

## АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.14; 539.16

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯДЕРНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

О. П. Бадаев

(кафедра общей физики)

Предложен способ наиболее точного описания ядерной энергетической поверхности частями параболоидов, образующих непрерывную энергетическую поверхность ( $\sigma \sim 0,1$  МэВ). Параметры вычисленной поверхности, являющиеся общими для рядов граничащих друг с другом областей ядер, не меняются, и их значения можно распространить и на области еще не изученных ядер. Это позволило описать энергии  $\alpha$ -активных ядер с  $82 < N < 126$  и более надежно прогнозировать энергии ядер, недоступных для эксперимента. Обнаружено увеличение кривизны изобарных сечений ядерной энергетической поверхности при переходе от нейтронодефицитных к нейтроноизбыточным ядрам.

Задача вычисления энергии связи атомных ядер  $B=B(Z, N)$  как функции ядерных переменных  $Z$  и  $N$  с точностью, соизмеримой с точностью эксперимента и составляющей в настоящее время для большинства ядер несколько сотых долей МэВ, до сих пор остается сложной задачей.

Широко распространенные теоретические методы [1, 2] гарантируют точность расчетов, не превышающую единиц МэВ. Более высокую точность (порядка 0,3—0,5 МэВ) удается получить при использовании полумпирических формул [3, 4] или при разбиении системы ядер на области, ограниченные магическими и субмагическими числами протонов и нейтронов, с последующим описанием отдельных ее частей [5—8]. Наиболее точное расчетное воспроизведение частей ядерной энергетической поверхности (ЯЭП) получается при эмпирическом описании энергий присоединения нуклонов к атомным ядрам [5, 8]. Но и этот метод является несовершенным, так как приводит к нарушению непрерывности вычисленной энергетической поверхности.

В настоящей работе предлагается метод, обеспечивающий вычисление непрерывной энергетической поверхности  $B=B(Z, N)$  как суммы энергий присоединения отдельных нуклонов, составляющих ядра, с точностью, приближающейся к экспериментальной [9—12]. В этом способе описания ЯЭП пространство ядерных переменных  $(Z, N)$ , определяющее протонно-нейтронный состав атомных ядер, разделено некоторыми числами протонов  $Z_k$  и нейтронов  $N_l$  на прямоугольные области. Числа  $Z_k$  и  $N_l$ , где  $k$  и  $l$  — порядковые номера этих чисел, интерпретируются как (суб)магические числа протонов и нейтронов. Часть ядер, для которой  $Z_k < Z < Z_{k+1}$  и  $N_l < N < N_{l+1}$ , будем называть междумагической областью  $\{k, l\}$ . В каждой такой области энергии связи ядер  $B=B(Z, N)$  одного и того же типа четности  $i, j$  ( $i=(-1)^Z, j=(-1)^N$ ) выражаются с высокой точностью (для 78% ядер отклонения вычисленных значений от экспериментальных составляют менее 0,1 МэВ) квадратичными функциями от  $Z$  и  $N$ , а энергии присоединения протонов  $p(Z, N)$  и энергии присоединения нейтронов  $n(Z, N)$  — линейными функциями тех же ядерных переменных:

$$p_{ij}(Z, N) = p_{ij}^0 - 0,5\alpha_{ij}(Z - Z_k) + 0,5\gamma_{ij}^N(N - N_l), \quad (1)$$

$$n_{ij}(Z, N) = n_{ij}^0 + 0,5\gamma_{ij}^Z(Z - Z_k) - 0,5\beta_{ij}(N - N_l). \quad (2)$$

Здесь  $p_{ij}^0$ ,  $a_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}^N$ ,  $n_{ij}^0$ ,  $\gamma_{ij}^Z$ ,  $\beta_{ij}$  — параметры, на которые накладываются условия  $a_{i+} = a_{i-} = a_i$ ,  $\beta_{+l} = \beta_{-l} = \beta_l$ ,  $\gamma_{-j}^Z = \gamma_{+j}^Z = \gamma_j^Z$ ,  $\gamma_{i-}^N = \gamma_{i+}^N = \gamma_i^N$ , а вследствие непрерывности энергетической поверхности в области  $\{k, l\}$  должно выполняться равенство

$$\gamma_+^N + \gamma_-^N = \gamma_+^Z + \gamma_-^Z. \quad (3)$$

Под непрерывностью вычисленной энергетической поверхности дискретно изменяющихся аргументов  $Z$  и  $N$  следует понимать равенство нулю суммы энергий присоединения нуклонов к ядрам по любому замкнутому контуру.

Требование непрерывности энергетической поверхности на границах областей приводит к уменьшению числа параметров и обеспечивает однозначность энергии присоединения нуклонов, принадлежащих двум граничащим друг с другом областям. При этом условия разности  $p(Z_i, N) - p(Z_i + 2, N) = \alpha_i(k)$  не зависят от числа и четности нейтронов и не меняются, пока  $Z_k < Z < Z_{k+1}$ . Аналогично разности  $n(Z, N_j) - n(Z, N_j + 2) = \beta_j(l)$  сохраняют свою величину, пока  $N_l < N < N_{l+1}$ . Параметры  $\alpha_i(k)$  и  $\beta_j(l)$ , сохраняющие свои значения соответственно в границах  $Z_k - Z_{k+1}$  и  $N_l - N_{l+1}$ , названы внешними параметрами, в отличие от  $\gamma_+^N(k, l)$ ,  $\gamma_-^N(k, l)$ ,  $\gamma_+^Z(k, l)$ ,  $\gamma_-^Z(k, l)$ , которые для каждой области индивидуальны и названы внутренними.

Предположение о том, что в области  $\{k, l\}$  должны выполняться соотношения (1) — (2), накладывает ограничение на количество (суб-)магических чисел  $n = k + l < A/4$ , где  $A$  — массовое число ядра.

Для согласования математической модели ( $M$ -модели) с экспериментальными данными использовался метод наименьшего модуля, так как энергии ядер не независимы, а связаны условием непрерывности ЯЭП [13].

$M$ -модель описывает четыре энергетические поверхности ядер четырех типов четности. В пределах области  $\{k, l\}$  поверхности являются параболоидами, имеющими одинаковые параметры, но смещенными относительно друг друга на величину энергии поправки на четность. Полная энергетическая поверхность четно-четных ядер построена из параболоидов, не имеющих разрывов на границах областей. В каждой области параболоиды характеризуются своим индивидуальным набором параметров.

На рис. 1 схематично изображена область  $\{k, l\}$ . Точки пересечения линий обозначают ядра. Над линией, соединяющей два ядра, буквами  $a_{00}$ ,  $a_{01}$  и т. д. обозначены экспериментальные значения энергий присоединения протонов к ядрам, под линией  $p_{00}^0$ ,  $p_{10}^0, \dots$  вычисленные значения этих же энергий. Буквы  $b_{00}$ ,  $b_{10}, \dots$  над линией обозначают экспериментальные значения энергий присоединения нейтронов,  $n_{00}^0$ ,  $n_{01}^0, \dots$  под линией — вычисленные значения этих же энергий. Вычисленные значения энергии присоединения нуклонов к ядрам в соответствии с методом наименьшего модуля должны удовлетворять условию  $\sum_{st} (|a_{st} - p_{st}| + |b_{st} - n_{st}|) \rightarrow \min$ , справедливому для всех об-

ластей ЯЭП. Для вычисления энергии присоединения нуклонов к ядрам в пределах области нужно задать 12 независимых величин:

1) четыре параметра, фиксирующие значения энергий присоеди-

ния нуклонов на двух границах области  $Z_k$  и  $N_l$ ,  $\rho_{00}^0$ ,  $\rho_{10}^0$ ,  $n_{00}^0$ ,  $n_{01}^0$  и одно внутри области, например  $\rho_{01}^0$ ,

2) четыре независимых параметра  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$ ,  $\beta_+$ ,  $\beta_-$ ,

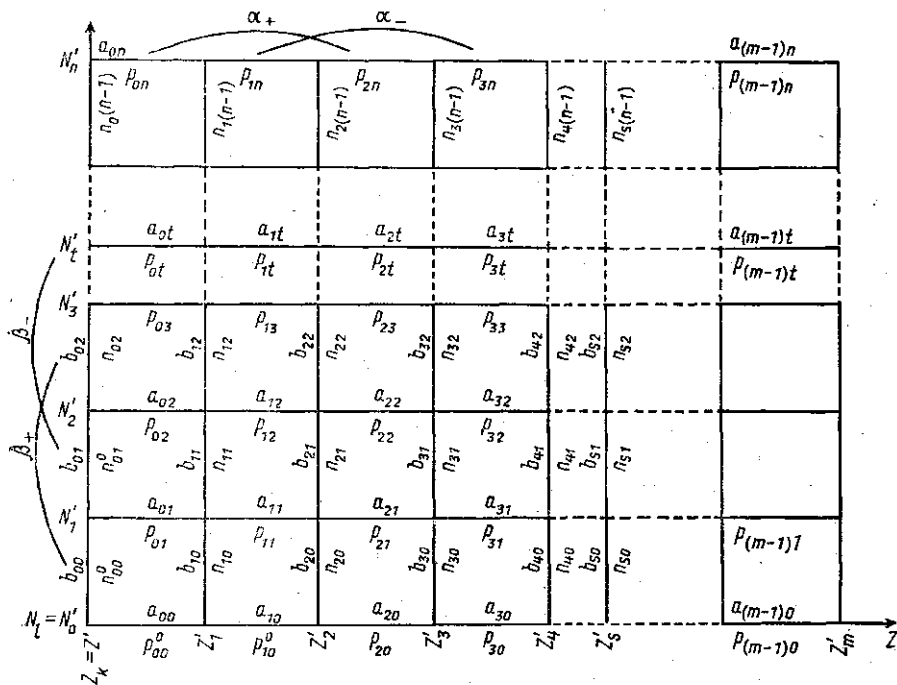


Рис. 1. Схематическое изображение области  $(k, l)$  и связь параметров области с вычисленными значениями энергий присоединения нуклонов к атомным ядрам:

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= \rho_{0t} - \rho_{2t} = \rho_{2t} - \rho_{4t} = \dots \\ \alpha_- &= \rho_{1t} - \rho_{3t} = \rho_{3t} - \rho_{5t} = \dots \\ \beta_+ &= n_{s0} - n_{s2} = n_{s2} - n_{s4} = \dots \\ \beta_- &= n_{s1} - n_{s3} = n_{s3} - n_{s5} = \dots \\ \gamma_+^Z &= \rho_{0(t+2)} - \rho_{0t} = \rho_{2(t+2)} - \rho_{2t} = \dots \\ \gamma_-^Z &= \rho_{1(t+2)} - \rho_{1t} = \rho_{3(t+2)} - \rho_{3t} = \dots \\ \gamma_+^N &= n_{(s+2)0} - n_{s0} = n_{(s+2)2} - n_{s2} = \dots \\ \gamma_-^N &= n_{(s+2)1} - n_{s1} = n_{(s+2)3} - n_{s3} = \dots \end{aligned}$$

3) три любых параметра из четырех внутренних параметров  $\gamma_+^Z$ ,  $\gamma_-^Z$ ,  $\gamma_+^N$ ,  $\gamma_-^N$ , связанных соотношением (3).

В табл. 1 и 2 схематично изображена часть  $M$ -модели, распространенной на области  $\beta$ -нестабильных ядер. Линии образуют сетку границ областей. По периметрам прямоугольников, изображающих области, под линиями границ записаны числа, которые, в соответствии с рис. 1, обозначают энергии:  $\rho_{00}^0$ ,  $\rho_{10}^0$ ,  $n_{00}^0$ ,  $n_{01}^0$ . Внутренние параметры  $\gamma_+^Z$ ,  $\gamma_-^Z$ ,  $\gamma_+^N$ ,  $\gamma_-^N$  могут быть вычислены из граничных значений и  $\rho_{01}$ , а внешние параметры  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$ ,  $\beta_+$ ,  $\beta_-$  вынесены на внешние границы  $M$ -модели — над дугами.

Количество независимых величин, необходимое для задания части

Таблица I

	28	32	36	40	42	46	50	52	58
82									
80		50,73	44,60	37,65	33,27	13,95 15,56	9,88 10,79	8,65 10,00	
72	1,46	0,61	1,55	3,71	1,57	6,85 1,53	8,38 1,39	5,42 7,18	0,79
70		44,53	38,32	31,53	25,24	10,95 12,68	7,09 8,58	5,77 7,62	1,05
68	1,62	1,57	1,74	5,05	1,77	6,59 1,63	5,99 8,50	4,41 5,61	1,10
66		39,31	33,01	26,64	20,22	5,39 7,95	4,32 6,84	3,61 4,91	
64	1,76	4,74	1,64	8,02	1,67	11,36 1,68	10,64 12,39	7,97 10,49	6,48 6,48
62		34,39	28,00 15,00	21,66 11,34	15,33 8,18	10,77 8,90	6,48 5,78	4,09 3,03	1,66
60	1,65	4,97	1,76	5,49	1,86	2,14 5,50	6,71 5,97	8,38 7,97	10,77 8,09
58		30,87	24,04 13,28	17,93 7,48	11,84 9,84	7,26 6,54	9,13 8,90	4,14 6,45	
56	1,82	7,45	1,98	6,31	1,85	1,37 6,80	8,31 7,30	9,18 8,76	11,12
54		26,91	20,02 10,28	14,02 6,51	8,52 5,45	7,37 4,90	7,37 4,90	5,88 8,58	
52	1,95	8,42	2,09	7,06	1,60	1,95 7,18	8,62 8,08	9,67 8,08	9,11 7,49
50		21,57 11,35	15,14 8,60	10,38 5,95	7,49 5,14	7,49 5,14	6,24 4,68	4,68 4,68	
48	14,21 15,40	10,21 12,12	7,10 9,70	4,34 6,87					
46	3,33 8,26	6,49 9,38	4,29 11,52	2,03 7,00					
44	12,27	7,70	4,37						
42	10,08 12,54	6,85 9,57	3,83 7,00						
40	2,01	1,57	1,55	1,37	1,53	1,84			
38									
36									
34									
32									
30									
28									

$M$ -модели, изображенной в табл. 1 и 2, около 370. Если в этом массиве ядер ограничиться только ядрами одного типа четности, то число независимых параметров  $M$ -модели уменьшится до 120. При этом вместо параметров  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$ ,  $\beta_+$ ,  $\beta_-$ ,  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$ ,  $\gamma_+^N$ ,  $\gamma_-^N$  останется всего три параметра:  $\alpha = \alpha_+ + \alpha_-$ ,  $\beta = \beta_+ + \beta_-$  и  $\gamma = \gamma_+^Z + \gamma_-^Z$ .  $M$ -модели ядер других

Таблица 2

	52	58	64	70	74	76	80	82	86			
124	4 8,29	37,81	33,98	25,12	20,50	8,61	9,71	6,40	7,25	3,56	4,72	
120	-3,42	1,38	1,32	1,21	1,13	1,16				0,67		
116	-4,24	1,54	1,48	1,37	1,19	1,20				0,60		
108	-3,23	1,66	1,60	1,33	1,33	1,26				0,73		
101	1,19	1,97	1,33	1,12	1,06	1,02				1,08	4,06	
96	5,86	1,28	1,15	0,99	1,06	1,04				1,08	1,08	
92	6,96	1,27	1,07	0,99	1,02	0,97				0,35		
89	13,31	1,72	0,95	1,26	1,00	1,00				0,37	1,53	
87	6,80	1,37	1,32	1,11								
82	3,35	4,83	1,55	1,25								
	1,20	1,00	1,05	0,95	1,15	1,00	0,96	0,80	0,84	0,92	0,85	0,72

типов четности можно получить, если ввести поправку на четность, которую нужно прибавить к энергиям четно-четных ядер. Формула для вычисления поправки может быть взята из работы В. М. Вымятина [4]:

$$P(Z, N) = \frac{5,55}{\sqrt{A}} \{(-1)^Z + (-1)^N - 2\}. \quad (4)$$

Уравнения параболоидов, описывающих поверхности энергий связи ядер  $M$ -модели в пределах области  $\{k, l\}$ , можно записать в виде функций

$$B(Z, N) = a(Z - Z_h) + b(N - N_l) + c(Z - Z_h)^2 + d(N - N_l)^2 + e(Z - Z_h)(N - N_l) + B(Z_h, N_l). \quad (5)$$

Поскольку в большинстве случаев субмагические числа четные, удобно использовать для записи и исследования ЯЭП  $M$ -модель четно-четных ядер. Коэффициенты в формуле (5) для четно-четных ядер выражаются через параметры областей следующим образом:

$$a = \frac{2(\rho_{00} + \rho_{10}) + \alpha}{4}, \quad b = \frac{2(n_{00} + n_{01}) + \beta}{4},$$

$$c = -\frac{\alpha}{8}, \quad d = -\frac{\beta}{8}, \quad e = \frac{\gamma}{4}.$$

Если в формуле (5) сделать переход от переменных  $Z$  и  $N$  к переменным  $A = Z + N$  и  $I = N - Z$ , то в новых координатах она будет выглядеть так:

$$B(A, I) = \frac{(a+b)(A - A_0)}{2} + \frac{(b-a)(I - I_0)}{2} + \frac{(c+d+e)(A - A_0)^2}{4} + \frac{(d-e)(A - A_0)(I - I_0)}{2} + \frac{(c+d-e)(I - I_0)^2}{2} + B(A_0, I_0), \quad (6)$$

где  $A_0 = Z_h + N_l$ ,  $I_0 = N_l - Z_h$ .

Переход к новой системе координат дает возможность проследить за изменением кривизны изобарных сечений по величине коэффициента  $K\{k, l\}$  при  $(I - I_0)^2$ :

$$K\{k, l\} = \frac{c+d+e}{4} = \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{32}. \quad (7)$$

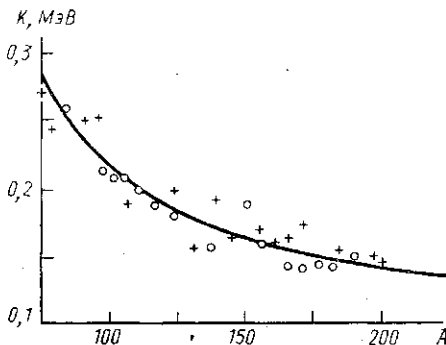


Рис. 2. Значения кривизны параболоидов  $M$ -модели по областям (крестики — протонодефицитные ядра, кружочки — протоноизбыточные ядра) в сравнении с усредненной кривизной изобарных сечений (сплошная кривая)

На рис. 2 сделано графическое сопоставление усредненного значения кривизны изобарных сечений, рассчитанной по предлагаемой формуле  $K(A) = 0,1 + 120 A^{-3/2}$ , с кривизной параболоидов, расположенных по разные стороны от линии  $\beta$ -стабильности. Кривизна поверхности нейтроноизбыточных ядер оказалась в среднем больше, чем для нейтронодефицитных ядер. Из этого следует, что изобарные сечения ЯЭП несимметричны и для своего описания требуют введения высших степеней  $(N - Z)$ .

Удобство применения модели обусловлено использованием в описании всего экспериментального массива данных небольшо-

го числа универсальных параметров трех типов:  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Постоянство  $\alpha$ - и  $\beta$ -параметров в областях между соседними субмагическими числами в сочетании с жесткой сеткой границ их постоянства дает надежду на то, что  $M$ -модель должна обладать хорошими прогностическими свойствами и может быть пригодной для экстраполяции с высокой точностью. В частности, для вычисления энергии ядер в областях, не содержащих экспериментальных данных, необходимо определить неизвестные в этих областях параметры  $\gamma$ . Предполагая, что в пределах главных магических чисел ЯЭП может быть описана гладкими функциями, выберем параметры  $\gamma$ , удовлетворяющие этому условию. В табл. 1 и 2 в прямоугольниках, изображающих области с пунктирными линиями границы, записаны значения  $p_{00} + p_{10}$  и  $n_{00} + n_{01}$ , необходимые для вычисления энергий четно-четных ядер, а в центре — численные значения  $\gamma$ .

По вычисленным значениям энергий связи четно-четных ядер были построены графики изобарных сечений ЯЭП в  $M$ -модели для  $A=112$  и  $A=178$ , изображенные на рис. 3. Для сравнения там же построены графики сечений, вычисленные по «оптимальной массовой формуле» В. М. Вымятина [4], которая считается одной из лучших для далеких экстраполяций.

Сечения ЯЭП, вычисленные по «оптимальной массовой формуле» без учета оболочечных эффектов, являются параболоми. Эти же сечения, вычисленные в рамках  $M$ -модели, как видно из рис. 3, обладают заметной асимметрией.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Weiner M., Lombard R. J.//Ann. of Phys. (N. Y.). 1974. 86. P. 262.
2. Струтинский В. М.//Ядерная физика. 1966. 3. С. 614.
3. Seeger P. A., Howard W. M.//Nucl. Phys. 1975. A 238. P. 491.
4. Колесников Н. Н., Вымятин В. М.//Ядерная физика. 1980. 31. С. 79.
5. Колесников Н. Н.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1966. № 6. С. 76.
6. Zeldes N.//Nucl. Phys. 1965. 63. P. 1.
7. Liran S., Zeldes N.//Atomic Data and Nuclear Data Tables. 1976. 17. P. 431.

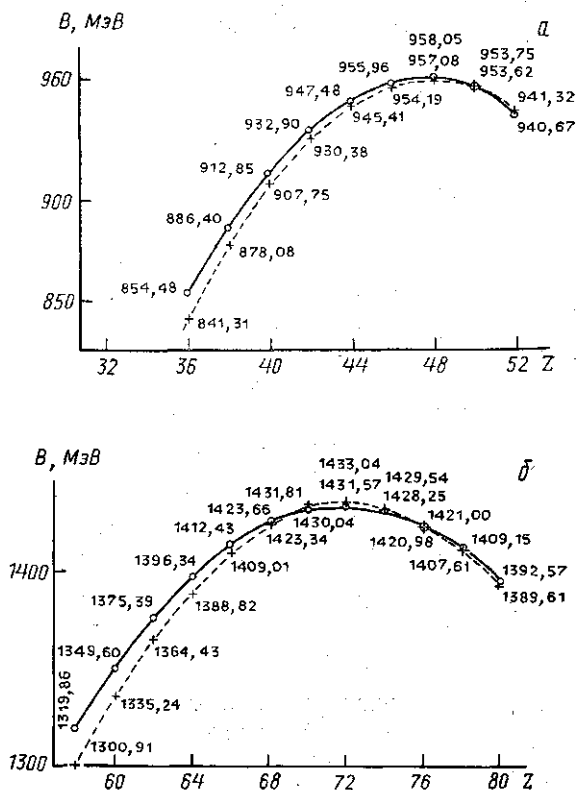


Рис. 3. Совмещенные изобарные сечения для  $A=112$  (а) и  $A=178$  (б); сплошная кривая — сечения, рассчитанные по «оптимальной массовой формуле», штриховая — с помощью  $M$ -модели

8. Колесников Н. Н., Вымятнин В. М. // Изв. вузов, Физика. 1977. № 6. С. 115.
9. Колесников Н. Н., Бадаев О. П., Вымятнин В. М. Энергия связи нуклонов в среднетяжелых ядрах. Деп. ВИНТИ, № 2627-Деп. М., 1980.
10. Колесников Н. Н., Бадаев О. П., Старосотников М. И. Энергия связи нуклонов в ядрах области  $22 < Z < 64$ . Деп. ВИНТИ № 2627-Деп. М., 1981.
11. Колесников Н. Н., Бадаев О. П. Изомультиплетные уровни, энергии отрыва нуклонов и бета-распада легких ядер. Деп. ВИНТИ № 6180-83-Деп. Томск, 1983.
12. Колесников Н. Н., Бадаев О. П., Вымятнин В. М. // Излучение возбужденных состояний ядер. Алма-Ата, 1986. С. 255.
13. Библиотека программ для изучения структуры веществ дифракционными методами / Под ред. Б. М. Щедрина, Н. П. Жидкова. М., 1987.

Поступила в редакцию  
27.03.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 3

УДК 523.165

## ЕЩЕ РАЗ К ВОПРОСУ О ВИДЕ СПЕКТРА ПРОТОНОВ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

Д. М. Подорожный, Г. А. Самсонов, Л. А. Хейн, И. В. Яшин  
(НИИЯФ)

Дана трактовка причин разногласий в результатах обработки разными авторами данных об энергетическом спектре протонов первых космических лучей, полученных в эксперименте «Сокол-2».

Данные эксперимента «Сокол-2» по спектру протонов высокой энергии являются предметом дискуссии в течение ряда лет. Настоящая публикация рассчитана на читателей, следивших за ходом дискуссии и знакомых с основными статьями по тематике «Сокол». Работа Н. Л. Григорова [1] посвящена выяснению причин расхождений в работах [2, 3] и [4, 5], опубликованных в 1988—1990 гг. Здесь представлен анализ причин этих расхождений, выполненный четверью авторами на основе материала, подготовленного всем авторским коллективом [4, 5].

По заключению [1] причина расхождения — отбор протонных событий в области энергии выше 10 ТэВ. В табл. 1 приведено сравнение соответствующих выборок при следующих критериях отбора:

- 1) заряд частицы, измеренный детектором ДЗ-1:  $0.7 < Z_1 < 1.5$ ;
- 2) заряд частицы, измеренный детектором ДЗ-2:  $Z_2 < 4$ ;
- 3) взаимодействие происходит не ниже 3-го ряда ионизационного калориметра (ИК).

Таблица 1

Е, ТэВ	13—20	20—32	32—50	50—79
N (И. П. Иваненко и др.)	11	3	2	1
N (Н. Л. Григоров)	9	3	1	0

Данные И. П. Иваненко и др. базируются на первичном материале, опубликованном в [6] с уточнениями, опубликованными в [7]. Данные Н. Л. Григорова — только на [6].