$$\Omega_1 = \omega_1 + J_{12} m_2 + \sum_{k \neq 1,2} J_{1k} m_k ,$$
$$\Omega_2 = \omega_1 + J_{12} m_2' + \sum_{k \neq 1,2} J_{1k} m_k . \qquad (23)$$

Суммирование по I_k сводится к умножению на число возможных вариантов для заданного значения m_k. В итоге линии с частотами (23) имеют следующие интенсивности:

$$p_1 2^{p_1 - p_2 - 2} \binom{p_2}{p_2/2 + m_2'} \prod_{k \neq 1} \binom{p_k}{p_k/2 + m_k} . \qquad (24)$$

Полученные формулы дают полное теоретическое описание рассмотренного процесса в случае произвольных спектров первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Туманов В. С.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1993. № 5. С. 21 (Moscow University Phys. Bull. 1993. N 5. P. 18).
2. Туманов В. С.//Там же. 1993. № 6. С. 3. (Ibid. 1993. N 6. P. 1).
3. Эрнст Р., Боденхаузен Дж., Вокаун А. ЯМР в одном и двух измерениях. М., 1990.
4. Туманов В. С. Введение в теорию спектров ЯМР. М., 1988.

Поступила в редакцию
10.11.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 4

УДК 539.12.01

О СООТНОШЕНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ШРЕДИНГЕРА

Ю. И. Воронцов

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

Исследованы особенности состояний, на которых в соотношении неопределенностей Шрёдингера $\Delta^2 A \Delta^2 B \geqslant (\hbar^2/4) |\langle C \rangle|^2/(1-r^2)$ ($\widehat{C} = [\widehat{A}, \widehat{B}]/i\hbar$, r — коэффициент корреляции $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$) имеет место знак равенства. Показано, что если независимо от состояния можно получить $\langle C \rangle = 0$ путем простого изменения начала отсчета, то состояние $|\Psi\rangle$, удовлетворяющее равенству в соотношении Шрёдингера, является собственным состоянием оператора $\widehat{A}$ или $\widehat{B}$ и не соответствует аналитическому решению уравнения $\widehat{A}|\Psi\rangle = \alpha \widehat{B}|\Psi\rangle$ (α — c-число). Показано, что в случае $\widehat{A} = \widehat{p}^2$, $\widehat{B} = \widehat{x}$ состояние, на котором асимптотически выполняется равенство $\Delta^2 p^2 \Delta^2 x = (\hbar^2/4) |\langle \widehat{p} \rangle|^2$, можно рассматривать как предел гауссовского при $\Delta p \to 0$.

Соотношение Гейзенберга между дисперсиями координаты и импульса

$$\Delta^2 x \Delta^2 p \geqslant \hbar^2/4 \qquad (1)$$

с годами усложнялось и обобщалось. Было доказано, что для любых эрмитовых операторов A и B справедливо соотношение

$$\Delta^2 A \Delta^2 B \geqslant (\hbar^2/4) \, |\langle C \rangle|^2/(1-r^2), \qquad (2)$$

где

$$\widehat{C} \equiv [\widehat{A}, \widehat{B}]/i\hbar, \qquad (2а)$$

$$r = \Delta(AB)/(\Delta A \Delta B) \text{ — коэффициент корреляции,}$$

$$\Delta(AB) = \langle \widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B}\widehat{A} \rangle/2 - \langle \widehat{A} \rangle \langle \widehat{B} \rangle.$$

Соотношение (2), называемое в ряде работ соотношением Шрёдингера, впервые получено Робертсоном [1] и Шрёдингером [2], затем оно неоднократно «переоткрывалось».

Обоснование соотношения (2), можно сказать, тривиально, но оно справедливо только на таких состояниях, на которых операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ эрмитовы. Поэтому в случае собственных состояний одного из этих операторов соотношение (2) формально теряет силу [3—5]. (Нарушение эрмитовости, например, $\widehat{B}$ относительно $\widehat{A}|b\rangle$, где $|b\rangle$ — собственный вектор $\widehat{B}$, легко доказывается от противного. Если

$$\langle b|\widehat{A}\widehat{B}|b\rangle = \langle b|\widehat{A}|b\rangle b \text{ и } \langle b|\widehat{B}\widehat{A}|b\rangle = b\langle b|\widehat{A}|b\rangle,$$

то $\widehat{C}=0$, что противоречит условию (2а)).

Для определения состояний с минимальной неопределенностью (на которых в (2) имеет место знак равенства) можно использовать или так называемый прямой метод, или аналитический [5]. Первый исходит из условия коллинеарности векторов $\widehat{A}|\Psi\rangle$ и $\widehat{B}|\Psi\rangle$ и сводится к решению уравнения

$$\widehat{A}|\Psi\rangle = \alpha_1 \widehat{B}|\Psi\rangle, \qquad (3)$$

где α_1 есть c-число. Второй исходит из формализма Эйлера—Лагранжа и приводит к решению уравнения более высокого порядка, чем (3):

$$[\widehat{A}^2/\Delta^2 A + \widehat{B}^2/\Delta^2 B - 2\widehat{C}/\langle C \rangle]\,|\Psi\rangle = 0. \qquad (4)$$

(Случай $\langle C \rangle = 0$ не рассматривается.)

Вследствие условия нормировки множество функций $|\Psi\rangle$ некомпактно, поэтому произведение неопределенностей может не достигать минимума и не будет нормируемых решений уравнений (3) и (4) [5].

В качестве примера решения уравнений (3), (4) обычно дают вывод состояния с минимальной неопределенностью координаты и импульса ($\widehat{C} = \widehat{1}$).

Проблема состояния с минимальной неопределенностью в случае, когда величина $\langle C \rangle$ может быть сделана равной нулю путем простого изменения начала отсчета, до сих пор не рассматривалась. Этот случай выделен в связи со следующими соображениями. Поскольку при $\langle C \rangle = 0$ одна из дисперсий в (2), например $\Delta^2 B$, должна быть равна нулю, то это должно быть собственным состоянием оператора $\widehat{B}$. Но на таких состояниях необоснованным считается само соотношение (2). Изменив начало отсчета величины C, получим $\langle C \rangle \neq 0$. Значит ли это, что теперь это состояние не будет собственным для $\widehat{B}$? Соответствует ли в этом случае состояние с минимальной неопределенностью решению уравнений (3), (4)?

Покажем вначале «работоспособность» уравнения (3) в случае, если все собственные значения C неотрицательные, т. е. $\langle C \rangle = 0$ может быть только на соответствующем собственном состоянии оператора $\widehat{C}$. Пусть $\widehat{A} = \widehat{x}$ ($\langle x \rangle = 0$), $\widehat{B} = \widehat{p}^3$ ($\langle p \rangle = 0$) и, следовательно, $\widehat{C} = 3\widehat{p}^2$. Тогда из (3) в p-представлении следует

$$i\hbar\partial\varphi(p)/\partial p = \alpha_1 p^3 \varphi(p). \qquad (5)$$

Упростим расчеты, считая α_1 чисто мнимой величиной, что исключает корреляцию x и p^3 в искомом состоянии.

Положив $\alpha_1 = -i\alpha$, получим из (5)

$$\varphi(p) = I_3 \exp[-\alpha p^4/4\hbar], \tag{6}$$

$$I_3^2 = 2^{3/4}[(\hbar/\alpha)^{1/4}\Gamma(1/4)], \tag{7}$$

где

Γ — гамма-функция.

Этому состоянию соответствуют дисперсии

$$\Delta^2 p^3 = I_3^2 (\hbar/\alpha)^{7/4} 2^{3/4} \Gamma(7/4) = \langle p^6 \rangle, \tag{8}$$

$$\Delta^2 x = \langle x^2 \rangle = \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\partial\varphi(p)/\partial p|^2 dp = \hbar^2 \langle p^6 \rangle (\alpha/\hbar)^2, \tag{9}$$

$$\langle p^2 \rangle = I_3^2 (\hbar/\alpha)^{3/4} 2^{-1/4} \Gamma(3/4),$$

$$\langle p^6 \rangle = \langle p^2 \rangle (\hbar/\alpha) 2\Gamma(7/4)/\Gamma(3/4) \tag{10}$$

и, следовательно,

$$\Delta^2 x \Delta^2 p^3 = \alpha^2 \langle p^6 \rangle^2 = (\hbar^2/4)\, 9 \langle p^2 \rangle^2 = (\hbar^2/4)\, |\langle [\hat{x}, \hat{p}^3]/i\hbar \rangle|^2.$$

Равенство (2) доказано. Подтверждается, что функция (6), являющаяся решением уравнений (3) и (4), соответствует состоянию с минимальной неопределенностью.

Сделаем аналогичные вычисления в случае $\hat{A} = \hat{x}$, $\hat{B} = \hat{p}^2$, полагая $\langle x \rangle = 0$, $\langle p^2 \rangle = \overline{p^2}$, $\alpha_1 = -i\alpha$. Будем искать состояние, в котором

$$\Delta^2 x \Delta^2 p^2 = \hbar^2 |\langle p \rangle|^2. \tag{11}$$

Уравнение (3) в данном случае будет иметь следующий вид:

$$i\hbar\partial\varphi/\partial p = -i\alpha(p^2 - \overline{p^2})\varphi. \tag{12}$$

Его решением является функция

$$\varphi(p) = I_2 \exp[-\alpha(p^3/3 - p\overline{p^2})/\hbar]. \tag{13}$$

Эта функция не входит в гильбертово пространство, поскольку не имеет предела при $p \to \infty$.

Существует мнение [5], что границы справедливости уравнения (4) шире, чем границы уравнения (3). В данном случае решение (13) уравнения (3) в форме (12) является решением уравнения (4) в форме

$$[(\hat{p}^2 - \overline{p^2})^2/a^2 - (\hbar^2/b^2)\partial^2/\partial p^2 - 2p/\langle p \rangle]\varphi(p) = 0, \tag{14}$$

если

$$a^2 b^2 = \hbar^2 \langle p \rangle^2, \tag{15}$$

где a и b — некоторые константы, которые должны были бы быть соответствующими дисперсиями. Прямое решение уравнения (14) легко находится в форме $\varphi(p) = \exp[f(p)]$, где $f(p) = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p^3 + \ldots$. Эта функция будет решением уравнения (14), если выполняется условие (15) и $\alpha_{n>3}=0$, $\alpha_3=\pm(b^2/a^2\hbar^2)^{1/2}/3$, $\alpha_1=-3\bar{p}^2\alpha_3$, $\alpha_2=0$. Вид такого решения совпадает с решением (13).

Условие (15) совпадало бы с равенством (11), если бы a^2 и b^2 совпадали с соответствующими дисперсиями Δ^2p^2 и Δ^2x. Однако в данном случае это не так, поскольку функция (13) не нормируется. Этот случай можно считать подтверждением изложенного выше предположения, что уравнения (3), (4) могут не иметь решений в классе нормируемых функций.

Может возникнуть следующий вопрос. Поскольку нас должно интересовать распределение p^2, а не p, то, может быть, искомому состоянию отвечает нормируемая функция

$$\varphi(p)=I_2\exp[-\alpha(|p|^3/3-|p|\,\overline{p^2})/\hbar],$$

являющаяся решением уравнения (12) при $p\geqslant 0$? Соответствующая функция распределения $w(p)$ импульса будет двугорбой, симметричной относительно нуля ($\langle p\rangle=0$). В результате получим

$$\langle p^2\rangle\equiv\int_{-\infty}^{\infty}p^2w(p)\,dp=2\int_0^{\infty}p^2I_2^2\exp[-2\alpha(p^3/3-p\overline{p^2})/\hbar]\,dp=I_2^2\hbar/\alpha+\overline{p^2}. \tag{16}$$

Соотношение (16) удовлетворяет исходному условию $\langle p^2\rangle=\overline{p^2}$ только асимптотически при $\alpha\to\infty$. При этом будет $\Delta^2p^2\to 0$. Будет ли в этом случае стремиться к нулю левая часть в (11)?

Вычисление дисперсий Δ^2p^2 и Δ^2x при конечном значении α показывает, что в этом случае

$$\Delta^2x\Delta^2p^2=\hbar^2(\langle|p|\rangle\alpha/\hbar-\overline{p^2}I_2^2\alpha/\hbar)\ \ (\langle|p|\rangle\hbar/\alpha-\langle p^2\rangle I_2^2\hbar/\alpha). \tag{17}$$

Из условия нормировки функции $\varphi(p)$ следует, что при $\alpha\to\infty$ будет $I_2^2\to 0$. Следовательно, при $\alpha\to\infty$ получим

$$\Delta^2x\Delta^2p^2\to\hbar^2\langle|p|\rangle^2. \tag{17a}$$

Здесь правая часть соотношения не равна нулю, как это должно было бы быть согласно соотношению (11).

Может быть, неточно соотношение (2) и в нем следует заменить $\langle C\rangle$ на $\langle|C|\rangle$, как, например, это сделано в [6]? Но, как видно из (17), при конечном значении α оказывается, что $\Delta^2x\Delta^2p^2<\hbar^2\langle|p|\rangle^2$.

Таким образом, обычный путь поиска состояния с минимальной неопределенностью в этом случае не дал искомого результата. Но искомое состояние легко находится окольным путем.

В общем случае справедливо соотношение

$$\Delta^2p^2=4\langle p\rangle^2\Delta^2p+\Delta^4p-(\Delta^2p)^2, \tag{18}$$

где $\Delta^4p=\langle(p-\langle p\rangle)^4\rangle$. Оно следует из очевидных соотношений

$$\langle p^4\rangle=\langle(\langle p\rangle+\delta p)^4\rangle=\langle p\rangle^4+6\langle p\rangle^2\Delta^2p+\Delta^4p,$$

$$\langle p^2\rangle^2=\langle p\rangle^4+2\langle p\rangle^2\Delta^2p+(\Delta^2p)^2.$$

Следовательно,

$$\Delta^2x\Delta^2p^2=4\langle p^2\rangle\Delta^2p\Delta^2x+\Delta^2x[\Delta^4p-(\Delta^2p)^2]. \tag{19}$$

Соотношение (19) переходит в соотношение (11) при $\Delta^2x\Delta^2p=\hbar^2/4$ (т. е. на чистых гауссовских состояниях) и при $\Delta^2x[\Delta^4p-(\Delta^2p)^2]=0$.

Соответствующее состояние можно рассматривать как предел гауссовского при $\Delta p \to 0$.

Соотношение (19) в случае гауссовских состояний можно представить в следующем виде:

$$\Delta^2 x \Delta^2 p^2 = \hbar^2 (\langle p^2 \rangle + \langle p \rangle^2)/2. \tag{20}$$

При $\Delta^2 p \to 0$ будет $\langle p^2 \rangle \to \langle p \rangle^2$.

Подчеркнем, что равенство (20) имеет место на чистых гауссовских состояниях, но здесь не доказано, что величина произведения $\Delta^2 x \Delta^2 p^2$ на этих состояниях имеет минимальное значение и в том случае, когда $\Delta^2 p \neq 0$.

Таким образом, состояние, на котором в соотношении (11) может иметь место знак равенства, характерно тем, что на нем $\Delta^2 p^2 \to 0$, $\Delta^2 x \to \infty$, $\Delta^2 p \Delta^2 x \to \hbar^2/4$.

Обратим внимание на то, что в этом состоянии $\Delta^2 p^2 \to 0$, $\Delta^2 x \to \infty$ как при $\langle p \rangle = 0$, так и при $\langle p \rangle \neq 0$. Но, как видно из соотношения (18), величина $\Delta^2 p^2$ при $\Delta^2 p \to 0$ имеет второй порядок малости, если $\langle p \rangle = 0$, а при $\langle p \rangle \neq 0$ — первый. Поэтому и во втором случае произведение $\Delta^2 x \Delta^2 p^2$ имеет конечное значение. Заметим, что гауссовское состояние со сколь угодно малым значением Δp отличается от собственного состояния оператора импульса тем, что на нем сохраняется эрмитовость оператора $\hat{p}$ относительно $\hat{x} | p \rangle$.

Гауссовское состояние асимптотически соответствует также состоянию с минимальным произведением

$$\Delta^2 p^{2n} \Delta^2 x = (\hbar^2/4)(2n)^2 \langle p^{2n-1} \rangle^2, \tag{21}$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$.

Например, при $n=2$ имеем

$$\Delta^2 p^4 = 16 \langle p \rangle^6 \Delta^2 p + \text{члены порядка } (\Delta^2 p)^2,\ \Delta^4 p,\ \Delta^6 p,\ \Delta^8 p,$$

$$\langle C \rangle^2 = 16 \langle p^3 \rangle^2 = 16 \langle p \rangle^6 + 6 \langle p \rangle^4 \Delta^2 p + 9 \langle p \rangle^2 (\Delta^2 p)^2.$$

При $\Delta^2 p \to 0$ будет $\langle C \rangle^2 \to 16 \langle p \rangle^6$, и, следовательно, в случае чистого гауссовского состояния получим при $\Delta^2 p \to 0$

$$\Delta^2 p^4 \Delta^2 x \to (\hbar^2/4) \langle C \rangle^2.$$

Очевидно, что все вышесказанное справедливо и в случае замены $\hat{p}$ на $\hat{x}$ и $\hat{x}$ на $\hat{p}$.

Исходя из этих частных примеров, можно сделать следующее предположение. Если правая часть соотношения (2) может быть сделана равной нулю за счет изменения начала отсчета величины C, то знак равенства в этом соотношении может иметь место только на собственных состояниях оператора $\hat{A}$ или $\hat{B}$.

Проведенный анализ показывает также, что, когда знак равенства в соотношении (2) имеет место только на собственном состоянии оператора $\hat{A}$ или $\hat{B}$, уравнения (3) и (4) теряют силу.

Поскольку собственные состояния любых операторов практически нереализуемы, полезно было бы найти уравнение, определяющее состояние с минимальным произведением неопределенностей при конечных значениях $\Delta^2 A$ и $\Delta^2 B$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Robertson H. P.//Phys. Rev. 1930. A35, N 5. P. 667.
2. Schrödinger E.//Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin, 1930. S. 296 (Русский перевод:

Шрёдингер Э. Избранные труды по квантовой механике. М., 1976. С. 210).
3. Елютин П. В., Кривченков В. Д. Квантовая механика. М., 1976.
4. Davidson E. R.//J. Chem. Phys. 1965. 42. P. 1491.
5. Carruthers P., Nieto M.//Rev. Mod. Phys. 1968. 40, N 2. P. 411.
6. Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч. Квантовая механика. М., 1979.

Поступила в редакцию
20.11.95

02.11.94г

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 4

УДК 539.12.01

АННИГИЛЯЦИЯ ПАРЫ e^+e^- В АДРОНЫ В МОДЕЛЬНОМ ХРОМОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ГЛЮОННОГО ВАКУУМНОГО КОНДЕНСАТА

В. Ч. Жуковский, А. Е. Григорук, И. В. Мамсуров

(кафедра теоретической физики)

Рассмотрен процесс рождения кварк-антикварковых пар массивным фотоном в постоянных хромомагнитных полях, моделирующих поле глюонного конденсата. Выявлены пороги рождения пар и вычислена вероятность их рождения как функция напряженности конденсата поля. В случае относительно слабых полей при больших энергиях e^+e^- оценен вклад глюонного конденсата в сечение рождения кварковых пар. Указано на неаналитическую зависимость сечения от поля конденсата, проявляющуюся вблизи порогов рождения кварковых пар.

Сложная непертурбативная структура вакуума квантовой хромодинамики (КХД) сегодня ни у кого не вызывает сомнений. Основной чертой такого вакуума является наличие кваркового ($\langle\bar{\psi}\psi\rangle\neq0$) [1] и глюонного $\left(\left\langle\frac{\alpha_s}{\pi}G^2_{\mu\nu}\right\rangle\neq 0\right)$ конденсатов [2]. Однако относительная роль различных вакуумных флуктуаций в формировании структуры вакуума еще не ясна окончательно. Поэтому представляет интерес исследовать различные модели вакуума КХД и в выбранном приближении учитывать поправки, связанные с ненулевыми вакуумными средними глюонных полей, к хорошо известным и рассчитанным по теории возмущений процессам [3].

Очень часто для цветового вакуумного поля принимается упрощенное описание, предложенное в [4], которое неоднократно использовалось в различных феноменологических моделях (см., напр., [5, 6]). Считается, что вакуум, подобно ферромагнетику, состоит из ячеек размера $R\sim(1/\Lambda)$, $\Lambda\approx100\div300$ МэВ, внутри каждой из которых хромомагнитное (цветовое) поле имеет одинаковую величину и направление. Цветовое поле изменяется в пространстве (при переходе от одной ячейки к другой) и во времени (характерное время $\tau\sim(1/\Lambda)$), так что можно считать, что среднее значение его напряженности $\langle 0|G_{\mu\nu}|0\rangle=0$, но $\left\langle 0\left|\frac{\alpha_s}{\pi}G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu}\right|0\right\rangle=(330\ \text{МэВ})^4$ [2].

Предполагается, что действием вакуумного поля на партоны (кварки) внутри частиц можно пренебречь и учитывать действие цветового поля на партоны (кварки) следует лишь в моменты рассеяния. При больших энергиях и передачах импульса можно ожидать, что характерное время взаимодействия и размеры области взаимодействия оказываются значительно меньшими $1/\Lambda$ и, таким образом, рассеяние происходит в постоянном хромомагнитном поле.