ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12

КАЛИБРОВОЧНАЯ МОДЕЛЬ В ТЕОРИИ СУПЕРСТРУН

А. А. Вихорев, Б. И. Садовников

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

Предложена калибровочная модель суперструны, обладающей свойством самоподобия. С помощью регулярного представления группы движений спинорного многообразия и ее алгебры Ли получены уравнения для функции состояния и оператор Гамильтона. Решается самосогласованная краевая задача на собственные значения для построенного оператора Гамильтона. Найдены энергетические уровни, отвечающие относительному спектру масс заряженных лептонов $e^{\pm}$, $\mu^{\pm}$, $\tau^{\pm}$. Обнаружена возможная причина существования трех поколений элементарных фермионов.

В последние годы на основе ряда обобщающих исследований теории суперструн [1—5] была обоснована принципиальная возможность соединения понятия струны с теорией калибровочных полей и, как следствие, с топологическими свойствами пространства, возникающего в струнной теории. Именно тогда был предсказан новый класс суперсимметричных теорий Янга—Миллса [6], в которых калибровочное поле играет роль векторных переменных струны, связанных со спинорными переменными преобразованием суперсимметрии. Однако наиболее многозначным остается вопрос о конкретной взаимосвязи между самой струной и несомыми ею полями. Нашей целью является построение модели, в которой струны отождествляются с замкнутыми 1-цепями спинорного пространства, являющегося областью определения калибровочного поля и, следовательно, имеющего нетривиальную топологию.

Пространство в теории суперструн, как известно, является нераздельным комплексом спинорных и векторных (тензорных) величин. Бинарность вектор—спинор существенно асимметрична; спинорное пространство оказывается более фундаментальным объектом по сравнению с векторным [4]. Например, любая дифференциальная k-форма, заданная в спинорном пространстве, и ее интегралы по k-цепям обладают трансформационными свойствами тензорных величин.

Предлагаемая калибровочная модель суперструны основана на следующих положениях.

1. Мировая поверхность струны вложена в спинорное пространство C^D, которое в общем случае является гладким комплексным многообразием с критической размерностью D. Струна отождествляется с 1-цепью в пространстве C^D.

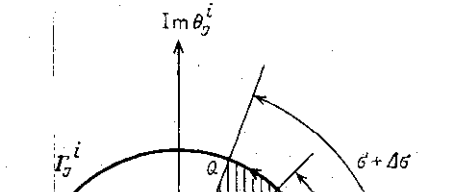
2. В спинорном пространстве C^D задана некоторая функция состояния: $\Phi(\theta, \sigma, \tau)$, $(\theta \in C^D;\ \sigma, \tau \in M^2)$, принадлежащая классу почти везде непрерывных и дифференцируемых функций и одновременно являющаяся элементом пространства представления калибровочной группы G. Таким образом, в пространстве C^D задана дифференциальная 1-форма калибровочной связности $\hat{A}(\theta) \in \mathrm{t}(g)$, где $\mathrm{t}(g)$ — представление алгебры Ли g группы G. Векторные величины вводятся в модель как интегралы 1-формы $\hat{A}(\theta)$ по замкнутым 1-цепям, которые отождествляются со струнами:

$$\widehat{X}_J(\sigma,\ \tau) \equiv \sum_{i=1}^{d} \lim_{\|\delta\Gamma_J^i\|\to 0} \frac{1}{\|\delta\Gamma_J^i(\sigma,\ \tau)\|} \oint_{\delta\Gamma_J^i(\sigma,\tau)} \widehat{A}_J(\theta;\ \tau),$$

где

$$\|\delta\Gamma_J^i\| \equiv \frac{i}{2} \int_{\delta C_J^i} d\bar{\theta}_J^i \wedge d\theta_J^i,\ \delta C_J^i \equiv \int \delta\Gamma_J^i,$$

площадь 2-цепи $\delta C_J{}^i(\sigma,\tau)$, ограниченной 1-цепью $\delta\Gamma_J{}^i(\sigma,\tau)$ и лежащей в комплексной плоскости координаты $\theta_J{}^i$ пространства $C_J{}^d \subset C^D$ (рисунок). Здесь $\widehat{X}_J(\sigma,\tau) = \widehat{\lambda}_a X_J{}^a$, где $\{\widehat{\lambda}_a\}$ — базис представления $\mathrm{t}(g)$, σ, τ — координаты на мировой поверхности струны.



Замкнутый путь OPQ есть 1-цепь $\delta\Gamma_J{}^i(\sigma,\ \tau)$, по которой интегрируется 1-форма калибровочной связности $\widehat{A}(\theta,\ \tau)$ при вычислении генератора $\widehat{X}_J(\sigma,\ \tau)$. Окружность $\Gamma^i{}_J$ представляет собой элемент остова Γ_J соответствующего бикруга. В пределе $\|\delta\Gamma^i{}_J\| \to 0$ сектор OPQ стягивается в отрезок при сближении точек Q, P на окружности $\Gamma^i{}_J$. Штриховкой изображена 2-цепь $\delta C^i{}_J(\sigma,\ \tau)$

Спинорное пространство C^D $(D=10)$ распадается в прямую сумму пяти так называемых структурных подпространств $C_J{}^d$ $(d=2)$, индентифицируемых индексом $J=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. В дальнейшем индексы $i,\ k,\ l=1,\ 2$ — это индексы комплексных координат структурного подпространства. Калибровочная группа $G=[U(1)\cup SU(2)]\otimes[U(1)\cup SU(2)]$, базис представления $\mathrm{t}(g)$ алгебры Ли g этой группы имеет вид

$$\widehat{\lambda}_a = \begin{pmatrix} \tau_a & 0 \\ 0 & -\tau_a \end{pmatrix},\ a=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

где τ_0 — единичная матрица, τ_1, τ_2, τ_3 — матрицы Паули. Диагональными являются операторы $\{\widehat{\lambda}_a\} = \{\widehat{\lambda}_0,\ \widehat{\lambda}_3\}$. Диагональные операторы обособляются в связи с принципиальной возможностью перехода к выделенной калибровке, в которой 2-форма калибровочного поля имеет вид $\mathcal{F}_J = \widehat{\lambda}_a F_J^a$.

3. Внутренние области мировых поверхностей замкнутых струн совпадают с носителем $\mathrm{supp}\,\mathcal{F}$ 2-формы калибровочного поля:

$$\mathcal{F} = \hat{d}\hat{A} + [\hat{A} \wedge \hat{A}]/2.$$

Благодаря данной предпосылке мировые поверхности замкнутых струн становятся поверхностями, ограничивающими поток калибровочного поля, поток формы $\mathcal{F}$, и, следовательно, приобретают свойства топологически нетривиальных объектов. При обходе по замкнутому пути, охватывающему такую поверхность, функция состояния $\Phi(\theta, \sigma, \tau)$, принадлежащая пространству представления калибровочной группы, в об-

щем случае не возвращается к исходному значению и оказывается многозначной. Требование однозначности функции состояния немедленно приводит к целочисленности потоков соответствующих компонент поля $\mathcal{F}$ [7].

4. Действие теории суперструн в данной модели следующее:

$$S=-\int d^2\sigma\delta^{\mathbf{JK}}\delta_{\dot a\dot b}\{T\partial^\alpha\overline{Z}^{\dot a}_{\mathbf{J}}\partial_\alpha Z^{\dot b}_{\mathbf{K}}+\frac{i}{2}\overline{\Psi}^{\dot a}_{\mathbf{J}}\gamma_\alpha\partial^\alpha\Psi^{\dot b}_{\mathbf{K}}\}, \tag{1}$$

где

$$\Psi^{\dot a}_{\mathbf{J}\pm}\equiv\psi^{\dot a}_{J_1\pm}+i\psi^{\dot a}_{J_2\pm},\quad Z^{\dot a}_{\mathbf{J}}\equiv X^{\dot a}_{J_1}+iX^{\dot a}_{J_2},$$

$\dot a, \dot b$ — индексы соответствующих диагональных операторов представления $\mathbf{t}(g)$, $\mathbf{J}, \mathbf{K}$ — индексы, нумерующие пары структурных подпространств и принимающие два значения, α, β — индексы координат мировой поверхности струны, T — масштабная постоянная, имеющая размерность квадрата длины (или обратного квадрата массы), γ_α — двумерные матрицы Дирака [6].

Действие (1) рассматривается как действие, описывающее совместные изменения геометрической конфигурации замкнутых струн и калибровочного поля $\mathcal{F}$. При этом спинорные переменные определяются через радиусы струн $\rho_J{}^l(\sigma,\tau)$:

$$\begin{pmatrix}\psi^{\dot a}_{J+}\\ \psi^{\dot a}_{J-}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\partial/\partial\sigma_+\{E^{\dot a}_l\,\rho^l_J(\sigma,\ \tau)\}\\ \partial/\partial\sigma_-\{E^{\dot a}_l\,\rho^l_J(\sigma,\ \tau)\}\end{pmatrix},\ \sigma_\pm=\tau\pm\sigma,\ E^{\dot a}_l=\mathrm{const}, \tag{2}$$

и описывают возмущения геометрической конфигурации замкнутых струн, а векторные переменные $X^{\dot a}_J(\sigma,\tau)$ описывают величину и динамику калибровочного поля $\mathcal{F}$.

Преобразование суперсимметрии

$$\delta Z^{\dot a}_{\mathbf{J}}=i\bar\varepsilon\Psi^{\dot a}_{\mathbf{J}},\ \delta\Psi^{\dot a}_{\mathbf{J}}=T\gamma_\alpha\varepsilon\partial^\alpha Z^{\dot a}_{\mathbf{J}} \tag{3}$$

приобретает в данной интерпретации динамический смысл, а именно: полагая, что инфинитезимальный спинор ε задает малое смещение на мировой поверхности струны, т. е.

$$\bar\varepsilon=-i\mathcal{K}(d\sigma_+, d\sigma_-),\quad \mathcal{K}=\mathrm{const}, \tag{4}$$

получим из преобразований суперсимметрии (3) с учетом соотношений (2) закон самоподобия исследуемой системы:

$$Z^{\dot a}_{\mathbf{J}}=\mathcal{K}E^{\dot a}_l\,(\rho^l_{J_1}+i\rho^l_{J_2})+E^{\dot a}_l\,(m^l_{J_1}+im^l_{J_2}),\ m^l_J=\mathrm{const}.$$

Таким образом, геометрические размеры замкнутых струн (радиусы $\rho_J{}^l$) и определенное внутри их мировых поверхностей калибровочное поле $\mathcal{F}$ изменяются самоподобно, т. е. величина $\mathcal{F}$ изменяется прямо пропорционально радиусу струны. Факт самоподобия — прямое следствие суперсимметрии действия.

5. Далее в модели строится регулярное представление [8—10] разрешимой алгебры Ли группы движений структурного подпространства $C_J{}^2$. Дифференциальные операторы регулярного представления (индекс J будем опускать):

$$\mathbf{c}_+=\partial/\partial\bar z_2+(\widehat{s_2}/\bar z_2-z_1)/2,\quad \mathbf{p}_+=\partial/\partial z_2-(\widehat{s_2}/z_2-\bar z_1)/2,$$

$$\mathbf{c}_- = \partial/\partial z_1 - (\widehat{s}_1/z_1 - \bar{z}_2)/2, \quad \mathbf{p}_- = \partial/\partial \bar{z}_1 + (\widehat{s}_1/\bar{z}_1 - z_2)/2,$$

$$\mathbf{d}_+ = \partial/\partial \bar{z}_1 + (\widehat{s}_1/\bar{z}_1 + z_2)/2, \quad \mathbf{q}_+ = \partial/\partial z_1 - (\widehat{s}_1/z_1 + \bar{z}_2)/2,$$

$$\mathbf{d}_- = \partial/\partial z_2 - (\widehat{s}_2/z_2 + \bar{z}_1)/2, \quad \mathbf{q}_- = \partial/\partial \bar{z}_2 + (\widehat{s}_2/\bar{z}_2 + z_1)/2,$$

где

$$\widehat{s}_l = \frac{1}{2}\int \widehat{F}_{l\bar{l}} d\theta^l \wedge \bar{d}\theta^l, \tag{5}$$

$$[\widehat{s}_l, \widehat{s}_k] = 0, \quad z_l = T^{-\frac{1}{4}}\theta_l, \quad l, k = 1, 2,$$

образуют лестничную алгебру повышающих и понижающих операторов, которые действуют в гильбертовом пространстве функций состояния. При этом функции, отвечающие стационарным состояниям, являются собственными функциями операторов чисел заполнения вида

$$N_R = a^+ a, \quad N_L = b^+ b,$$

где

$$a^+ = c_+ d_+, \quad a = c_- d_-, \quad b^+ = p_+ q_+, \quad b = p_- q_-.$$

Указанные дифференциальные операторы понимаются как операторы рождения и уничтожения форм движения исследуемой системы. Формы движения описываются функцией состояния $\Phi(\theta, \sigma, \tau)$, удовлетворяющей определенной краевой задаче:

$$a^+ a \Phi_R(\theta; \sigma, \tau) = i\sqrt{T}\partial/\partial\sigma_+ \Phi_R(\theta; \sigma, \tau),$$

$$b^+ b \Phi_L(\theta; \sigma, \tau) = i\sqrt{T}\partial/\partial\sigma_- \Phi_L(\theta; \sigma, \tau). \tag{6}$$

На мировой поверхности $SW(\Gamma)$ замкнутых струн Γ^1, Γ^2, локализованных в пространстве C^2

$$C^2 \cap SW(\Gamma) = \{z \in C^2 : z_l = w_l \exp(i\zeta\sigma), \quad \zeta = \text{const}, \quad l = 1, 2\}$$

(здесь $w_l = T^{-1/4}\rho^l$ — безразмерные радиусы струн), заданы граничные условия:

$$a^+ \Phi_R|_{SW(\Gamma)} = 0, \quad b^+ \Phi_L|_{SW(\Gamma)} = 0. \tag{7}$$

Следовательно, геометрическая конфигурация струн не может быть произвольной, а с учетом того, что от указанной конфигурации зависит величина калибровочной связности $\hat{A}(\theta)$, влияющей в свою очередь на функцию состояния, мы получаем самосогласованную краевую задачу. Таким образом, геометрические параметры системы (радиусы замкнутых струн), наряду с собственными значениями операторов чисел заполнения, могут принимать только определенные дискретные значения.

6. На предпоследнем этапе вводится оператор Гамильтона:

$$\widehat{H}_J \equiv \sqrt{\delta_{ab} X^a_J X^b_J}\, \mathrm{Sp}\, \mathcal{N} \exp \begin{pmatrix} a^+_J a_J & 0 \\ 0 & b^+_J b_J \end{pmatrix}, \quad J = 1, 2, 3, 4, \tag{8}$$

действующий в гильбертовом пространстве функций состояния и содержащий инварианты калибровочного поля и операторы чисел заполнения [11]. На этом этапе получено конкретное численное решение вышеупомянутой краевой задачи на собственные значения для урав-

нений (6) и построенного таким образом оператора Гамильтона. Найдены энергетические уровни, отвечающие относительным массам покоя заряженных лептонов $e^{\pm}$, $\mu^{\pm}$, $\tau^{\pm}$. Проведено сравнение с экспериментальными значениями. Отклонение теоретического значения относительной (т. е. выраженной в единицах массы электрона) массы мюона от ее экспериментального значения составляет —0,005%, аналогичное отклонение теоретической массы τ-лептона не превышает экспериментальной погрешности измерений и составляет +0,07%. Кроме того, модель показывает, что существование трех поколений элементарных фермионов оказывается связанным с разрешимостью системы уравнений, выражающих упомянутые выше граничные условия (7) для функции состояния и условия целочисленности потоков калибровочного поля, т. е. собственные числа $s_l^{(\nu)}$ матриц $\hat{s}_l$, определенных формулами (5), должны быть целыми.

Отметим, что исследование модели было проведено без учета возможных взаимосвязанных колебаний калибровочного поля и радиусов замкнутых струн (или радиусов бикруга). Классический вариант двумерной теории суперструн мы получим при описании указанных колебаний.

7. Четырехмерное векторное пространство Минковского отождествляется с фундаментальной группой спинорного пространства [7]. Данная гипотеза основана на топологических и трансформационных свойствах калибровочного поля, отвечающего группе $U(1)\bigcup SU(2)$ и входящего в оператор Гамильтона в виде инвариантов — топологических чисел Эйлера и Понтрягина.

Синтезированная таким образом суперструна, являющаяся моделью элементарного фермиона, представляет собой комплекс топологически нетривиальных протяженных каналов, существующих в спинорном пространстве. Калибровочное поле в C^D дает возможность ввести исчисление на множестве замкнутых 1-цепей, иными словами, можно построить регулярное представление алгебры Ли фундаментальной группы спинорного пространства. Тогда в каждом структурном подпространстве C_l^2 операторы регулярного представления этой алгебры могут быть интерпретированы как квантовомеханические операторы энергии-импульса.

Заключение

Предложенная калибровочная модель суперструны позволяет теоретически рассчитать относительный спектр масс заряженных лептонов $e^{\pm}$, $\mu^{\pm}$, $\tau^{\pm}$ без использования каких-либо подгоночных параметров. Экспериментальные значения относительных масс заряженных лептонов находятся в хорошем согласии с предсказанными теоретически. При этом для состояний, соответствующих нейтрино ν_e, $\tilde{\nu}_e$, ν_μ, $\tilde{\nu}_\mu$, ν_τ, $\tilde{\nu}_\tau$, модель предсказывает нулевую массу покоя, но отличную от нуля полную энергию. Таким образом, мы имеем количественную и качественную классификационную схему всех элементарных фермионов с электрослабым взаимодействием.

Исследование этой модели привело к возникновению еще одной возможной интерпретации преобразований суперсимметрии. Синтезированная в модели конфигурация калибровочного поля имеет упорядоченную коаксиальную структуру, которой обладают внутренние области мировых поверхностей замкнутых струн. Данные мировые поверхности представляют собой множество топологически нетривиальных протяженных каналов, существующих в спинорном пространстве.

Благодаря последнему обстоятельству, а также топологическим и трансформационным свойствам калибровочного поля группы $U(1)\cup\cup SU(2)$ возникает концептуальная основа для введения векторного пространства Минковского как представления фундаментальной группы спинорного пространства. Обнаружены перспективы более глубокого исследования с целью описания свойств и характеристик элементарных фермионов.

Авторы выражают благодарность участникам научного семинара кафедры теоретической физики за полезное обсуждение, ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gervais J. L., Sakita B.//Nucl. Phys. 1971. **B 34.** P. 632.
2. Aharonov Y., Casher A., Susskind L.//Phys. Lett. 1971. **35B.** P. 512.
3. Howe P. S.//Phys. Lett. 1977. **70B.** P. 453.
4. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Т. 1. М., 1987.
5. Martinec E.//Phys. Rev. 1983. **D28.** P. 2604.
6. Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. Т. 1; 2. М., 1990.
7. Шварц А. С. Квантовая теория поля и топология. М., 1989.
8. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., 1991.
9. Фаддеев Л. Д., Корепин В. Е.//ТМФ. 1975. **25.** С. 147.
10. Розенблюм А. В., Розенблюм Л. В.//Дифф. уравнения. 1986. **22,** № 11. С. 1961.
11. Боголюбов Н. Н., Садовников Б. И., Шумовский А. С. Математические методы статистической механики модельных систем. М., 1989.

Поступила в редакцию
27.12.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 5

УДК 519.6:517.958

О НЕКОТОРЫХ ПОСТАНОВКАХ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

В. Б. Гласко, Ю. В. Гласко, А. В. Щепетилов

(кафедра математики)

В рамках известной термодинамической модели эффекта Пельтье рассмотрены две новые математические постановки задачи термоэлектрического охлаждения, алгоритмы решения которых реализованы в ЭВМ-программах. Приведены результаты математического эксперимента.

1. Фундаментальный термодинамический анализ эффекта Пельтье был проведен еще в работах [1—3], где сформулированы математические модели для его использования в прикладных целях. В работе [2], в частности, рассматривались задачи о максимизации двух следующих величин: а) коэффициента охлаждения $\varepsilon=Q/W$, где Q — количество поглощаемого тепла, а W — необходимая для этого мощность электрического тока; б) разности ΔT между температурами «горячего» и «холодного» спаев термоэлемента, каждая из которых является функцией тока и геометрических параметров системы. Как было показано, эти задачи противоречивы (максимальное значение ΔT соответствует значению $\varepsilon=0$). Для повышения эффективности устройства было рекомендовано использование «каскадов» термоэлементов и показано, что практически ощутимый эффект дает лишь двухуровневый каскад.