ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 2

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12:514.743

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

В. И. Григорьев, И. П. Денисова

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Получены выражения для коэффициентов разложения N-й степени произвольного тензора второго ранга в N-мерном псевдоримановом пространстве, удобные для аналитических исследований, и установлены некоторые новые соотношения тензорной алгебры.

Установление различных алгебраических соотношений для степеней тензоров второго ранга в N-мерном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ представляет несомненный интерес для различных нелинейных, а также многомерных моделей теории поля и гравитации, так как данные соотношения позволяют существенно упростить проведение вычислений и дают указания к нахождению интегрируемых комбинаций.

В работах [1, 2] было показано, что N-я степень тензора второго ранга в N-мерном псевдоримановом пространстве может быть выражена через низшие степени этого тензора и их инварианты. Развитый в этих работах метод позволяет установить ряд новых соотношений [3], которые расширяют возможности применения тензорной алгебры в теоретической физике.

Пусть в N-мерном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$, т. е. пространстве, сигнатура метрики которого содержит p знаков «плюс» и $N-p$ знаков «минус», задан некоторый ковариантный тензор второго ранга $\Psi_{nl}(x)$. Назовем S-й степенью данного тензора тензор $\Psi^{(S)}_{nm}(x)$, построенный из произведения s тензоров $\Psi_{ml}(x)$, индексы которых свернуты метрическим тензором g^{ik} по правилу

$$\Psi^{(S)}_{nl} = \underbrace{\Psi_{nm_1} g^{m_1 n_1} \Psi_{n_1 m_2} \ldots g^{m_{s-1} n_{s-1}} \Psi_{n_{s-1} l}}_{S}.$$

Сворачивая оставшиеся индексы в этом выражении, получим инвариант S-й степени этого тензора:

$$\Psi^{(S)} = \Psi^{(S)}_{ml}(x)\, g^{ml}.$$

При $S=0$ в соответствии с этим определением будем полагать $\Psi^{(0)}_{ik} = g_{ik}$, в результате чего инвариант нулевой степени любого тензора второго ранга совпадает с размерностью пространства: $\Psi^{(0)}=N$.

В работе [1] показано, что N-я степень произвольного тензора второго ранга в N-мерном псевдоримановом пространстве является линейной комбинацией низших степеней этого же тензора:

$$\Psi^{(N)}_{ml}(x) = -\frac{1}{Y^{(0)}} \sum_{s=1}^{N} \Psi^{(N-s)}_{ml} Y^{(s)}, \tag{1}$$

где коэффициенты $Y^{(s)}$ определяются рекуррентным уравнением

$$Y^{(s)}=-\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}\Psi^{(s-k)}Y^{(k)},\ s=1,\ 2,\ \ldots,N, \tag{2}$$

а $Y^{(0)}$ — любое, не равное нулю число. Определитель тензора $\Psi_{ik}(x)$ непосредственно связан с коэффициентом $Y^{(N)}$:

$$\det\|\Psi_{lm}\|=(-1)^N g\frac{Y^{(N)}}{Y^{(0)}}, \tag{3}$$

где g — определитель метрического тензора g_{ik}. Если тензор $\Psi_{ml}(x)$ является невырожденным $(\det\|\Psi_{ml}\|\neq 0)$, то можно определить обратный к нему тензор χ_{li} в соответствии с равенством $\Psi_{ml}(x)\,\chi^{li}=\delta^i_m$. Этот тензор, как показано в работе [2], имеет вид

$$\chi^{li}(x)=-\frac{1}{Y^{(N)}}\sum_{s=0}^{N-1}\Psi^{li}_{(N-s-1)}Y^{(s)}. \tag{4}$$

Таким образом, соотношения (1), (3) и (4) существенно зависят от коэффициентов $Y^{(s)}$, которые могут быть получены из рекуррентного уравнения (2). Однако для аналитических исследований рекуррентное соотношение (2), выражающее коэффициенты $Y^{(s)}$ как функции инвариантов, оказывается не всегда удобным. Поэтому представляет интерес поиск иных соотношений, связывающих $Y^{(s)}$ с инвариантами степеней тензора $\Psi_{ml}(x)$. Одно из таких соотношений мы сейчас установим.

Изменим в выражении (2) индекс суммирования k на n так, чтобы $n=s-k$. В результате получим

$$sY^{(s)}+\sum_{n=1}^{s}\Psi^{(n)}Y^{(s-n)}=0. \tag{5}$$

Воспользуемся формулой [4], используемой при делении степенных рядов:

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x^k}=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k, \tag{6}$$

где коэффициенты c_k находятся из рекуррентного уравнения

$$c_s-b_s+\frac{1}{a_0}\sum_{n=1}^{s}a_n c_{s-n}=0. \tag{7}$$

Сравнивая формулы (5) и (7), легко заметить, что они совпадают, если выбрать

$$a_k=\frac{a_0\Psi^{(k)}}{N},\ c_k=NY^{(k)},\ b_k=(N-k)\,Y^{(k)}.$$

Следовательно, выражение (6) можно записать в виде

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(N-k)\,Y^{(k)}x^k}{\sum_{k=0}^{\infty}\Psi^{(k)}x^k}=\sum_{k=0}^{\infty}Y^{(k)}x^k. \tag{8}$$

Вводя обозначения

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\Psi^{(k)}x^k,\ \ \xi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}Y^{(k)}x^k, \tag{9}$$

выражение (8) приведем к виду

$$N\xi(x)-x\frac{d\xi(x)}{dx}=A(x)\,\xi(x).$$

Решая это дифференциальное уравнение, получим

$$\xi(x)=C_0\exp\left[\int\frac{N-A(x)}{x}\,dx\right].$$

Учитывая, что $\Psi^{(0)}=N$, получим

$$\xi(x)=C_0\exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Psi^{(k)}x^k}{k}\right]. \tag{10}$$

Сравнивая выражения (9) и (10) при $x=0$, найдем, что $C_0=Y^{(0)}$. Так как $Y^{(0)}$ — любое, не равное нулю число, то для удобства положим $Y^{(0)}=1$. Тогда окончательно будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty}Y^{(k)}x^k=\exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Psi^{(k)}x^k}{k}\right]. \tag{11}$$

Это решение и позволяет определить $Y^{(s)}$ как функцию инвариантов степеней тензора Ψ_{lm}. Продифференцируем соотношение (11) s раз по x и положим $x=0$. В результате получим

$$Y^{(s)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{s!}\frac{d^s}{dx^s}\exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Psi^{(k)}x^k}{k}\right]. \tag{12}$$

Используя понятие вычета, это выражение можно записать в виде интеграла по комплексной плоскости:

$$Y^{(s)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{dZ}{Z^{s+1}}\exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Psi^{(k)}Z^k}{k}\right], \tag{13}$$

где Γ^+ — произвольный малый ($|z|<1$) контур, охватывающий полюс $z=0$ подынтегральной функции и обходимый в положительном направлении.

Полученное выражение (13) позволяет не только исследовать аналитическую зависимость $Y^{(s)}$ от инвариантов степеней тензора Ψ_{lm} в произвольном псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$, но и установить ряд полезных соотношений для антисимметричных тензоров второго ранга $a_{ik}=-a_{ki}$. В частности, несложно доказать, что все коэффициенты $Y^{(2s+1)}$, входящие в соотношения (1), (3) и (4) и имеющие нечетный индекс, для любого антисимметричного тензора равны нулю. Действительно, так как четная степень антисимметричного тензора представляет собой симметричный, а нечетная степень — антисимметричный тензор, то все инварианты нечетной степени этого тензора будут равны нулю: $a^{(2s+1)}=0$. Поэтому выражение для коэффициентов $Y^{(2s+1)}$ в силу равенства (12) в рассматриваемом случае будет содержать лишь четные степени x и примет вид

$$Y^{(2s+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(2s+1)!}\frac{d^{2s+1}}{dx^{2s+1}}\exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{(2k)}x^{2k}}{2k}\right].$$

Функция, стоящая в показателе экспоненты, является четной относительно x. Если теперь взять производную по x нечетного порядка от этой функции, то в результате получим нечетную функцию x, которая при стремлении x к нулю с необходимостью обратится в нуль. Следовательно, $Y^{(2s+1)}=0$ для любого антисимметричного тензора.

В силу соотношения (1) этот результат, в частности, означает, что N-я степень антисимметричного тензора второго ранга в пространстве $R^N_{p,N-p}$ является комбинацией четных степеней тензора a_{ik}, если размерность пространства N — четное число, и нечетных степеней тензора a_{ik}, если размерность пространства N нечетна:

$$a^{(N)}_{ml}(x)=-\frac{1}{Y^{(0)}}\sum_{s=1}^{[N/2]}a^{(N-2s)}_{ml}Y^{(2s)}.$$

Кроме того, из соотношения (3) следует, что в пространстве нечетной размерности $N=2M+1$ определитель любого антисимметричного тензора тождественно равен нулю. Поэтому тензор χ^{li}, обратный к антисимметричному тензору a_{ik}, можно построить только в пространстве четной размерности $N=2M$ при условии $Y^{(2M)}\neq 0$ и в этом пространстве он будет иметь вид

$$\chi^{li}(x)=-\frac{1}{Y^{(2M)}}\sum_{s=0}^{M-1}a^{li}_{(2M-2s-1)}Y^{(2s)}.$$

Таким образом, тензор $\chi^{li}(x)$ является комбинацией нечетных степеней тензора a_{ik}.

При проведении различных расчетов в теории поля часто необходимо проводить коммутацию двух матриц, причем зачастую эти матрицы имеют самый общий вид. В теории гравитации аналогичная задача возникает для свертки двух тензоров второго ранга. Решение некоторых из этих задач позволяет упростить следующее утверждение.

Результат последовательного «протаскивания» произвольного тензора φ_{lm} через N—1 степень любого тензора второго ранга Ψ_{mn} в псевдоримановом пространстве $R^N_{p,N-p}$ определяется выражением

$$\varphi^k_l\Psi^{(N-1)}_{km}+\Psi_{lk}\varphi^{kn}\Psi^{(N-2)}_{nm}+\ldots+\Psi^{(N-1)}_{lk}\varphi^k_m=-Y^{(N-1)}\varphi_{lm}-$$

$$\ldots-Y^{(2)}[\varphi^k_l\Psi^{(N-3)}_{km}+\Psi_{lk}\varphi^{kp}\Psi^{(N-4)}_{pm}+\ldots\Psi^{(N-3)}_{lk}\varphi^k_m]-$$

$$-Y^{(1)}[\varphi^k_l\Psi^{(N-2)}_{km}+\Psi_{lk}\varphi^{kn}\Psi^{(N-3)}_{nm}+\ldots+\Psi^{(N-2)}_{lk}\varphi^k_m]+$$

$$+\Psi_{lm}^{(N-1)}\varphi^{(1)}+\Psi_{lm}^{(N-2)}\varphi^{ik}\left[\Psi_{ik}+Y^{(1)}g_{ik}\right]+\ldots$$

$$+\Psi_{lm}\varphi^{ik}\left[\Psi_{ik}^{(N-2)}+Y^{(1)}\Psi_{ik}^{(N-3)}+Y^{(2)}\Psi_{ik}^{(N-4)}+\ldots+Y^{(N-2)}g_{ik}\right]+$$

$$+g_{lm}\varphi^{ik}\left[\Psi_{ik}^{(N-1)}+Y^{(1)}\Psi_{ik}^{(N-2)}+Y^{(2)}\Psi_{ik}^{(N-3)}+\ldots+Y^{(N-1)}g_{ik}\right], \qquad (14)$$

причем коэффициенты $Y^{(s)}=Y^{(s)}\,\Psi\,({}^{(k)})$ определяются из выражения (13).

Для доказательства этого утверждения построим вспомогательный тензор

$$\Phi_n^i=E^{p_1p_2\ldots p_N}E_{k_1k_2\ldots k_{N-1}n}\underbrace{\Psi_{p_1}^{k_1}\Psi_{p_2}^{k_2}\ldots\Psi_{p_{N-1}}^{i}\Psi_{p_N}^{j}\varphi_j^{k_{N-1}}}_{N},$$

где $E^{p_1p_2\ldots p_N}$ — абсолютно антисимметричная аксиальная плотность Леви-Чивиты.

Это выражение может быть упрощено двумя путями. С одной стороны, можно учесть, что

$$E^{p_1p_2\ldots p_N}E_{k_1k_2\ldots k_{N-1}m}=(1)^{N-p}\begin{vmatrix}\delta_{k_1}^{p_1} & \delta_{k_2}^{p_1} & \ldots & \delta_m^{p_1}\\ \delta_{k_1}^{p_2} & \delta_{k_2}^{p_2} & \ldots & \delta_m^{p_2}\\ \ldots & & & \\ \delta_{k_1}^{p_N} & \delta_{k_2}^{p_N} & \ldots & \delta_m^{p_N}\end{vmatrix}.$$

С другой стороны, можно использовать соотношение

$$E^{p_1p_2\ldots p_N}\Psi_{p_1}^{k_1}\Psi_{p_2}^{k_2}\ldots\Psi_{p_N}^{k_N}=E^{k_1k_2\ldots k_N}\cdot\det\|\Psi_m^l\|.$$

Приравнивая выражения, полученные при расчете двумя этими методами, и умножая полученное соотношение слева на $\Omega_l{}^n=(\Psi_l{}^n)^{-1}$, после довольно громоздких тождественных преобразований приходим к формуле (14), где коэффициенты $Y^{(s)}$ определяются из выражения (13). Таким образом, в соответствии с этим выражением результат «протаскивания» тензора φ_{lm} через $N-1$-ю степень тензора Ψ_{mk} выражается через низшие степени этого тензора.

Следствие 1. Сопоставляя компонентам тензора $\varphi_l{}^k$ элементы матрицы N-го порядка A, а компонентам тензора $\Psi^l{}_m$ элементы матрицы B, получим матричный аналог формулы (14):

$$AB^{N-1}+BAB^{N-2}+\ldots B^{N-1}A=-Y^{(1)}\left[AB^{N-2}+BAB^{N-3}+\right.$$

$$\left.+\ldots B^{N-2}A\right]-Y^{(2)}\left[AB^{N-3}+BAB^{N-4}+\ldots+B^{N-3}A\right]-$$

$$-\ldots-Y^{(N-1)}A+B^{N-1}\cdot\mathrm{Tr}\,(A)+B^{N-2}\left[\mathrm{Tr}\,(BA)+Y^{(1)}\cdot\mathrm{Tr}\,(A)\right]+$$

$$+B^{N-3}\left[\mathrm{Tr}\,(B^2A)+Y^{(1)}\cdot\mathrm{Tr}\,(BA)+Y^{(2)}\cdot\mathrm{Tr}\,(A)\right]+\ldots+$$

$$+B\left[\mathrm{Tr}\,(B^{N-2}A)+Y^{(1)}\cdot\mathrm{Tr}\,(B^{N-3}A)+Y^{(2)}\cdot\mathrm{Tr}\,(B^{N-4}A)+\right.$$

$$\left.+\ldots+Y^{(N-2)}\cdot\mathrm{Tr}\,(A)\right]+E\left[\mathrm{Tr}\,(B^{N-1}A)+Y^{(1)}\cdot\mathrm{Tr}\,(B^{N-2}A)+\right.$$

$$\left.+Y^{(2)}\cdot\mathrm{Tr}\,(B^{N-3}A)+\ldots+Y^{(N-1)}\cdot\mathrm{Tr}\,(A)\right],$$

где E — единичная матрица, а $Y^{(s)}$ выражается формулой, аналогичной формуле (13):

$$Y^{(s)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{dZ}{Z^{s+1}} \exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Tr}\,(B^k)\, Z^k}{k} \right].$$

Следствие 2. В случае $\varphi_{lm}=\Psi_{lm}$ выражение (14), как несложно убедиться, переходит в соотношение (2).

Следствие 3. В случае, когда тензор φ_{lm} с точностью до конформного множителя совпадает с метрическим тензором g_{lm}, выражение (14), как и следовало ожидать, превращается в тривиальное равенство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисова И. П.//Тез. докл. VII Всесоюз. конф. «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». Ереван, 1988. С. 61.
2. Денисова И. П.//Гравитация и гипотетические взаимодействия. М., 1989. С. 54.
3. Денисов В. И.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1985. № 5. С. 3. (Moscow University Phys. Bull. 1985. N 5. P. 1).
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.

Поступила в редакцию
16.06.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 2

УДК 530.12:531.51

ФИНСЛЕРОВА НЕЛИНЕЙНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Г. С. Асанов

(кафедра теоретической физики)

Показано, что специально-релятивистская финслерова метрическая функция инвариантна относительно нелинейной реализации преобразований Лоренца.

1. Введение

Пусть M — пространственно-временное многообразие, T_x — касательное пространство, опирающееся на некоторую фиксированную точку $x \in M$, а y^P — компоненты касательных векторов $y \in T_x$ относительно натурального репера. Индексы P, Q, ... $=0$, 1, 2, 3. Через T_x^* мы обозначим пространство, дуальное к T_x, так что контравариантные векторы принадлежат T_x, а ковариантные векторы принадлежат T_x^*.

Пусть $F(y)$ — некоторая фиксированная финслерова метрическая функция, рассматриваемая на T_x. Мы назовем пару $\{T_x, F(y)\}$ *пространством* F_4. Может оказаться, что функция $F(y)$ инвариантна относительно некоторой r_A-параметрической группы нелинейных преобразований

$$y^P = Y^P(r_A;\ \bar{y}^Q), \tag{1}$$

т. е. после подстановки (1) в $F(y)$ получается равенство

$$F(y) = F(\bar{y}) \tag{2}$$