КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958:532.5

ОБ ОДНОМ ВИДЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

М. Б. Тверской

(кафедра математики)

Найден новый класс решений точной системы уравнений динамики стратифицированной жидкости, описывающих круговые нелинейные поперечные установившиеся волны. Выведено приближенное уравнение для профиля этих волн, а также нелинейное дисперсионное соотношение.

В последнее время значительное внимание уделяется разработке проблем, связанных с изучением динамики стратифицированной жидкости. Исследованию корректности возникающих при этом задач математической физики посвящено большое количество работ, среди которых отметим монографии [1, 2]. Проблема же нелинейных волн в стратифицированной жидкости в строгом рассмотрении на сегодня практически не исследована, причем если для двумерного случая все же имеются отдельные достаточно содержательные результаты, связанные с изучением стационарного уравнения Дюбрейль—Жакотен [3—9], то точной теории стратифицированной жидкости в трехмерном случае нет.

Обратимся к постановке задачи. Рассмотрим два бесконечных коаксиальных цилиндра различных радиусов R_1, R_2, оси которых совпадают с направленной вверх осью z цилиндрической системы координат r, φ, z ($\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ — соответствующие орты).

Для определенности будем считать, что $R_2>R_1$, причем возможны предельные случаи $R_1=0$, $R_2=\infty$. Пусть пространство между этими цилиндрами заполнено идеальной несжимаемой экспоненциально-стратифицированной жидкостью, т. е. жидкостью, плотность которой в стационарном состоянии представима в виде $\rho_0=\sigma e^{-\beta z}$, где $\beta>0$ — константа, характеризующая масштаб стратификации. Точные уравнения динамики такой жидкости имеют вид [8, 9]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-\mathbf{e}_z g, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla\rho)=0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — вектор скорости, ρ — плотность жидкости, p — давление, g — ускорение свободного падения. Система (1)—(3) имеет следующее тривиальное решение:

$$\mathbf{v}=0,\quad p=\frac{\sigma g}{\beta}e^{-\beta z},\quad \rho=\sigma e^{-\beta z}.$$

Будем искать нетривиальные решения этой системы, ответвляющиеся от тривиального, в виде поперечной круговой волны, т. е. в виде

$$\mathbf{v}=u(\xi)\,\mathbf{e}_z, \quad \xi=\varphi-\omega t,$$

$$p=\frac{\sigma g}{\beta}\,e^{-\beta z}, \quad \rho=\sigma e^{-\beta z+\Psi(\xi)}. \tag{4}$$

Отметим, что при этом уравнение поверхностей равной плотности имеет вид $z=\frac{1}{\beta}\Psi(\xi)+\mathrm{const}$.

После подстановки (4) в (1)—(3) уравнение (3) удовлетворено тождественно, а уравнения (1), (2) примут вид

$$-\omega u'=g\,(e^{-\Psi}-1), \quad \omega\Psi'+\beta u=0.$$

Исключая из этих уравнений функцию u, приходим к уравнению для Ψ:

$$\omega^2\Psi''=\omega_0^2\,(e^{-\Psi}-1). \tag{5}$$

Здесь $\omega_0^2\equiv(\beta g)^{1/2}$ — частота Вяйсяля—Брента. Вводя обозначение

$$\mu\equiv\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2, \tag{6}$$

перепишем (5) в виде

$$\Psi''=\mu\,(e^{-\Psi}-1). \tag{7}$$

В соответствии со смыслом задачи нас интересуют только 2π-периодические решения (7). Вопрос о существовании малых решений такого типа решается положительно, что легко показывается на основе методов классической теории ветвления решений нелинейных уравнений [10]. Рассматривая для определенности только класс четных функций $\Psi(\xi)$, убеждаемся, что точки $\mu_k=k^2$ являются точками бифуркации уравнения (7). Если представить параметр μ в виде $\mu=k^2(1+\delta)$, где δ — некий малый положительный параметр, то нетривиальное решение уравнения (7) можно записать в виде ряда по степеням $\delta^{1/2}$:

$$\Psi(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\xi)\,\delta^{k/2}, \quad a_1=\left(\frac{24}{7}\right)^{1/2}\cos k\xi.$$

Вводя новый амплитудный параметр a по формуле $a=\sqrt{(24/7)\delta}$, запишем приближенное уравнение для линий равной плотности:

$$\beta z=a\cos k\,(\varphi-\omega t)+\frac{2}{7}\,a^2\,[3-2\cos(2k\,(\varphi-\omega t))]+O\,(a^3), \tag{8}$$

а также получаемое из (6) нелинейное дисперсионное соотношение для этих круговых волн:

$$|\omega|=\frac{\omega_0}{k}\left(1-\frac{7}{48}\,a^2+O\,(a^4)\right).$$

Отметим характерные особенности решений, найденных выше в рамках точной теории нелинейных внутренних волн.

1. Волны распространяются по кругу в горизонтальных плоскостях, являются поперечными, и их профиль не зависит от вертикальной координаты z.

2. Как следует из (8), колебания жидкости при прохождении волны происходят около горизонтального среднего уровня, расположен-

ного на высоте $h=6a^2/(7\beta)+O(a^3)$ относительно невозмущенного, что представляет собой типично нелинейный эффект.

3. Существование таких волн обусловлено наличием стратификации: при $\omega_0=0$ они не имеют места.

Автор благодарит А. Г. Свешникова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габов С. А., Свешников А. Г. Задачи динамики стратифицированной жидкости. М., 1986.
2. Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М., 1990.
3. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., 1977.
4. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
5. Ии Чиа-шун//Нелинейные волны. М., 1977.
6. Габов С. А., Тверской М. Б.//ЖВМиМФ. 1988. **28**, № 4. С. 608.
7. Габов С. А.//ДАН. 1988. **305**, № 5. С. 1036.
8. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977.
9. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М., 1982.
10. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., 1969.

Поступила в редакцию
15.01.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 4

РАДИОФИЗИКА

УДК 621.385.6

МЕТОД РАСЧЕТА ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПЛОСКОГО ОНДУЛЯТОРА

В. А. Кубарев

(кафедра физической электроники)

Методика, основанная на использовании потенциалов для периодических систем линейных зарядов, позволяет получить точные выражения для параметров электростатического ондулятора. Рассмотрена и оптимизирована конструкция продольно-поперечного типа с овальными и гофрированными электродами.

В зависимости от направления вектора электрического поля относительно плоскости симметрии электростатического ондулятора (ЭСО), в которой транспортируется электронный пучок, ондуляторы можно разделить на поперечные (поле перпендикулярно плоскости симметрии), продольные (поле в плоскости симметрии) и продольно-поперечные (присутствуют обе компоненты поля). Конструктивно это определяется геометрией электродов и распределением потенциалов на них.

Интерес к ЭСО связан с тем, что, во-первых, поперечные ЭСО могут использоваться для формирования винтовых релятивистских электронных пучков в СВЧ-устройствах с поперечным взаимодействием [1, 2]. Во-вторых, рассматриваются возможности применения продольных ЭСО в электростатических лазерах на свободных электронах [3]. В-третьих, ЭСО перспективны в качестве совмещенных ускоряюще-фокусирующих структур в линейных ускорителях электронов и ионов ондуляторного типа [4].