

Благодаря последнему обстоятельству, а также топологическим и трансформационным свойствам калибровочного поля группы $U(1) \times U(2)$ возникает концептуальная основа для введения векторного пространства Минковского как представления фундаментальной группы спинорного пространства. Обнаружены перспективы более глубокого исследования с целью описания свойств и характеристик элементарных фермионов.

Авторы выражают благодарность участникам научного семинара кафедры теоретической физики за полезное обсуждение, ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gervais J. L., Sakita B. // Nucl. Phys. 1971. В 34. Р. 632.
2. Aharonov Y., Casher A., Susskind L. // Phys. Lett. 1971. 35B. Р. 512.
3. Howe P. S. // Phys. Lett. 1977. 70B. Р. 453.
4. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Т. 1. М., 1987.
5. Martinez E. // Phys. Rev. 1983. D28. Р. 2604.
6. Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. Т. 1, 2. М., 1990.
7. Шварц А. С. Квантовая теория поля и топология. М., 1989.
8. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., 1991.
9. Фаддеев Л. Д., Корелин В. Е. // ТМФ. 1975. 25. С. 147.
10. Розенблюм А. В., Розенблюм Л. В. // Дифф. уравнения. 1986. 22, № 11. С. 1961.
11. Боголюбов Н. Н., Садовников Б. И., Шумовский А. С. Математические методы статистической механики модельных систем. М., 1989.

Поступила в редакцию
27.12.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 5

УДК 519.6:517.958

О НЕКОТОРЫХ ПОСТАНОВКАХ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

В. Б. Гласко, Ю. В. Гласко, А. В. Щепетилов

(кафедра математики)

В рамках известной термодинамической модели эффекта Пельтье рассмотрены две новые математические постановки задачи термоэлектрического охлаждения, алгоритмы решения которых реализованы в ЭВМ-программах. Приведены результаты математического эксперимента.

1. Фундаментальный термодинамический анализ эффекта Пельтье был проведен еще в работах [1—3], где сформулированы математические модели для его использования в прикладных целях. В работе [2], в частности, рассматривались задачи о максимизации двух следующих величин: а) коэффициента охлаждения $\epsilon = Q/W$, где Q — количество поглощаемого тепла, а W — необходимая для этого мощность электрического тока; б) разности ΔT между температурами «горячего» и «холодного» спаев термоэлемента, каждая из которых является функцией тока и геометрических параметров системы. Как было показано, эти задачи противоречивы (максимальное значение ΔT соответствует значению $\epsilon = 0$). Для повышения эффективности устройства было рекомендовано использование «каскадов» термоэлементов и показано, что практически осязаемый эффект дает лишь двухуровневый каскад.

В работе [3] анализировалась первая из названных задач применительно к многоуровневому каскаду, когда каждый уровень представляет собой «батарею» параллельно действующих термоэлементов.

Стационарный режим работы такого каскада определяется в [2, 3] условиями

$$Q_i = Q_{i-1} + W_i, \quad (1)$$

где i — номер соответствующей батареи, ($i=1, 2, \dots, n$) и Q_0 , W_1 относятся к батарее, контактирующей с охлаждаемым объектом. Аналитическое решение задачи получено в работе [3] при следующем полупирическом предположении. Пусть α_i — термоэдс батареи ($dE = \alpha dT$); k_i — средняя по температуре теплопроводность материала ее термоэлемента, ρ_i — аналогичная оценка его удельного сопротивления; $z_i = \alpha_i/k_i\rho_i$, T_i и T_{0i} — температуры соответственно горячего и холодного спаев для i -й батареи. Тогда $z_i(T_i + T_{i-1})$ не зависит от номера i .

При таком предположении в работе [3] даны рекомендации для выбора конструктивных параметров каскадов и параметров, управляющих режимом их работы — распределения температур $\{T_i\}$ и токов $\{I_i\}$.

Однако для проектирования устройств, работающих в неуправляемых условиях, более естественными могут оказаться постановки задач, в которых $\{T_i\}$ рассматриваются как достаточно произвольные параметры при априорно заданных конструктивных. В настоящей статье нами рассматриваются в рамках исходных термодинамических моделей [1, 2] две постановки задач оптимизации такого рода.

2. Принимая условие стационарности (1), сформулируем задачу о максимальном понижении температуры объекта при любом допустимом из соображений экономичности значении коэффициента ε .

Ради краткости изложения будем считать термоэлементы каскада одинаковыми, а параметры α , ρ , k отнесем к составляющим его батареям. В соответствии с оценкой экономической эффективности каскада [2] ограничимся здесь случаем $n=2$.

Эффект охлаждения по закону Пельтье осложняется рассеянием тепла по закону Джоуля—Ленца и обратным тепловым потоком, возникающим из-за образования разности температур между «горячим» и «холодным» спаями элемента. Учитывая, что в случае каскада горячий спай элементов предшествующей батареи является холодным для следующей, и принимая обоснованную в [2] модель равного деления рассеянного тепла между холодным и горячим спаями одного уровня, получаем следующие выражения для отнятой каждой батареей теплоты [2]:

$$Q_{i-1} = \alpha T_{i-1} I_i - (1/2) \rho I_i^2 - k(T_i - T_{i-1}) \quad (i=1, 2), \quad (2)$$

где T_0 — температура охлаждаемого объекта, T_2 — температура внешней по отношению к нему среды.

Мощность, затрачиваемая на каждом уровне, с учетом джоулева рассеяния тепла и работы термоэдс против образовавшегося перепада температуры записывается в виде

$$W_i = \rho I_i^2 + \alpha I_i(T_i - T_{i-1}) \quad (i=1, 2). \quad (3)$$

Принятое в [2, 3] условие стационарности процесса дается уравнением (1) при $i=1$, а коэффициент охлаждения выражается формулами

$$\varepsilon = Q_0/W, \quad W = \sum W_i. \quad (4)$$

При любом фиксированном ε , заданных конструкционных постоянных и температурах T_1, T_2 , принимаемых за параметры задачи, полагая $Q \equiv Q_1$ независимой переменной, будем рассматривать $T_0 = T_0(Q)$ как функцию $Q, I_1(Q)$ и $I_2(Q)$, неявно определяемую системой соотношений (1) — (4). Тогда интересующая нас задача о минимизации температуры объекта формулируется в виде

$$\hat{Q} = \arg(\min_Q (T_0(Q))). \quad (5)$$

Решение этой задачи даст одновременно минимальное при данных параметрах значение $T_0 = T_0(\hat{Q})$ и необходимое для этого распределение токов $I_i = I_i(Q)$ ($i=1, 2$), если будет указан алгоритм их однозначного определения.

Отметим, что задача (5) может и не иметь решений при заданных параметрах; в случае же если ее решение не единственно, условимся выбирать наименьшее из них, поскольку автоматизация такого выбора всегда возможна.

Алгоритм решения задачи (5) строится следующим образом. $I_2(Q)$ аналитически определяется квадратным уравнением (2) (при $i=2$). Условие существования его решений в области $Q > 0$ дается, как нетрудно проверить, неравенствами

$$0 < Q < Q^* \equiv (\alpha^2/2) T_1^2 - \rho k (T_2 - T_1), \quad (6)$$

что при $Q^* > 0$ приводит к ограничениям на допустимые значения температур:

$$T_1 < T_2 < T_1 + \alpha^2 / (2\rho k) T_1^2, \quad (7)$$

где использовано естественное условие, соответствующее [1]: $T_2 > T_1$.

При соблюдении этих условий однозначность $I_2(Q)$ обеспечивается выбором меньшего корня уравнения.

Поскольку T_0 входит в исходные соотношения линейно, то после исключения из них $I_2(Q)$ оказывается возможным явное выражение T_0 через Q и I_1 и притом двояким образом: из (1) — (2) и из (3) — (4). Результат двух получившихся выражений после исключения T_0 оказывается кубичным уравнением

$$P_3(I_1) = 0 \quad (8)$$

относительно I_1 , коэффициенты которого зависят от Q . При любом фиксированном Q это уравнение рассматривается на сегменте: $[0, I_1^*]$, где I_1^* задается из технологических условий.

Отметим, что правила дифференцирования неявной функции приводят к дробно-рациональному выражению для $I_1'(Q)$ через $I_1(Q)$, знаменатель которого — квадратный трехчлен относительно I_1 .

Поскольку, с другой стороны, функция $T_0 = T_0(Q, I_1(Q))$ задана явным образом, решение задачи минимизации определяется условием

$$\Phi(Q) = \frac{dT_0}{dQ} (I_1(Q), I_1'(Q), Q) = 0 \quad (9)$$

с алгоритмически определенной левой частью. Основным элементом решения (9) является метод «вилки» с предварительным, программно-организованным «прощупыванием» области определения $\Phi(Q)$. Однако он содержит процедуру поиска этой области, которая в зависимости от конструкционных и температурных параметров, а также значения ε может оказаться лишь частью $[0, Q^*]$ (6). Разработанная нами форт-

ран-программа находит границы этой области, используя следующие два условия: а) в соответствующих границах не должно содержаться точек, где $I_1(Q)=0$ (интерес представляют только положительные корни уравнения (8); б) не должно содержаться точек, где $I_1'(Q)=\infty$.

В качестве алгоритма решения уравнения (8) при каждом Q из области определения $\Phi(Q)$ могут быть использованы либо формулы Кордано [4] с алгоритмическим отбором корней, либо метод «вилки» на сегменте $[0, I_1^*]$.

Если отсутствие решений (9) автоматически фиксируется фортран-программой, то однозначность решения (если их несколько) обеспечивается, как и выше, выбором наименьшего. Таким образом, оказывается справедливым следующее, алгоритмически обоснованное

Утверждение: При заданных параметрах решение уравнения (9) с алгоритмически определенной областью $\Phi(Q)$ либо не существует, либо единственно.

Математический эксперимент проведен нами для $z=2,5 \cdot 10^{-3}$ и $T_2=298$ К. На рисунке (сплошные кривые) представлены зависимости $\tau=\tau(\varepsilon)$, где $\tau=T_0(K)$ для $T_1=275$ (1), 285 (2) и 295 К (3), а также зависимости от ε оптимальных токов в безразмерных (отнесенных к минимальному значению I_2) единицах: $I_1(\varepsilon)$ (4) и $I_2(\varepsilon)$ (5).

3. Задачу о максимизации коэффициента охлаждения ε как функции токов при заданных конструкционных и температурных параметрах мы рассмотрим при нескольких других условиях, нежели в [2, 3]. Именно, допустим, предполагая возможность теплоотвода с каждой батареи каскада, что на очередном уровне осваивается лишь часть энергии, поступающей с предыдущего уровня, так что выполнено условие

$$Q_i=Q, \quad i=0, 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Величина ε определяется формулой (4) при $Q_0=Q$, где Q — не определенный пока параметр, и ставится задача об условном в силу соотношений (10) экстремуме ε . Из этих условий, согласно (3), при $i=1, 2, \dots, n$ могут быть однозначно определены токи $\{I_i=I_i(Q)\}$ как меньшие положительные корни соответствующих квадратных уравнений. Анализ дискриминантов этих уравнений приводит к следующим ограничениям на область изменения Q :

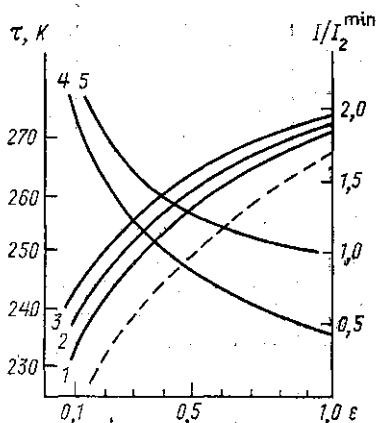
$$0 < Q < Q^* \equiv \min(\beta_i/2), \quad \beta_i = \alpha^2 T_{i-1}^2 - 2\rho k(T_i - T_{i-1}). \quad (11)$$

Тогда из неотрицательности Q^* следуют ограничения на температурные параметры, которые с учетом естественного предположения [1, 2] имеют вид

$$T_{i-1} < T_i < T_{i-1} + [\alpha^2/(2kp)]T_{i-1}^2. \quad (12)$$

При любых температурах, удовлетворяющих условию (12), и при указанных выше выражениях токов интересующая нас задача сводится к максимизации $\varepsilon=\varepsilon(Q)$, а любая точка Q максимума ε алгоритмически определяется формулой

$$\hat{Q} = \underset{Q}{\operatorname{argmin}} \{Q^{-1} \sum (\rho I_i^2 + \alpha I_i(T_i - T_{i-1}))\} \in (0, Q^*). \quad (13)$$



Теорема: При условиях (11)–(12) задача (13) имеет и притом единственное решение.

Действительно, при условии (12) минимизируемая функция $f(Q)$ заведомо положительна и дифференцируема на $(0, Q^*)$; как можно убедиться, используя (2) (при $i=1, \dots, n$) и (10), она выражается формулой $f(Q) = (1/Q)[-\sum \xi_i \sqrt{\beta_i} - 2Q\rho + A] - 2n$, где $\xi_i = (\alpha/\rho)(T_i + T_{i-1})$, и $A = \sum \alpha T_{i-1} \xi_i - (2k/\rho)(T_n - T_0)$ не зависит от Q . При $Q \rightarrow +0$ $f(Q) \rightarrow +\infty$, а значит, $f'(Q) \rightarrow -\infty$; в свою очередь, как нетрудно убедиться прямым дифференцированием, $f'(Q) \rightarrow +\infty$ при $Q \rightarrow Q^*$. Значит, существует по крайней мере один корень уравнения $f'(Q) = 0$ — на $(0, Q^*)$, отвечающий точке экстремума $f(Q)$. Очевидно, любой из них совпадает с корнем уравнения $F(Q) = Q^2 f'(Q) = 0$. Но $F'(Q) = \sum \xi_i Q / (\beta_i - 2Q\rho)^{3/2} > 0$ на $(0, Q^*)$, и значит, рассматриваемое уравнение имеет на $(0, Q^*)$ единственный корень, что и завершает доказательство.

В силу единственности решение уравнения $f'(Q) = 0$ определяется методом вилки на ЭВМ, после чего могут быть найдены токи на разных уровнях каскада и другие характеризующие его величины.

$T_2, ^\circ\text{C}$	I_1, A	I_2, A	ϵ	$Q_0, \text{Вт}$	$W_1, \text{Вт}$
30	1,85	2,68	0,50	9,78	19
22	1,89	2,36	0,58	9,96	17
15	1,92	2,10	0,64	10,13	16

Некоторые результаты расчета такого каскада при $n=2$ для параметров бытового холодильника: $T_0 = -3^\circ\text{C}$, $T_1 = 3^\circ\text{C}$ — при том же z , что и в предшествующей задаче, приведены в таблице.

4. На рисунке штриховой кривой представлен один из результатов минимизации T_0 (см. п. 2) в предположении (10) при $n=2$. Для такой модели эффект понижения температуры получается даже несколько заметнее, однако, как оказывается, при токах, превышающих прежние вдвое и более.

ЛИТЕРАТУРА

- Иоффе А. Ф. Полупроводниковые термоэлементы. М.; Л., 1956.
- Иоффе А. Ф., Стильбанс Л. С., Иорданишвили Е. К., Ставицкая Т. С. Термоэлектрическое охлаждение. М.; Л., 1956.
- Бурштейн А. Н. // ФТТ. 1960. 2, № 10. С. 2508.
- Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., 1968.

Поступила в редакцию
26.01.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 5

УДК 621.372.2:621.315.61

ЗАДАЧА СИНТЕЗА КРУГЛЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, А. В. Красильникова
(кафедра математики)

Задача синтеза диэлектрических волноводов ставится как типично некорректная, для решения которой применяется метод регуляризации А. Н. Тихонова. Построены функционалы и предложен эффективный алгоритм для решения широкого круга задач проектирования волоконно-оптических линий связи по заданным эксплуатационным характеристикам. Приведены примеры синтезированных профилей диэлектрических волноводов.

Задачи синтеза составляют специальный класс обратных задач математической физики. Они ставятся как задачи математического про-