ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12:531.51

ФИНСЛЕРОВО ОБОБЩЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Г. С. Асанов

(кафедра теоретической физики)

Даны явные выражения для финслеровых инвариантных скалярных произведений четырехмерных импульсов и радиус-векторов.

1. Введение

В предыдущей работе [1] мы показали что специально-релятивистская финслерова метрическая функция $F(y)$ обладает свойством нелинейной лоренц-инвариантности, которое мы назовем для краткости F-инвариантностью. Картина такова, что соответствующее финслерово пространство $F_4=\{T_x, F(y)\}$ может быть получено путем определенного нелинейного, преобразования $t=t(y)$ специального лоренц-инвариантного риманова пространства N_4, так что лоренц-инвариантность пространства N_4 проявляет себя в пространстве F_4 как F-инвариантность. В настоящей работе мы используем соотношения, полученные в [1], чтобы вычислить F-инвариантные скалярные произведения с целью будущих приложений в теории квантованных полей. При этом мы строго следуем обозначениям и терминологии, принятым в [1].

2. F-инвариантные скалярные произведения

Пусть $y^P \in T_x$ и $\hat{y}^P \in T_x$ — два касательных вектора в F_4. Мы используем преобразование $y^P=y^P(t^Q)$, чтобы получить соответствующие векторы t^P и $\hat{t}^P$ в N_4 и затем определить их скалярное произведение $(t\hat{t})$ согласно обычному псевдоевклидову правилу:

$$(t\hat{t})=e_{PQ}t^P\hat{t}^Q. \qquad (1)$$

После этого мы возвращаемся в F_4 обратным преобразованием $t^P=t^P(y^Q)$, получая в результате скалярное произведение

$$(\hat{y}y) \overset{\text{def}}{=} e_{PQ}t^P(y)\,t^Q(\hat{y}) \qquad (2)$$

и аналогично

$$(ky) \overset{\text{def}}{=} t_P(k)\,t^P(y), \quad (k\hat{k}) \overset{\text{def}}{=} e^{PQ}t_P(k)\,t_Q(k), \qquad (3)$$

если $k, \hat{k} \in T_x^*$ — ковариантные векторы. Используя формулы раздела 2 из [1], мы получаем следующий результат: *если* $F(y)>0$ *и* $F(\hat{y})>0$, *то*

$$(y\hat{y})=j(y)\,j(\hat{y})\,[A^{-2}E(y)\,E(\hat{y})\,y^0\hat{y}^0-\delta_{ab}y^b\hat{y}^a]=(\hat{y}y). \qquad (4)$$

Аналогично, принимая во внимание (18) из [1], мы получим: *если* $F(y)>0$ *и* $F(\hat{y})=0$, *то*

$$(y\hat{y})=j(y)\,[A^{-1}E(y)\,g_+y^0\hat{y}^0-\delta_{ab}y^a\hat{y}^b]. \qquad (5)$$

Если $F(y)=0$ *и* $F(\hat{y})=0$, *то*

$$(y\hat{y})=(g_+)^2\,y^0\hat{y}^0-\delta_{ab}y^a\hat{y}^b. \qquad (6)$$

Для ковариантных векторов справедливы аналогичные представления, а именно: пусть $P_R \in T^*_x$ и $Q_R \in T^*_x$. *Если* $H(P)>0$ *и* $H(Q)>0$, то

$$(PQ) = j^*(P)\, j^*(Q)\, [A^{-2} E^*(P)\, E^*(Q)\, P_0 Q_0 - \delta^{ab} P_a Q_b]. \tag{7}$$

Если $H(P)>0$ *и* $H(Q)=0$, *то*

$$(PQ) = j^*(P)\, [A^{-1} E^*(P)\, g^+ P_0 Q_0 - \delta^{ab} P_a Q_b]. \tag{8}$$

Если $H(P)=0$ *и* $H(Q)=0$, *то*

$$(PQ) = (g^+)^2 P_0 Q_0 - \delta^{ab} P_a Q_b. \tag{9}$$

Наконец, если $k_P \in T^*_x$ — ковариантный вектор, то его свертка с контравариантным вектором $y^P \in T_x$ определяется так: *если* $H(k)>0$ *и* $F(y)>0$, *то*

$$(ky) = j^*(k)\, j(y)\, [A^{-2} E^*(k)\, E(y)\, k_0 y^0 + k_a y^a], \tag{10}$$

если $H(k)=0$ *и* $F(y)>0$, *то*

$$(ky) = j(y)\, [A^{-1} E(y)\, k_0 y^0 + k_a y^a], \tag{11}$$

и *если* $H(k)=0$ *и* $F(y)=0$, *то*

$$(ky) = k_0 y^0 + k_a y^a. \tag{12}$$

Поскольку определения (1)—(3) явно лоренц-инвариантны, то все последующие финслеровы скалярные произведения (4)—(12) F-инвариантны.

3. Финслеровы поправки порядка $O(g)$

Пусть $P_R \in T^*_x$, $Q_R \in T^*_x$ и

$$H(P) = m_1, \quad H(Q) = m_2. \tag{13}$$

Введем обозначения: $p_a = P_a/P_0$, $q_a = Q_a/Q_0$, $p = \sqrt{\delta^{ab} p_a p_b}$ и $q = \sqrt{\delta^{ab} q_a q_b}$.

Считая параметр g малым, мы можем ограничиться учетом поправок, пропорциональных g (и пренебречь всеми членами, пропорциональными $|g|^k$ с $k>1$). В таком $O(g)$-приближении простые вычисления приводят, в частности, к следующим результатам. Если $m_1>0$, то справедливо

$$t_0(P) = m_1 (1-p^2)^{-1/2} \left(1 - \frac{g}{2} \frac{p^3}{1-p^2}\right),$$
$$t_a(P) = m_1 (1-p^2)^{-1/2} \left(1 - \frac{g}{2} \frac{p}{1-p^2}\right) p_a, \tag{14}$$

и если $m_1=0$, то

$$t_0(P) = \left(1 + \frac{1}{2} g\right) P_0, \quad t_a(P) = P_a \tag{15}$$

(использованы формулы (20)—(21) из [1]). Если $m_1>0$ и $m_2>0$, то

$$(PQ) = m_1 m_2 (1-p^2)^{-1/2} (1-q^2)^{-1/2} \left\{1 - \mathbf{pq} + \frac{g}{2} \left[- \frac{p^3}{1-p^2} - \right.\right.$$

$$-\frac{q^3}{1-q^2}+\mathbf{pq}\left(\frac{p}{1-p^2}+\frac{q}{1-q^2}\right)\Big]\Big\}. \tag{16}$$

Если $m_1>0$ и $m_2=0$, то

$$(PQ)=m_1(1-p^2)^{-1/2}Q_0\left[1-\mathbf{pq}+\frac{g}{2}\left(1-\frac{p^3}{1-p^2}+\mathbf{pq}\,\frac{p}{1-p^2}\right)\right]=$$

$$=m_1(1-p^2)^{-1/2}\,|\mathbf{Q}|\left\{1-\mathbf{pq}+\frac{g}{2}\left[-\frac{p^3}{1-p^2}+\mathbf{pq}\left(1-\frac{p}{1-p^2}\right)\right]\right\}, \tag{17}$$

где $\mathbf{pq}=\delta^{ab}p_aq_b$ и $|\mathbf{Q}|=\sqrt{\delta^{ab}q_aq_b}$. Если $m_1=0$ и $m_2=0$, то

$$(PQ)=P_0Q_0-\mathbf{PQ}+gP_0Q_0=P_0Q_0(1-\mathbf{pq}+q)=|\mathbf{P}|\,|\mathbf{Q}|\,(1-\mathbf{pq}-g\mathbf{pq}). \tag{18}$$

Свертка (10) аппроксимируется $O(g)$-представлением

$$(ky)=k_0y^0+k_ay^a+\frac{1}{2}g\left[y^0\,|\mathbf{k}|-k_0\,|\mathbf{y}|+\right.$$

$$\left.+(k_0y^0+k_ay^a)\ln\left(\frac{y^0+|\mathbf{y}|}{y^0-|\mathbf{y}|}\,\frac{k_0+|\mathbf{k}|}{k_0-|\mathbf{k}|}\right)\right], \tag{19}$$

а свертка (11) — $O(g)$-представлением

$$(ky)=k_0y^0+k_ay^a+\frac{1}{2}g\left[-k_0\,|\mathbf{y}|+(k_0y^a+k_ay^a)\ln\frac{y^0+|\mathbf{y}|}{y^0-|\mathbf{y}|}\right]. \tag{20}$$

Свертка (12) оказалась «инвариантной» относительно финслерова обобщения, и она не получает никаких поправок по параметру g.

4. F-инвариантное обобщение закона сохранения импульса

В любой теории, основывающейся на линейных преобразованиях инвариантности, в том числе в обычной специальной теории относительности (основывающейся на инвариантности относительно линейных преобразований Лоренца), сумма четырехмерных векторов является инвариантным понятием. В частности, если P_R и Q_R — два четырехмерных ковариантных вектора, а L_P^Q — коэффициенты преобразований Лоренца, то преобразования $\overline{P}_R=L_R^T P_T$ и $Q_R=L_R^T P_T$ влекут за собой $\overline{(P_R+Q_R)}=L_R^T(P_T+Q_T)$. Последнее свойство, однако, нарушается, если преобразования являются нелинейными, т. е. имеют вид

$$\overline{P}_R=Y_R^T(P)\,P_T,\quad \overline{Q}_R=Y_R^T(Q)\,Q_T,$$

как это имеет место при рассматриваемом финслеровом подходе. Такое нарушение мы символически запишем как

$$\overline{P_R+Q_R}\neq\overline{P}_R+\overline{Q}_R. \tag{21}$$

Пусть P_R и Q_R являются четырехмерными импульсами частиц с массами покоя m_1 и m_2, так что справедливо (13). Вследствие (21) обычный закон сохранения суммы P_R+Q_R не может иметь инвариантного смысла относительно F-преобразований. Необходимое F-инвариантное обобщение однозначно находится после обращения к факту, что N_4-пространство инвариантно относительно линейных преобразований (а именно относительно преобразований Лоренца), так что в

N_4 сохраняться должна сумма векторов $t_R(P)$ и $t_R(Q)$. Таким образом, мы приходим к следующему выводу.

Предложение 1. F-инвариантный закон сохранения четырехмерных импульсов имеет вид

$$t_R(P)+t_R(Q)=\textit{сохраняющаяся величина.} \tag{22}$$

Представления (14)—(15) определяют явно $O(g)$-поправки, которые задает обобщенный закон (22) к обычному закону сохранения суммы импульсов.

5. Обсуждение

В пространстве N_4 финслеровы поправки пропорциональны g^2 (см. Предложение 3 в [1]), но само преобразование $t^P=t^P(y)$ содержит поправки, пропорциональные g. Поэтому справедливо

Предложение 2. $O(g)$-поправки в F_4 являются результатом самого перехода из N_4 в F_4.

Если мы начнем формулировку уравнений фундаментальных физических полей в F_4, например рассмотрим уравнение

$$j^{-4}(y)\frac{\partial}{\partial y^P}\left[j^4(y)\,a^{PQ}(y)\frac{\partial}{\partial y^Q}\varphi(y)\right]+m^2\varphi(y)=0 \tag{23}$$

для скалярного поля $\varphi(y)$ в F_4, то мы немедленно заметим, что справедливо

Предложение 3. Если учитывать финслеровы поправки только на $O(g)$-уровне, то для уравнений фундаментальных физических полей будет выполняться принцип линейной суперпозиции решений и для уравнений свободной волны будет справедливо

$$\varphi\sim e^{i(ky)}, \tag{24}$$

где (ky) — свертка, даваемая формулами (19)—(20) и (12).

Действительно, преобразование уравнения (23) в N_4 дает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t^P}\left[(e^{PQ}-\frac{1}{4}g^2A^{-2}S^{-2}t^Pt^Q)\frac{\partial}{\partial t^Q}\varphi(t)\right]+m^2\varphi(t)=0 \tag{25}$$

(см. (23) в [1]) для функции $\varphi(t)=\varphi(y(t))$, которое не содержит финслеровых поправок на $O(g)$-уровне рассмотрений.

Сравнивая (24) с (19)—(20), мы видим, что финслерова кривизна пространства F_4 проявляет себя в том, что *фронт свободной волны перестает быть плоским, а становится некоторой искривленной поверхностью* (мы опишем его подробно в другой работе). Это же обстоятельство можно считать причиной того, что закон сохранения импульса модифицируется согласно (22). Такая модификация — несколько неожиданное, но строгое следствие F-инвариантного финслерова подхода. Сохраняется не сумма первичных физических импульсов, а сумма их N_4-образов, т. е. образов, получаемых в результате перехода от F-инвариантного финслерова пространства F_4 к «скрытому» лоренц-инвариантному пространству N_4.

Уравнение (25) явно лоренц-инвариантно. Прямым следствием этого факта является F-инвариантность уравнения (23). Таким образом, мы видим, что прямое обобщение уравнений фундаментальных физических полей на случай финслерова пространства F_4 ведет к F-инвариантному результату, а именно к такому обобщению, в котором реализуется следующий

F-принцип. Вместо обычной лоренц-инвариантности действует нелинейная лоренц-инвариантность (описанного выше F-типа).

ЛИТЕРАТУРА

1. Асанов Г. С.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 2. С. 8. (Moscow University Phys. Bull. 1996. N 2).

Поступила в редакцию
21.04.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 4

УДК 539.143.43

МЕТОД ПРОЕКЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ В КОРРЕЛЯЦИОННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ ЯМР

В. С. Туманов

(кафедра радиофизики)

С помощью метода проекционных операторов получены общие формулы для частот, интенсивностей и фазовых факторов двумерных спектров первого порядка в корреляционной спектроскопии ядерного магнитного резонанса, соответствующих импульсному процессу $(\pi/2)_x - t_1 - (\pi/2)_x - t_2$.

1. Введение

В работах [1, 2] был предложен метод проекционных операторов для расчета импульсных процессов ЯМР и рассмотрены некоторые его применения. В настоящей работе этот метод применяется для расчета общих формул двумерной корреляционной спектроскопии ЯМР (COSY), относящихся к произвольным спектрам первого порядка.

Отметим, что в случае спектров первого порядка метод проекционных операторов не является единственно возможным. Действительно, оператор спин-спиновой связи можно представить в виде суммы выражений $J_{jk}I_{jz}I_{kz}$, где I_j и I_k — не суммарные, а индивидуальные спины ядер (предполагается, что они равны 1/2). При этом, как известно, достаточно учесть только взаимодействие между неэквивалентными ядрами. После этого свободная эволюция каждого спина определяется формулой

$$\exp\{-iJ_{jk}I_{jz}I_{kz}t\}\, I_{kx} \exp\{iJ_{jk}I_{jz}I_{kz}t\} = \\ = I_{kx}\cos(J_{jk}t/2) + 2I_{jz}I_{ky}\sin(J_{jk}t/2) \tag{1}$$

и аналогичной формулой для I_{ky}. Равенство (1), справедливое для спинов 1/2, может быть получено разными способами (например, с помощью соотношений коммутации). Основная задача здесь состоит в том, чтобы учесть все комбинации взаимодействий, число которых может быть велико.

Метод проекционных операторов, помимо его универсальности, имеет то преимущество, что, оперируя с суммарными спинами, упрощает получение общих формул. Это, в частности, иллюстрируется и расчетами данной статьи. Используемые здесь обозначения стандартные и совпадают с обозначениями статей [1, 2].