$$Y^{(s)}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{dZ}{Z^{s+1}}\exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Tr}\,(B^k)\,Z^k}{k}\right].$$

Следствие 2. В случае $\varphi_{lm}=\Psi_{lm}$ выражение (14), как несложно убедиться, переходит в соотношение (2).

Следствие 3. В случае, когда тензор φ_{lm} с точностью до конформного множителя совпадает с метрическим тензором g_{lm}, выражение (14), как и следовало ожидать, превращается в тривиальное равенство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисова И. П.//Тез. докл. VII Всесоюз. конф. «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». Ереван, 1988. С. 61.
2. Денисова И. П.//Гравитация и гипотетические взаимодействия. М., 1989. С. 54.
3. Денисов В. И.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1985. № 5. С. 3. (Moscow University Phys. Bull. 1985. N 5. P. 1).
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971.

Поступила в редакцию
16.06.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 2

УДК 530.12:531.51

ФИНСЛЕРОВА НЕЛИНЕЙНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Г. С. Асанов

(кафедра теоретической физики)

Показано, что специально-релятивистская финслерова метрическая функция инвариантна относительно нелинейной реализации преобразований Лоренца.

1. Введение

Пусть M — пространственно-временное многообразие, T_x — касательное пространство, опирающееся на некоторую фиксированную точку $x\in M$, а y^P — компоненты касательных векторов $y\in T_x$ относительно натурального репера. Индексы P, Q, ... $=0, 1, 2, 3$. Через T_x^* мы обозначим пространство, дуальное к T_x, так что контравариантные векторы принадлежат T_x, а ковариантные векторы принадлежат T_x^*.

Пусть $F(y)$ — некоторая фиксированная финслерова метрическая функция, рассматриваемая на T_x. Мы назовем пару $\{T_x, F(y)\}$ *пространством* F_4. Может оказаться, что функция $F(y)$ инвариантна относительно некоторой r_A-параметрической группы нелинейных преобразований

$$y^P=Y^P(r_A;\ \overline{y}^Q),\tag{1}$$

т. е. после подстановки (1) в $F(y)$ получается равенство

$$F(y)=F(\overline{y})\tag{2}$$

(соответствующие определения подробно сформулированы в § 1.3 в [1]).

Мы будем рассматривать некоторое достаточно гладкое и несингулярное преобразование $y^P = y^P(t^Q)$ и ему обратное $t^P = t^P(y)$. Представим себе при этом следующую возможность: при лоренцевых преобразованиях $t^R = L^R_P(r_A)\overline{t}^P$ соответствующие нелинейные преобразования вида (1) с функциями

$$Y^P = y^P(L^R_S(r_A)\, t^S(\overline{y}^Q)) \qquad (3)$$

оставляют инвариантной финслерову метрическую функцию F.

Ниже подробно показано, что именно такая возможность реализуется в случае специально-релятивистской финслеровой метрической функции F, введенной в предыдущих работах [2—3]. Можно сказать, что эта финслерова метрическая функция обусловлена именно свойством нелинейности

$$\partial^2 Y^P/\partial \overline{y}^Q\, \partial \overline{y}^R \neq 0 \qquad (4)$$

инвариантных преобразований (1)—(3).

Мы следуем ниже обозначениям, принятым в [2, 3]. В частности,

$$w^a = y^a/y^0,\ h = \delta_{ab} w^a w^b,\ A = \left(1 + \frac{1}{4} g^2\right)^{1/2},$$

$$a_{00} = b_1,\ a_{ab} = b_2 \delta_{ab} + b_3 w^a w^b,\ a_{0a} = b_4 w^a,$$

$$a^{00} = b^1,\ a^{ab} = b^2 \delta^{ab} + b^3 p_a p_b,\ a^{0a} = b^4 p_a,$$

а также

$$E = 1 - \frac{1}{2} g h^{1/2},\ T = 1 - g h^{1/2} - h,\ j = \sqrt{-b_2(h)}.$$

Справедливо

$$j^2 b^1 = (1-h)/T,\ j^2 b^3 = g/pT^*,\ j^2 b^4 = -gp(1+gp)/T^*,$$

$$dj/dh = \frac{1}{4} gj/Th^{1/2}.$$

В случае ковариантных векторов

$$p_a = P_a/P_0,\ p = (\delta^{ab} p_a p_b)^{1/2},\ E^* = 1 + \frac{1}{2} gp,\ j^* = \sqrt{-b^2(p)}$$

и $T^* = 1 + gp - p^2$. Справедливо также

$$E(g_+) = Ag_+,\ E^*(g^+) = Ag^+.$$

Обозначение $H(P_R)$ будет обозначать финслерову функцию Гамильтона (см. [3]).

2. Нелинейные преобразования

Рассмотрим четыре функции $t^P = t^P(y^Q)$ вида

$$t^0 = A^{-1} E j y^0,\ t^a = j y^a. \qquad (5)$$

Вычисление производных $t_Q{}^P = \partial t^P/\partial y^Q$ дает

$$t^0_0 = A^{-1} j \left(1 - \frac{1}{2} g h^{1/2} \frac{E}{T}\right),\ t^0_a = \frac{1}{2} g A^{-1} j h^{-1/2} \frac{E-T}{T} w^a, \qquad (6)$$

$$t_0^a = -\frac{1}{2} gjw^a \frac{h^{1/2}}{T}, \quad t_b^a = j\delta_b^a + \frac{1}{2} gj \frac{1}{Th^{1/2}} w^a w^b, \tag{7}$$

откуда следует

$$t_b^a w^b = jw^a \frac{E-h}{T}, \quad t_c^a t_d^b \delta^{cd} = j^2 \left[\delta^{ab} + g \frac{w^a w^b}{Th^{1/2}} + \frac{1}{4} g^2 \frac{w^a w^b}{T^2} \right], \tag{8}$$

где $t = \sqrt{\delta_{ab} t^a t^b}$. Преобразование (5) однородно,

$$t^P (ky^Q) = kt^P (y^Q), \quad k > 0, \tag{9}$$

и поэтому справедливо тождество

$$t_Q^P (y) \, y^Q = t^P. \tag{10}$$

Из (6)—(7) мы находим

$$\det (t_Q^P) = A^{-1} j^4. \tag{11}$$

В то же время

$$\det (a_{PQ}) = -(b_2)^4 \equiv -j^8. \tag{12}$$

Сравнивая (11) и (12), мы приходим к выводу, что справедливо следующее

Предложение 1. *Преобразования* (1) *несингулярны всюду, где* $\det (a_{PQ}) \neq 0$.

Обращение преобразований (5) легко находится. Оно имеет вид

$$y^0 = \left(\frac{t^0 - t}{t^0 + t} \right)^{g/4A} I, \quad y^a = \left(\frac{t^0 - t}{t^0 + t} \right)^{g/4A} t^a, \tag{13}$$

где $I = At^0 + (1/2) gt$. Из (13) следует

$$w^a = t^a / I, \quad h^{1/2} = t/I, \quad E = At^0 / I, \quad j = \left(\frac{t^0 - t}{t^0 + t} \right)^{-g/4A}$$

и затем

$$1 + g_+ h^{1/2} = A (t^0 + t)/I, \quad 1 + g_- h^{1/2} = A (t^0 - t)/I,$$

$$T = A^2 (t^0 - t)(t^0 + t)/I^2,$$

и, наконец,

$$V = A (t^0 - t)^{g_+/2A} (t^0 + t)^{-g_-/2A}, \tag{14}$$

где V — генерирующая метрическая функция, так что финслерова метрическая функция $F = y^0 V$ оказывается равной

$$F (y) = AS, \tag{15}$$

где

$$S = \sqrt{(t^0)^2 - t^2}. \tag{16}$$

В результате мы доказали, что справедливо следующее

Предложение 2. *Нелинейное преобразование* (5) *переводит специально релятивистскую финслерову метрическую функцию* $F(y)$ *(введенную в* [2—3]*) в псевдоевклидов вид* (14)—(16).

Изотропный случай $F(y)=0$ характеризуется условием

$$(y^0)^2-(g^+)^2\mathbf{y}^2=0. \tag{17}$$

В этом случае мы вместо (5) можем взять преобразование

$$t^0=g_+y^0,\ t^a=y^a, \tag{18}$$

чтобы перевести поверхность, представляемую уравнением (17) в T_x, в конус S_4, представляемый уравнением

$$(t^0)^2-t^2=0. \tag{19}$$

Все сказанное выше относилось к пространству T_x. В T_x^*, т. е. для ковариантных векторов, приведенные выше соотношения переписываются полностью аналогичным образом по правилу

$$y^P\to y_P,\ t^P\to t_P,\ g\to -g,\ F(y^R)\to H(y_R),\ j\to j^*,$$

а также $E\to E^*$ и $T\to T^*$. Поэтому, если $P_R\in T_x^*$, то

$$t_0(P)=A^{-2}j^*(p)E^*(p)P_0,\ t_a(P)=j^*(p)P_a, \tag{20}$$

если $H(P)>0$, и

$$t_0(P)=g+P_0,\ t_a=P_a, \tag{21}$$

если $H(P)=0$.

Мы можем использовать формулы (5)—(7) для преобразования финслерова метрического тензора $a^{PQ}(y)$ по тензорному закону

$$n^{PQ}(t)=a^{RS}(y(t))\,t^P_R\,t^Q_S. \tag{22}$$

Прямые вычисления на основе формул (8)—(10) дают следующий результат:

$$n^{PQ}(t)=e^{PQ}-\frac{1}{4}g^2A^{-2}l^Pl^Q, \tag{23}$$

$$n_{PQ}(t)=e_{PQ}+\frac{1}{4}g^2l_Pl_Q, \tag{24}$$

где $e^{PQ}=e_{PQ}$ — псевдоевклидов метрический тензор ($e_{00}=1$, $e_{11}=e_{22}=e_{33}=-1$, остальные компоненты тензора e_{PQ} равны нулю), а тензор (23) взаимен к (22), так что $n_{PQ}n^{QR}=\delta_P{}^R$;

$$l^P=t^P/S(t),\ l_P=e_{PQ}l^Q. \tag{25}$$

Справедливы тождества

$$n_{PQ}l^Q=A^2l_P,\ n^{PQ}l_Q=A^{-2}l^P,\ n_{PQ}t^Pt^Q=A^2S^2(t),$$

$$\partial n^{PQ}/\partial t^Q=-\frac{3}{4}g^2A^{-2}S^{-1}l^P,\ \det(n_{PQ})=-A^2.$$

3. Преобразование возвращенных тетрад

Аналогично (22) мы можем рассмотреть преобразование

$$m_P^Q(t)=E_P^Q(y(t))\,t_R^Q$$

возвращенных тетрад $E_P{}^Q$, введенных и вычисленных в [3]. Результат имеет вид

$$m_P^Q=\delta_P^Q+(1-A)\,A^{-1}\,l_P l^Q.$$

Для взаимной тетрады $f_P{}^Q$, определяемой условием $f_R^P m_P^Q=\delta_R^Q$, мы находим

$$f_P^Q=\delta_P^Q+(A-1)\,l_P l^Q.$$

Справедливы соотношения

$$m_P^Q l^P=A^{-1}l^Q,\quad f_Q^P l_P=Al_Q,\quad m_P^Q l_Q=A^{-1}l_P,\quad f_Q^P l^Q=Al^P,$$

$$n^{PR}f_R^Q=e^{PQ}+(1-A)\,A^{-1}\,l^P l^Q,$$

а также тетрадные представления

$$n_{PQ}=\sum_{R=0}^{3}q_R f_P^R f_Q^R,\quad n^{PQ}=\sum_{R=0}^{3}q_R m_R^P m_R^Q,$$

где $q_0=-q_1=-q_2=-q_3=1$. Наконец, ассоциируемый тензор напряженности

$$f_{PQ}^R=\partial f_Q^R/\partial y^P-\partial f_P^R/\partial y^Q$$

имеет вид

$$f_{PQ}^R=(A-1)\,A^{-1}(l_P\delta_Q^R-l_Q\delta_P^R)$$

(как следствие (25)) и удовлетворяет тождеству $f_{PQ}^R l_R=0$.

4. Лоренцева инвариантность в пространстве N_4

Пусть E_4 — четырехмерное псевдоевклидово пространство, t^P — координаты точек в E_4, S_4 — конус в E_4, определяемый уравнением (19), а тензор (23)—(24) рассматривается как риманов метрический тензор, заданный на E_4 всюду вне конуса S_4. Тензор (23)—(24) очевидно является аналитическим на E_4/S_4. Мы назовем пару $\{E_4/S_4, n_{PQ}(t)\}$ для дальнейших ссылок *пространством* N_4.

Для формул, выведенных в разделе 3, характерно появление множителя $A-1$. Поскольку $A=1+(1/8)g^2+O(g^4)$, справедливо

Предложение 3. *В пространстве N_4 метрический тензор, возвращенные тетрады и ассоциируемый тензор напряженности отличаются от своих псевдоевклидовых аналогов* $n_{PQ}=n^{PQ}=e^{PQ}$, $m_P^Q=f_P^Q=0$, $f_{PQ}^R=0$, *начиная с членов второго порядка малости по параметру* g.

В этом отношении вышеуказанные объекты аналогичны кривизне $R=-1-(1/4)g^2$ индикатрисы.

Обозначим теперь через L_P^Q коэффициенты матрицы преобразований Лоренца, так что

$$\sum_{P=0}^{3}q_P L_Q^P L_R^P=q_Q\delta_{QR},$$

а через l_P^Q— коэффициенты обратных преобразований, так что

$$l_0^0=L_0^0,\ l_a^0=-L_0^a,\ l_0^a=-L_a^0,\ l_b^a=L_b^a.$$

Преобразуя переменные t^P по векторному закону:

$$t^P = L^P_Q \bar{t}^Q, \ \bar{t}^P = l^P_Q t^Q, \tag{26}$$

мы вследствие инвариантности $S(t)=S(\bar{t})$ функции (16) немедленно придем к выводу, что векторы (25) преобразуются тоже по закону вида (26):

$$l^P = L^P_Q \bar{l}^Q, \ \bar{l}^P = l^P_Q l^Q, \ l_P = l^Q_P \bar{l}_Q, \ \bar{l}_P = L^Q_P l_Q. \tag{27}$$

Принимая также во внимание лоренц-инвариантность тензора e_{PQ}, мы из (27) можем заключить, что тензор (23)—(24) имеет *лоренц-инвариантный* вид, т. е.

$$n^{PQ}(t) = n^{RS}(\bar{t}) L^P_R L^Q_S, \ n_{PQ}(t) = n_{RS}(\bar{t}) l^R_P l^S_Q.$$

Аналогично лоренц-инвариантный вид имеют объекты, введенные в разделе 3:

$$m^Q_P(t) = m^S_R(\bar{t}) L^Q_S l^R_P, \ f^Q_P(t) = f^S_R(\bar{t}) L^Q_S l^R_P,$$

$$f^R_{PQ}(t) = f^S_{TN}(\bar{t}) L^R_S l^T_P l^N_Q.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Asanov G. S. Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories. Dordrecht, 1985.
2. Асанов Г. С.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. № 1. С. 19 (Moscow University Physics Bulletin. 1994. N 1. P. 18); там же. 1995. N4 С. 7.
3. Асанов Г. С.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. № 2. С. 13 (Moscow University Physics Bulletin. 1994. N 2. P. 11).

Поступила в редакцию
21.04.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 2

УДК 530.145

ПАРАДОКС ЭЙНШТЕЙНА—ПОДОЛЬСКОГО—РОЗЕНА И НЕРАВЕНСТВО БЕЛЛА В КВАНТОВОЙ СИСТЕМЕ С ПАМЯТЬЮ

Д. А. Славнов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

В квантовой модели с памятью рассмотрен парадокс Эйнштейна—Подольского—Розена и неравенство Белла. Показано, что в предположении о наличии нескольких уровней памяти можно получить те же результаты, что и в стандартной квантовой механике, при очень простой и наглядной физической интерпретации.

В работе [1] автором этой статьи была предложена новая модель квантовой теории, которая позволяет дать наглядную интерпретацию процесса квантовых измерений. В настоящей статье мы обсудим, как в рамках этой модели решаются две принципиально важные для квантовой теории проблемы. Первая — это так называемый парадокс Эйнштейна—Подольского—Розена [2], вторая — неравенство Белла [3] (см. также [4, 5]).

Основные положения модели, предложенной в работе [1], сводятся к следующему. Каждый квантовый объект состоит из волнового поля колебаний вакуума и ядер, также участвующих в колебательных