy^2) dy = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\omega t_0)^2} \exp(iy^2) dy. \quad (11)$$

Когда $\omega t_0 \ll 1$, получаем, что спектральная плотность растет при $\omega \rightarrow 0$. Спектр при различных n приведен в таблице.

n	1	2	3	4	5	6
$s^2(\omega)$	Плато	$\ln^2 \frac{1}{f}$	$\frac{1}{f}$	$f - \frac{4}{3}$	$f - \frac{3}{2}$	$f - \frac{8}{5}$

Легко видеть, что $n=3$ приводит к нужному спектру мощности $1/f$.

Обсудим теперь, какие физические механизмы могут привести к нелинейности типа (3). Такие уравнения встречаются в кинетике, если реакции с одной частицей запрещены законами сохранения. При участии в реакции двух частиц $n=2$, например при аннигиляции электронов и позитронов. Низкочастотный шум связан с медленными процессами в решетке, и вопрос, какие именно дефекты решетки требуют, чтобы $n=3$, остается открытым.

Тем не менее подчеркнем, что нелинейное уравнение (3) при $n=3$ приводит на малых частотах к фликкерному спектру мощности, именно $1/f$, и тем самым это есть ответ на вопрос о спектре.

Рассмотрим, насколько приведенная математическая модель соответствует реальности.

Исходное уравнение (3) описывает деградационные процессы, так как при $t \rightarrow \infty$ и $\varphi \rightarrow \infty$, и тем самым система забывает начальное состояние, фликкерные шумы исчезают. Характерное время деградации имеет порядок t_0 , время t_0 не может быть большим. Шум $1/f$ наблюдается на частотах в несколько килогерц, и, следовательно, $t_0 < 1$ мс. Однако экспериментально показано, что шумы стационарны [4] и длятся долгое время. Поэтому в правую часть уравнения (3) должен быть введен какой-то источник $Q(t)$. Очевидно, что если источник Q не зависит от времени, то уравнение (3) имеет стационарное, не зависящее от времени решение:

$$\lambda \varphi^n = Q, \quad \varphi = \sqrt[n]{\frac{Q}{\lambda}}$$

Уравнение (3) для переменной компоненты может быть линеаризовано относительно стационарного решения, тогда приходим к линейному уравнению для флуктуаций ($n=1$), которое не дает спектра $1/f$. Поэтому источник $Q(t)$ должен быть импульсным, в виде редких случайных импульсов, возникающих в разных местах образца. После возникновения каждого импульса $Q(t)=0$ и справедливо уравнение (3), материал образца медленно релаксирует. Какова физическая природа импульсов? Здесь можно высказать различные гипотезы, допускающие возможности проверки, в том числе и экспериментальные. Приведем две.

1. Пролет быстрой ионизирующей частицы через образец, появившейся в результате радиоактивного распада или от космических лучей. В решетке появляется трек частицы. Трек — это метастабильное состояние, оно очень медленно релаксирует к термодинамическому равновесию. При медленном процессе релаксации в нелинейной системе могут возникнуть и локальные быстрые процессы. Это имеет место, например, при землетрясениях, радиоактивных распадах. При землетрясении веками накопившиеся механические напряжения в плитах приводят к быстрым подземным толчкам. При распаде долгоживущего радиоактивного ядра может образоваться и короткоживущее ядро. Могут рождаться и

самые различные дефекты. Дефекты с $n=1$ не дают особенности при $f \rightarrow 0$, дефекты с $n=2$ дают логарифмическую особенность и реагируют быстрее, дефекты с $n=3$ дают спектр $1/f$.

2. Движение дислокаций по образцу. Дислокации движутся и возникают из-за механических напряжений, которые появляются при изготовлении образца. Отжиг не снимает напряжение полностью, например, для пленок из-за различия коэффициентов теплового расширения пленки и подложки, и даже может ввести новые напряжения.

Одна из гипотез холодного ядерного синтеза предполагает возникновение сильных локальных полей при появлении микротрещин. Аналогичные эффекты могут быть при движении дислокаций. Поэтому рассмотрение нелинейных механизмов является вполне оправданным.

Мы рассматривали частный случай — токовые шумы. Однако, на наш взгляд, можно сделать выводы и для общего случая. Для фликкерного шума нужна нелинейная динамическая система и случайное импульсное воздействие со стационарными характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Handel P. H. // Phys. Rev. 1980. A22. P. 745.
2. Герценштейн М. Е., Коротков А. Н., Потемкин В. В., Степанов А. В. // Изв. вузов, Радиофизика. 1991. 34, № 1. С. 47.
3. Handel P. H. // Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik. 1989. 43. P. 261.
4. Потемкин В. В., Степанов А. В. // Радиотехн. и электроника. 1980. 25, № 6: С. 1269.

Поступила в редакцию
15.03.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1995. Т. 36, № 6

РАДИОФИЗИКА

УДК 533.9.038

ПРИМЕНЕНИЕ ЗОНДА ЛЕНГМЮРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ОКОНЧАНИЯ ПРОЦЕССА ТРАВЛЕНИЯ SiO_2 НА КРЕМНИИ

А. П. Ершов, А. В. Калинин, Я. Н. Суханов, К. В. Руденко

(кафедра физической электроники)

В плазмохимическом реакторе диодного типа с помощью зондового метода исследована эволюция параметров плазмы C_2F_6 в процессе травления слоя SiO_2 на кремнии. Показана возможность использования зонда Ленгмюра для определения момента окончания процесса травления.

1. Введение

Использование процесса сухого травления в технологии изготовления интегральных схем требует жесткого контроля параметров плазмы. Помимо контроля селективности, скорости, равномерности и анизотропии травления, несомненный интерес представляет идентификация времени окончания травления.

Из всего разнообразия методов диагностики плазмы традиционно используются две группы: оптические и масс-спектрометрические. Однако метод масс-спектрометрии достаточно дорог, а интерпретация результатов оптических методов может быть весьма сложной.

В настоящей работе для изучения эволюции параметров плазмы низкочастотного разряда в C_2F_6 в процессе травления слоя SiO_2 на