Легко подобрать такие направления $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, чтобы формулы (4) и (5) противоречили друг другу.

Проделанные эксперименты [7] позволили сделать выбор в пользу стандартной квантовой механики, хотя на этот счет имеются некоторые возражения (см., напр., [8]).

На первый взгляд кажется, что неравенство Белла можно доказать и в нашей модели, приняв в качестве λ параметр, который отличает одну предысторию от другой. Однако такого параметра не существует. Дело в том, что каждая предыстория уникальна, мы не можем, например, один раз измерить наблюдаемые a и b, в другой раз — наблюдаемые a' и b' при одной и той же предыстории.

Тем не менее формулу (2) можно сохранить и у нас, только в ней параметру λ надо придать другой смысл. Следует считать, что λ отличает одну информацию в памяти от другой. Поскольку в формуле (2) мы имеем дело с корреляциями, то следует рассматривать двухчастичную память. Теперь мера $d\mu(\lambda)$ характеризует относительное число предысторий, приходящихся на интервал $d\lambda$ в памяти, а функция $\mathscr{E}(a, b, \lambda)$ — *вероятность* наблюдения соответствующей корреляции. Поскольку частицы, для которых проводятся измерения наблюдаемых a и b, связаны генетической связью, то $\mathscr{E}(a, b, \lambda)$ нельзя представить в виде (3). Это не позволяет доказать неравенство Белла.

Таким образом, квантовая модель с многоуровневой памятью для мысленного эксперимента Эйнштейна—Подольского—Розена и неравенства Белла дает те же результаты, что и стандартная квантовая механика. Вместе с тем эта модель имеет физическую интерпретацию, не уступающую по наглядности той, которую имеют модели со скрытыми параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Славнов Д. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 1. С. 24 (Moscow University Phys. Bull. 1996. N 1).
2. Einstein A., Podolsky B., Rosen N.//Phys. Rev. 1935. **47**. P. 777.
3. Bell J. S.//Physics (Long Island City, N. Y.). 1965. **1**. P. 195.
4. Home D., Whitaker M. A. B.//Phys. Reports. 1992. **210**. P. 223.
5. Namiki M., Pascazio S.//Phys. Reports. 1992. **232**. P. 301.
6. Бом Д. Квантовая теория. М., 1965.
7. Lamoreaux S. K.//Intern. J. Mod. Phys. 1992. **A7**. P. 6691.
8. Santos E.//Phys. Rev. Lett. 1991. **66**. P. 1388.

Поступила в редакцию
10.05.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 2

УДК 539.12.01

МЕТОД РЕНОРМГРУППЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. В. Белокуров, В. В. Камчатный

(НИИЯФ)

Исследуются решения уравнений ренормгруппы, зависящие от двух или более безразмерных комбинаций некоторых размерных переменных. Показано, что в общем случае вид функциональной зависимости от отношения безразмерных аргументов методом ренормгруппы не определяется. Найдена структура таких решений в некоторых специальных случаях.

1. Рассмотрим уравнения ренормгруппы (РГ) [1] для величин, зависящих от двух отношений трех размерных параметров, скажем, для эффективной константы связи в массивной квантовой теории поля. В этом случае $x=Q^2/\mu^2$, $y=m^2/\mu^2$. Функциональное уравнение и условие нормировки выглядят как

$$\bar{g}(x,\ y;\ g)=\bar{g}\left(\frac{x}{t},\ \frac{y}{t};\ \bar{g}(t,\ y;\ g)\right),\ \bar{g}(1,\ y;\ g)=g. \qquad (1)$$

Более сложный вид имеют уравнения для функций Грина:

$$\Gamma(x,\ y;\ g)=\Gamma(t,\ y;\ g)\Gamma\left(\frac{x}{t},\ \frac{y}{t};\ \bar{g}(t,\ y;\ g)\right),\ \Gamma(1,\ y;\ g)=1. \qquad (2)$$

Общие решения уравнений (1), (2) ([2], см. также [1]) есть некоторые функции двух аргументов:

$$\bar{g}(x,\ y;\ g)=F\left(\frac{x}{y},\ \Phi_1\left(\frac{1}{y},\ g\right)\right),$$

$$\Gamma(x,\ y;\ g)=\frac{\Phi(x/y,\ \bar{g}(x,\ y;\ g))}{\Phi(1/y,\ g)}.$$

В настоящей работе мы обсудим возможность использования РГ для получения вида зависимости функций $\bar{g}(x, y, g)$ и $\Gamma(x, y, g)$ от отношения двух переменных: x/y. Общий вывод этого обсуждения будет состоять в том, что вид зависимости от отношения двух аргументов не может быть определен с помощью уравнений РГ без введения дополнительных предположений. Такой вывод представляется естественным, если вспомнить о том, что уравнение РГ выражает определенные свойства симметрии относительно масштабных преобразований аргументов x и y, а поскольку отношение x/y не изменяется при соответствующих преобразованиях шкалы, то вид зависимости от этого отношения, так сказать, «не чувствуется» уравнением РГ. В несколько ином контексте аналогичный вывод можно сделать также из работы [3].

2. Предположим, что в массивной квантовой теории поля вычислены значения диаграмм до $(k-1)$-го порядка включительно. Рассмотрим совокупность диаграмм k-го порядка теории возмущений (ТВ). В соответствии с общей структурой R-операции [1] представим выражение для вклада в функцию $\bar{g}(x, y, g)$ от этих диаграмм в виде

$$\bar{g}^{(k)}(x,\ y,\ g)=g^{k+1}\left[\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\Psi\left(\frac{x}{y},\ \frac{1}{y}\right)-\varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right].$$

Здесь $\varphi(x/y)$ — соответствующая комбинация значений диаграмм, слагаемое $-\varphi(1/y)$ отвечает вычитанию каждой диаграммы как целого, а член $\Psi(x/y, 1/y)$ содержит слагаемые с вычтенными подграфами.

Нетрудно видеть, что комбинация $\varphi(x/y)-\varphi(1/y)$ удовлетворяет уравнению (1) тождественно:

$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right)-\varphi\left(\frac{1}{y}\right)=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)-\varphi\left(\frac{t}{y}\right)+\varphi\left(\frac{t}{y}\right)-\varphi\left(\frac{1}{y}\right).$$

Поэтому уравнение РГ не позволяет определить значение вклада диаграмм k-го порядка в функцию $\bar{g}(x, y, g)$, если известны вклады предыдущих порядков.

Заметим, что то же самое утверждение справедливо и для диаграмм в безмассовой теории. Однако в этом случае можно рассматривать диаграммы без подграфов и диаграммы, содержащие вычитаемые подграфы, по отдельности. Из соображений однородности вклад диаграмм, содержащих вычитаемые подграфы, должен содержать степени $\ln x$, большие 1, и определяться диаграммами более низких порядков. Поэтому оказывается возможным определить в разложении $\bar{g}(x, g)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i-1} b_{ij}g^i(\ln x)^j$ все коэффициенты $b_{(k+1)i}$ $(i=k, ..., 2)$, кроме коэффициента b_{k1}. Диаграммы же без подграфов, хотя и удовлетворяют уравнению РГ тождественно и не могут быть определены по вкладу диаграмм более низких порядков, дают наиболее слабый вклад, пропорциональный $g^{k+1}\ln x$. Эти свойства лежат в основе применимости метода РГ в безмассовой теории (см. [1]).

Указанные выше свойства, справедливые для безмассовой теории, в случае зависимости функций от двух аргументов не выполняются. Например, при вычислении дважды логарифмической асимптотики вершинных функций в КЭД в двухпетлевом приближении диаграммы с параллельными и перекрестными фотонными линиями дают одинаковый вклад (пропорциональный $\ln^2(x/y)$).

Но даже если и ограничиться диаграммами с вычитаемыми подграфами, то все равно невозможно выделить единственное решение, поскольку нет условия типа условия однородности в безмассовой теории, благодаря которому зависимость от x решения уравнения РГ в безмассовой теории в каждом порядке ТВ представляет собой некоторый полином от $\ln x$. Поясним сказанное на примере решения уравнения (1). Возьмем в качестве исходного приближения первый порядок теории возмущений:

$$\bar{g}^{(1)}_{PT}(x,\ y;\ g)=g+g^2\left[f\left(\frac{x}{y}\right)-f\left(\frac{1}{y}\right)\right].$$

Будем искать решение в виде

$$\bar{g}(x,\ y;\ g)=\sum_{k,i,j\,:\,i+j=k-1} a_{kij}g^k f^i\left(\frac{x}{y}\right)f^j\left(\frac{1}{y}\right).$$

Подставив это выражение в функциональное уравнение, получим

$$\sum_{k,i,j} a_{kij}g^k f^i\left(\frac{x}{y}\right)f^j\left(\frac{1}{y}\right)=\sum_{m,i,n} a_{min}f^i\left(\frac{x}{y}\right)f^n\left(\frac{t}{y}\right)\times$$
$$\times\left[\sum_{(\Sigma p=k,\ \Sigma l=j)} a_{p_1q_1l_1}g^{p_1}f^{q_1}\left(\frac{t}{y}\right)f^{l_1}\left(\frac{1}{y}\right)\dots a_{p_mq_ml_m}g^{p_m}f^{q_m}\left(\frac{t}{y}\right)f^{l_m}\left(\frac{1}{y}\right)\right].$$

Отсюда следуют две группы соотношений:

$$a_{kij}=\sum_{m\leqslant k} a_{mi0}\sum_{(\Sigma p=k,\ \Sigma l=j)} a_{p_10l_1}\dots a_{p_m0l_m}, \tag{3}$$

$$0=\sum_{(m\leqslant k,n)} a_{min}\sum_{(\Sigma p=k,\ \Sigma l=j)} a_{p_1q_1l_1}\dots a_{p_mq_ml_m}. \tag{4}$$

Пусть известны все коэффициенты a_{mij} при $m<k$. Тогда соотношения (3), (4) можно рассматривать как уравнения для определения коэффициентов a_{kij}. Однако не все они могут быть найдены из этих уравнений. Так, для коэффициентов $a_{k0(k-1)}$ и $a_{k(k-1)0}$ соотношения (3)

вырождаются в бессодержательные тождества. Единственное же уравнение из совокупности (4), в которое входят a_{kij}, получается при $m=k$ и выражает условие нормировки: $0=\Sigma_n a_{k(k-1-n)n}$.

Таким образом, уравнение РГ совместно с условием нормировки не определяет всех коэффициентов в данном порядке, и остающийся произвол может быть устранен лишь при введении специального дополнительного предположения о структуре решения. Поясним это утверждение на примере коэффициентов a_{3ij}. Соотношения (3) и (4) с учетом $a_{100}=1$, $a_{210}=1$, $a_{201}=-1$ приводит к уравнениям

$$a_{311}=-2, \quad a_{320}+a_{302}=2.$$

Если положить $a_{320}=a_{302}=1$, то получится решение [4], по виду аналогичное решению в безмассовой теории:

$$\bar{g}(x, y; g)=\frac{g}{1-g[f(x/y)-f(1/y)]}. \qquad (5)$$

Однако это решение не единственно, а существует целое семейство решений.

Подчеркнем еще раз, что произвол в решении уравнения РГ связан с тем, что добавление в каждом порядке слагаемых $c_k g^k \times \times [f^{(k-1)}(x/y)-f^{(k-1)}(1/y)]$ с произвольными c_k не нарушает ренорминвариантности решения, но меняет коэффициенты $a_{k(k-1)0}$ и $a_{k0(k-1)}$. Отсюда, в частности, следует, что с помощью уравнения РГ, исходя из информации, полученной в некотором порядке теории возмущений (в данном случае первом), невозможно определить асимптотику квантовополевых функций в области, где $f(x/y)$ принимает большие значения, поскольку неопределенность в решении содержится именно в члене со старшей в каждом порядке степенью f. Типичным примером такой задачи, не поддающейся решению методом РГ, служит дважды логарифмическая асимптотика вершинных функций.

3. В то же время, если в теории известны какие-то дополнительные свойства, позволяющие связать решения уравнений РГ для функций, зависящих от двух аргументов x, y, с решениями, зависящими от одного аргумента x, то это позволяет получить однозначные решения и в двухаргументном случае. Так, требование соответствия с безмассовым пределом выделяет решение (5).

Единственное решение уравнения РГ для функций, зависящих от двух аргументов, выделяется также и в случае, когда существенная зависимость от одного из них отфакторизовывается известным образом. В качестве примера, иллюстрирующего сказанное, рассмотрим так называемую дважды логарифмическую асимптотику вершинной функции в КЭД. Обозначим квадрат импульса внешнего фотона через q^2 (q^2 фиксировано и не равно нулю), квадраты импульсов внешних электронов — через p_1^2 и p_2^2. Рассмотрим кинематическую область, где внешние электронные линии находятся вблизи массовой поверхности: $p_1^2-m^2=p_2^2-m^2\equiv\mu^2\to 0$, и будем искать асимптотическую зависимость вершинной функции от отношения q^2/μ^2. Предел $q^2/\mu^2\to\infty$, который получается при фиксированном q^2 и $\mu^2\to 0$, удобно представить как предел при фиксированном μ^2 ($\mu^2\neq 0$) и $q^2\to\infty$. Заметим, что сдвиг с порога рождения можно осуществить и другим, эквивалентным первому, способом. А именно, можно положить $p_1^2=p_2^2=m^2$, но ввести ненулевую массу виртуального фотона: $\mu\neq 0$. Независимо от придаваемого ему физического смысла μ — это параметр регуляризации инфракрасных расходимостей, присущих фейнмановским амплитудам на массовой поверхности в теориях, содержащих безмассовые поля. Образуем безразмерные переменные $x=q^2/\lambda^2$, $y=\mu^2/\lambda^2$, где λ^2 — точка нормировки.

Как известно [5], асимптотическое выражение для вершинной функции $\Gamma(x, y, g)$ в инфракрасном пределе $y\to 0$ имеет вид

$$\ln\Gamma(x,\ y;\ g)=f\left(x,\ \frac{1}{y},\ g\right)\ln\frac{1}{y}, \tag{6}$$

где функция $f(x, 1/y, g)$ несингулярна по второму аргументу ($\lim\limits_{y\to 0} f(x,\ 1/y,\ g)$ существует и отличен от нуля). Другими словами, инфракрасное поведение логарифма вершинной функции задается только первым порядком теории возмущений, а следующие порядки вклада не дают. Условие нормировки выглядит как $f(1, 1/y, g)=0$.

Определим с помощью уравнения РГ зависимость вершинной функции (6) от x:

$$\gamma(y,\ g)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}f\left(x,\ \frac{1}{y},\ g\right)\right)_{x=1}\ln\frac{1}{y}=a(y,\ g)\ln\frac{1}{y}.$$

С учетом того, что f зависит от y несингулярным образом, можно положить

$$\gamma(y,\ g)=a(g)\ln\frac{1}{y},\quad (a(g)=\lim_{y\to 0}a(y,\ g)).$$

Кроме того, поскольку вклад в перенормировку эффективного заряда асимптотически несуществен, можно также считать, что β-функция равна нулю.

В итоге уравнение РГ принимает вид

$$\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]f\left(x,\ \frac{1}{y},\ g\right)\ln\frac{1}{y}=a(g)\ln\frac{1}{y}.$$

Решая его методом работы [2], получим искомую асимптотику вершинной функции:

$$\ln\Gamma(x,\ y,\ g)=\frac{1}{2}a(g)\left[\ln^2\frac{x}{y}-\ln^2\frac{1}{y}\right]=\frac{1}{2}a(g)\left[\ln^2 x+2\ln x\ln\frac{1}{y}\right]. \tag{7}$$

В формуле (7) коэффициент $a(g)$ представляет собой ряд по степеням константы связи, но в области малых g, таких, что $g\ll 1$, $g\ln^2(x/y)<1\ (\sim 1)$, ведущая асимптотика определяется однопетлевым вкладом $a(g)=ag$, что совпадает с результатом, полученным путем непосредственных вычислений асимптотически существенных диаграмм [6—10].

4. Уравнение РГ можно использовать для нахождения произвольной вершинной функции в асимптотической области, где вкладом в перенормировку инвариантного заряда можно пренебречь.

Поскольку мы интересуемся зависимостью вершинной функции от отношения x/y, выделим его в качестве первого аргумента, т. е. рассмотрим функцию

$$G\left(\frac{x}{y},\ \frac{1}{y},\ g\right)\equiv\Gamma(x, y, g),\quad G\left(\frac{1}{y},\ \frac{1}{y},\ g\right)=1.$$

Уравнение РГ для этой функции имеет вид

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial(1/y)}\right)\ln G\left(\frac{x}{y},\frac{1}{y},g\right)=\gamma\left(\frac{1}{y},g\right). \tag{8}$$

Для функции

$$F\left(\frac{x}{y},\frac{1}{y},g\right)\equiv\ln G\left(\frac{x}{y},\frac{1}{y},g\right)+\int\limits_{c}^{1/y}\gamma(\xi,g)\frac{d\xi}{\xi},$$

удовлетворяющей однородному уравнению, методом [2] получим

$$F\left(\frac{x}{y},\frac{1}{y},g\right)=\Phi\left(\frac{x}{y},g\right)=\int\limits_{c}^{x/y}\gamma(\xi,g)\frac{d\xi}{\xi}.$$

Таким образом,

$$G\left(\frac{x}{y},\frac{1}{y},g\right)=\exp\int\limits_{1/y}^{x/y}\gamma(\xi,g)\frac{d\xi}{\xi}. \tag{9}$$

Рассмотрим специальный класс диаграмм, задающих вершинную функцию G. Каждая диаграмма этого класса либо не содержит подграфов, либо получается из не содержащей подграфов диаграммы меньшего порядка подстановкой вместо одной из вершин некоторой диаграммы, также не содержащей подграфов.

Обозначим через $f_i(x/y)$ сумму ненормированных значений диаграмм i-го порядка, принадлежащих этому классу. (Среди интегралов, входящих в $f_i(x/y)$, могут встречаться как сходящиеся интегралы, зависящие от отношения $q^2/m^2=x/y$, так и регуляризованные интегралы, зависящие от указанного отношения и от параметра регуляризации.)

Перенормированное значение вершинной функции

$$G\left(\frac{x}{y},\frac{1}{y},g\right)=R_\mu\sum_{i=0}^{\infty}g^if_i\left(\frac{x}{y}\right)$$

задается выражением

$$G\left(\frac{x}{y},\frac{1}{y},g\right)=\sum_{i=0}^{\infty}g^i\left[F_i\left(\frac{x}{y},\frac{1}{y}\right)-F_i\left(\frac{1}{y},\frac{1}{y}\right)\right], \tag{10}$$

где

$$F_n\left(\frac{x}{y},\frac{1}{y}\right)=-\sum_{m=0}^{n-1}f_{n-m}\left(\frac{x}{y}\right)F_m\left(\frac{1}{y},\frac{1}{y}\right), \tag{11}$$

и по определению $F_0(1/y,1/y)=-1$, $F_0(x/y,1/y)=0$. Нетрудно заметить, что формулы (10), (11) представляют собой запись R-операции для диаграмм рассматриваемого класса. При этом $F_n(x/y,1/y)=R'f_n(x/y)$, т. е. является результатом неполной R-операции (без последнего вычитания) диаграмм n-го порядка.

Подставляя (10), (11) в уравнение (8) и сравнивая слагаемые в правой и левой частях, имеющие одинаковый порядок по g и содержащие функции $f_i(x/y)$ с одинаковым индексом, убеждаемся в том, что (10), (11) задают решение этого уравнения.

Положим в формуле (11) $x=1$:

$$F_n\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{y}\right) = -\sum_{m=0}^{n-1} f_{n-m}\left(\frac{1}{y}\right) F_m\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{y}\right).$$

Рассматривая его как матричное уравнение, можно получить выражение для $F_n(1/y)$:

$$F_n\left(\frac{1}{y}\right) = (-1)^n \det \begin{vmatrix} -f_1\left(\frac{1}{y}\right) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -f_2\left(\frac{1}{y}\right) & f_1\left(\frac{1}{y}\right) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -f_n\left(\frac{1}{y}\right) & f_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right) & f_{n-2}\left(\frac{1}{y}\right) & \cdots & f_1\left(\frac{1}{y}\right) \end{vmatrix}.$$

Используя определение функции γ и вид решения (9), получим следующее представление для решения уравнения РГ:

$$G\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}, g\right) = \exp \sum_{i=1}^{\infty} g^i \int_{1/y}^{x/y} \sum_{n=0}^{i-1} df_{i-n}(\xi) \times$$

$$\times (-1)^n \det \begin{pmatrix} -f_1(\xi) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -f_2(\xi) & f_1(\xi) & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -f_n(\xi) & f_{n-1}(\xi) & f_{n-2}(\xi) & \ldots & f_1(\xi) \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Так как формула (12) содержит в себе R-операцию, то возможные расходимости диаграмм, содержащиеся в выражениях $f_i(x/y)$, автоматически устраняются в окончательном результате (12).

Мы выражаем глубокую благодарность Д. В. Ширкову за интерес к работе, ценные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. 4-е изд. М., 1984.
2. Овсянников Л. В.//ДАН СССР. 1956. **109**. С. 1112.
3. Korthals Altes C. P., Rafael E. de//Nucl. Phys. 1976. **B106**. P. 237.
4. Blank V. Z., Shirkov D. V.//Nucl. Phys. 1956. **2**. P. 356.
5. Yennie D. R., Frautchi S. C., Suura H.//Ann. der Phys. 1961. **13**. P. 379.
6. Абрикосов А. А.//ЖЭТФ. 1956. **30**. С. 96.
7. Mueller A. H.//Phys. Rev. 1979. **D20**. P. 2037.
8. Belokurov V. V., Ussyukina N. I.//Phys. Lett. 1980. **B96**. P. 375.
9. Белокуров В. В., Усюкина Н. И.//ТМФ. 1981. **48**. С. 147.
10. Ohrndorf T.//Nucl. Phys. 1983. **B219**. P. 220; 237.

Поступила в редакцию
19.06.95