УДК 533.951

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

П. А. Поляков

(кафедра общей физики)

Развивается нелинейная теория плазменных волн в холодной одномерной плазме на основе лагранжева формализма для описания плазменной среды и последующего преобразования к эйлеровым переменным. Получено новое представление для нелинейных бегущих и стоячих волн, а также найдено новое аналитическое решение для ограниченной плазмы, удовлетворяющее необходимым граничным условиям.

Введение

В настоящее время активно исследуются нелинейные явления в плазменных средах, что прежде всего обусловлено прогрессом в развитии компьютерной техники и ее доступностью. Однако численные способы решения нелинейных уравнений не уменьшили интереса к аналитическим методам их исследования и частным точным решениям. Каждое точное частное решение, особенно физически важных нелинейных систем, вызывает самостоятельный интерес, а также может быть полезным для проверки эффективности алгоритмов численных схем. Если же обратиться к теоретическим методам исследования сильно нелинейных волн, то чаще всего они сводятся к поиску решений системы нелинейных уравнений в частном случае, когда неизвестные величины зависят от времени t и координаты x следующим образом:

$$t - x/v, \tag{1}$$

где v — константа [1—4].

Решения данного типа справедливы только для неограниченной плазмы и не являются единственно возможными. В случае ограниченной плазмы в [5] найден новый класс нелинейных плазменных возмущений, названный нелинейными стоячими плазменными волнами. К сожалению, в [5] не удалось найти явно аналитическое решение в эйлеровом представлении, а искомое решение получено в виде бесконечного ряда, содержащего функции Бесселя. Недавно в работах [6, 7] найдены точные решения системы уравнений холодной гидродинамики для ограниченной плазмы при некоторых специально выбранных граничных условиях.

В данной работе развивается нелинейная теория плазменных волн в холодной одномерной плазме на основе лагранжева формализма для описания плазменной среды и последующего преобразования к эйлеровым переменным. Получено новое представление для нелинейных бегущих волн типа (1) и стоячих волн Девидсона [5], а также найдено новое аналитическое решение для ограниченной плазмы, удовлетворяющее соответствующим граничным условиям.

Основные уравнения и исходные допущения

Рассмотрим продольные электронные колебания в плазме в пренебрежении тепловыми эффектами и движением ионов в случае, когда динамика электронов определяется только электрическим полем. Тогда систему уравнений гидродинамики и Максвелла можно представить в виде [5, 8]:

$$\begin{aligned} &\partial \mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -e\mathbf{E}/m, \quad \partial n/\partial t + \operatorname{div}(n\mathbf{u}) = 0, \\ &\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi e\,(n_0 - n), \qquad \partial \mathbf{E}/\partial t - 4\pi e n\mathbf{u} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\mathbf{u}$ — гидродинамическая скорость электронов, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, n_0 — равновесная плотность электронов.

Известно точное аналитическое решение этой системы для одномерного движения электронов вдоль оси x в частном случае, когда зависимость от координаты x и времени t выбрана в виде (1) [8, 9]. Формально можно построить и общее решение одномерной системы (2), если воспользоваться лагранжевым представлением для описания гидродинамической плазменной среды. Систему уравнений (2) для одномерного движения вдоль оси x можно записать следующим образом [5, 8]:

$$du_x/dt - (e/m)\,E_x; \quad dE_x/dt = 4\pi e n_0 u_x, \tag{3}$$

где

$$d/dt = \partial/\partial t + u_x\,\partial/\partial x. \tag{4}$$

Из (3) находим гидродинамическое уравнение в лагранжевых переменных, эквивалентное эйлеровой системе (2):

$$d^2u_x/dt^2 + \omega_p^2 u_x = 0, \tag{5}$$

где $\omega_p{}^2 = 4\pi e^2 n_0/m$ — электронная плазменная частота.

Уравнение (5) в лагранжевых переменных представляет собой уравнение для гармонического осциллятора, общее решение которого хорошо известно:

$$u_x(t) = A\cos(\omega_p t + \varphi), \tag{6}$$

где A и φ — не зависящие от времени константы, которые могут быть некоторыми функциями начальных значений лагранжевых координат x_0 и начальной скорости v_0, т. е.

$$A = A(x_0,\ v_0), \quad \varphi = \varphi(x_0,\ v_0).$$

Учитывая, что $u_x(t) = dx(t)/dt$, интегрируя (6) для лагранжевой координаты $x(t)$, получим

$$x(t) = A(x_0,\ v_0)\sin(\omega_p t + \varphi(x_0,\ v_0))/\omega_p + C(x_0,\ v_0), \tag{7}$$

где $C(x_0, v_0)$ — константа интегрирования, которая может быть некоторой функцией x_0 и v_0.

Используя (7), можно, в принципе, найти соответствующее решение в эйлеровых переменных при условии, если в каждый момент времени между $x(t)$ и x_0 существует взаимно-однозначное соответствие. Для этого необходимо, чтобы якобиан данного преобразования не обращался в нуль:

$$\partial x(t)/\partial x_0 \neq 0. \tag{8}$$

Условие (8) накладывает ограничения на вид возможных начальных возмущений плазмы, для которых решение (7) имеет смысл. Разрешая уравнение (7), получим функциональную зависимость

$$x_0 = x_0(x(t),\ t). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (5), найдем формальное общее решение системы (2) в эйлеровых переменных:

$$u_x(\text{x},\ t) = A\,(x_0(\text{x},\ t),\ v_0)\cos(\omega_p t + \varphi\,(x^0(\text{x},\ t),\ v_0)), \tag{10}$$

где $\text{x} = x(t)$.

Нелинейные бегущие волны

Используя рассмотренный метод, найдем решение системы уравнений (2), представляющее собой бегущую одномерную нелинейную волну, совпадающую при малых амплитудах с гармонической волной. Пусть начальные условия таковы, что при $t=0$ смещение и скорость каждой микроскопической гидродинамической частицы имеют вид

$$x_0 = (A/\omega_p)\sin(-k\text{x}_0) + \text{x}_0,$$
$$u_0 = A\cos(-kx_0), \tag{11}$$

где A, k — произвольные константы, а x_0 — координата микроскопической частицы в невозмущенном состоянии. Тогда лагранжевы решения (5) и (7) примут вид

$$x(t) = (A/\omega_p)\sin(\omega_p t - k\text{x}_0) + \text{x}_0, \tag{12}$$
$$u_x(t) = A\cos(\omega_p t - k\text{x}_0). \tag{13}$$

Найдем соответствующие (12) и (13) решения в эйлеровых координатах. Для этого заметим, что соотношение (12) можно представить как

$$\psi = \varphi - \varepsilon\sin\varphi, \tag{14}$$

где

$$\psi = \omega_p t - kx(t),\ \ \varphi = \omega_p t - k\text{x}_0,\ \ \varepsilon = kA/\omega_p. \tag{15}$$

Из соотношения (14) видно, что при $-1<\varepsilon<1$ величины φ и ψ связаны взаимно-однозначно и, следовательно, взаимно-однозначно связаны x_0 и $x(t)$. Обозначим функцию, выражающую функциональную связь φ от ψ, через f, т. е.

$$\varphi = f(\varepsilon,\ \psi). \tag{16}$$

Функция, обратная f, согласно (14) равна

$$\psi = f^{-1}(\varphi) = \varphi - \varepsilon\sin\varphi. \tag{17}$$

Подставляя (16) и (13) и учитывая обозначения (15), получим искомое решение системы (2) в эйлеровых координатах, описывающее бегущую нелинейную волну:

$$u(t,\ \text{x}) = \varepsilon\,(\omega/k)\cos[f(\varepsilon,\ \omega_p t - k\text{x})], \tag{18}$$

где $\text{x} = x(t)$.

Функция $f(\varepsilon, \psi) - \psi$ является периодической функцией с периодом 2π, график которой для $\varepsilon=0{,}1$; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9 и 1 приведен на рис. 1 (соответственно кривые *1—6*).

Для $f(\varepsilon, \psi)$ можно найти явное аналитическое аппроксимационное представление с любой наперед заданной точностью, используя итерационную процедуру к соотношению (17) относительно безразмерного параметра ε, т. е.

$$f(\varepsilon, \psi) = \psi + \varepsilon \sin(\psi + \varepsilon \sin(\psi + \varepsilon \sin(\psi + \ldots).$$

Вполне удовлетворительную аппроксимацию дает уже третья итерация. Максимально возможная ошибка в этом случае даже при $\varepsilon=1$ меньше 0,4 и быстро убывает с уменьшением безразмерной амплитуды ε: так, при $\varepsilon=0{,}7$ ошибка меньше 0,1. Аппроксимационная формула десяти итераций при $\varepsilon=1$ имеет максимальную ошибку меньше 0,1, а при $\varepsilon=0{,}9$ ошибка меньше 0,05.

Нелинейные стоячие волны

Следуя работе [5], построим нелинейное решение (10), которое при малых амплитудах переходит в уравнение для гармонической линейной стоячей волны

$$u(t, x) = 2A\cos(kx)\cos(\omega_p t)$$

и удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$E_x(0, t) = E_x(L, t) = u(0, t) = u(L, t) = 0, \tag{19}$$

где L — размер области локализации плазменного возмущения.

Лагранжево решение (7), соответствующее данным условиям, равно

$$x(t) = x_0 + (2A/\omega_p)\cos(kx_0)\sin(\omega_p t), \tag{20}$$

$$u(t) = 2A\cos(kx_0)\cos(\omega_p t), \tag{21}$$

где x_0 имеет тот же смысл, что и в выражении (11), а $k=n\pi/L$, $n=\pm1, \pm2, \ldots$.

Чтобы найти эйлерово решение, требуется разрешить соотношение (20) относительно переменной $x(t)$, что невозможно сделать в явно аналитическом виде. Однако, если воспользоваться определенной выше трансцендентной функцией (16), то равенство (20) можно представить в виде

$$\psi = f^{-1}(\varepsilon(t), \varphi) = \varphi - \varepsilon(t)\sin\varphi, \tag{22}$$

где

$$\varphi = (kx_0 - \pi/2),\ \psi = kx(t) - \pi/2,\ \varepsilon(t) = 2Ak\sin(\omega_p t)/\omega_p.$$

Следовательно, в эйлеровых переменных величина гидродинамической скорости $u(t, x)$, соответствующая лагранжеву решению (21), будет равна

$$u(t, x) = 2A\cos(f(\varepsilon(t), kx - \pi/2))\cos(\omega_p t), \tag{23}$$

где $x = x(t)$.

Решение (23) справедливо при условии (8), которое выполняется, если $-1<\varepsilon(t)<1$, и для малых амплитуд колебаний совпадает с уравнением для линейной гармонической стоячей плазменной волны.

Рассмотрим теперь вопрос: может ли исходная эйлерова система уравнений (2) иметь явное аналитическое решение типа стоячей нелинейной волны при каких-либо физически разумных условиях? Для этого необходимо найти такое выражение (7), которое удовлетворяло бы граничным условиям (19) и могло бы быть разрешено относительно переменной $x(t)$ аналитически. Соответствующий математический анализ показал, что такие решения существуют и наиболее простым из них является следующее:

$$x(t) = x_0 + \varepsilon x_0 (1 - x_0/L) \cos(\omega_p t), \tag{24}$$

$$u_x(t) = -\omega_p \varepsilon x_0 (1 - x_0/L) \sin(\omega_p t), \tag{25}$$

где ε — некоторая константа.

Это решение соответствует начальному параболическому смещению электронной компоненты плазмы вдоль оси X на интервале L. Выразив в (24) параметр x_0 через $x(t)$ и t, получим

$$x_0 = a(x, t) = L\{(1 + \varepsilon \cos(\omega_p t) - $$

$$- [(1 + \varepsilon \cos(\omega_p t)^2 - 4\varepsilon (x/L) \cos(\omega_p t)]^{1/2}\}/(2\varepsilon \cos(\omega_p t), \tag{26}$$

где $x = x(t)$.

Подставляя (26) в (25), найдем искомое эйлерово решение системы (2):

$$u_x(x, t) = -\omega_p \varepsilon a(x, t)(1 - a(x, t)/L) \sin(\omega_p t). \tag{27}$$

Данное решение не является тривиальным с точки зрения эйлеровых уравнений (2), и трудно представить, каким образом его можно получить в рамках эйлерового формализма. Отметим, что класс явно аналитических решений данного вида уравнений (2) невелик и определяется ситуацией, при которой функциональная зависимость выражения (7) от x_0 определяется полиномом не выше 4-й степени. Однако в этих случаях точные аналитические решения имеют существенно более сложный вид.

Условие (8) накладывает ограничение на величину амплитуды данной нелинейной стоячей волны и допускает только следующие значения безразмерного параметра ε:

$$-1 < \varepsilon < 1. \tag{28}$$

Из выражения (24) видно, что $\varepsilon = 4x_{0,max}/L$, где $x_{0,max}$ — максимальное смещение микроскопических гидродинамических частиц из состояния равновесия. Таким образом, в нелинейной стоячей волне (27) максимальная амплитуда смещения электронов может достигать величины $L/4$.

С помощью формул (26) и (27) и выражений (2) можно вычислить любые гидродинамические величины. Так, для напряженности электрического поля в нелинейной плазменной волне из (3) получим

$$E_x = -\frac{m}{e}\frac{du}{dt} = \frac{m}{e}\omega_p^2 \varepsilon a(x, t)\frac{L - a(x, t)}{L}\cos(\omega_p t). \tag{29}$$

График изменения напряженности электрического поля от времени в нелинейной стоячей волне (29) при $\varepsilon = 0{,}5$ в точках $L/8$, $L/4$ представлен на рис. 2 (кривые *1, 2*). Звездочками помечены значения E_x, полученные численным моделированием плазмы методом крупных частиц. Приведенные результаты говорят о хорошем количественном согласии теории и численного эксперимента.

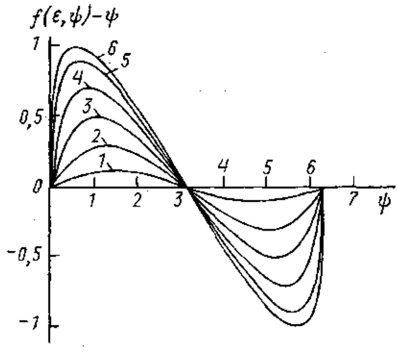

Рис. 1

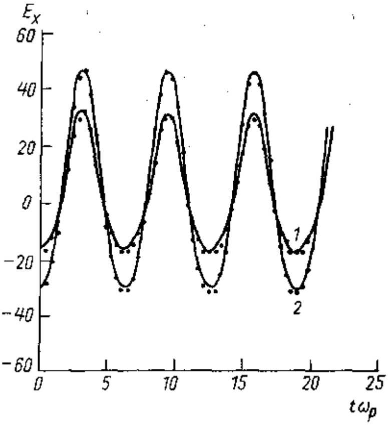

Рис. 2

Работа поддержана грантом РФФИ № 96—02—16416.

ЛИТЕРАТУРА

1. Holloway J. P., Dorning J. J.//Phys. Rev. 1991. **A44**, N 6. P. 3856.
2. Владимиров В. С., Кривицкий С. В.//ЖЭТФ. 1992. **101**, № 5. С. 1510.
3. Алешин И. М., Дрофа М. А., Кузьменков Л. С.//Физ. плазмы. 1993. **19**, № 8. С. 1005.
4. Амиранашвили Ш. Г., Игнатов А. М.//Физ. плазмы. 1995. **21**, № 5. С. 386.
5. Davidson R. C. Methods in Nonlinear Plasma Theory. Acad. Press. N. Y., 1972. Chap. 3. P. 33—41.
6. Aliev Yu., Stenflo L.//Phys. Scripta. 1994. **50**. P. 701.
7. Stenflo L., Yu M. Y.//Phys. Plasmas. 1995. **2**, N 5. P. 1494.
8. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В. и др. Электродинамика плазмы. М., 1974.
9. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я.//ДАН СССР. 1951. **80**. С. 193.

Поступила в редакцию
03.07.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 2

РАДИОФИЗИКА

УДК 533.9

КИНЕТИКА НАГРЕВА ГАЗА В ИМПУЛЬСНО-ПЕРИОДИЧЕСКОМ РАЗРЯДЕ В ВОЗДУХЕ

В. В. Лодинев, В. М. Шибков, Л. В. Шибкова

(кафедра физической электроники)

Проведено исследование кинетики нагрева газа в условиях импульсно-периодического разряда в воздухе. Проанализированы различные механизмы передачи энергии в поступательные степени свободы молекулярного газа. Показано, что в активной фазе импульсного разряда в воздухе при больших значениях приведенного электрического поля ($E/n > 10^{-15}$ В·см²) нагрев газа идет за счет тушения электронно-возбужденных молекул азота.

В последнее время проводятся интенсивные теоретические и экспериментальные исследования кинетики нагрева газа при больших значениях приведенного электрического поля ($E/n \gg 10^{-15}$ В·см²) [1—11]. Основное внимание в этих работах уделяется выявлению основных