Теорема: *При условиях* (11)—(12) *задача* (13) *имеет и притом единственное решение.*

Действительно, при условии (12) минимизируемая функция $f(Q)$ заведомо положительна и дифференцируема на $(0, Q^*)$; как можно убедиться, используя (2) (при $i=1, \ldots, n$) и (10), она выражается формулой $f(Q)=(1/Q)[-\Sigma\xi_i\sqrt{\beta_i-2Q\rho}+A]-2n$, где $\xi_i=(\alpha/\rho)(T_i+T_{i-1})$, и $A=\Sigma\alpha T_{i-1}\xi_i-(2k/\rho)(T_n-T_0)$ не зависит от Q. При $Q\to+0$ $f(Q)\to+\infty$, а значит, $f'(Q)\to-\infty$; в свою очередь, как нетрудно убедиться прямым дифференцированием, $f'(Q)\to+\infty$ при $Q\to Q^*$. Значит, существует по крайней мере один корень уравнения $f'(Q)=0$ — на $(0, Q^*)$, отвечающий точке экстремума $f(Q)$. Очевидно, любой из них совпадает с корнем уравнения $F(Q)=Q^2f'(Q)=0$. Но $F'(Q)=\Sigma\xi_iQ/(\beta_i-2Q\rho)^{3/2}>0$ на $(0, Q^*)$, и значит, рассматриваемое уравнение имеет на $(0, Q^*)$ единственный корень, что и завершает доказательство.

В силу единственности решение уравнения $f'(Q)=0$ определяется методом вилки на ЭВМ, после чего могут быть найдены токи на разных уровнях каскада и другие характеризующие его величины.

Некоторые результаты расчета такого каскада при $n=2$ для параметров бытового холодильника: $T_0=-3\,°C$, $T_1=3\,°C$ — при том же z, что и в предшествующей задаче, приведены в таблице.

T_2, °C	I_1 A	I_2, A	ε	Q_0, Вт	W_1, Вт
30	1,85	2,68	0,50	9,78	19
22	1,89	2,36	0,58	9,96	17
15	1,92	2,10	0,64	10,13	16

4. На рисунке штриховой кривой представлен один из результатов минимизации T_0 (см. п. 2) в предположении (10) при $n=2$. Для такой модели эффект понижения температуры получается даже несколько заметнее, однако, как оказывается, при токах, превышающих прежние вдвое и более.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе А. Ф. Полупроводниковые термоэлементы. М.; Л., 1956.
2. Иоффе А. Ф., Стильбанс Л. С., Иорданишвили Е. К., Ставицкая Т. С. Термоэлектрическое охлаждение. М.; Л., 1956.
3. Бурштейн А. Н.//ФТТ. 1960. 2, № 10. С. 2508.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., 1968.

Поступила в редакцию
26.01.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 5

УДК 621.372.2:621.315.61

ЗАДАЧА СИНТЕЗА КРУГЛЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, А. В. Красильникова

(кафедра математики)

Задача синтеза диэлектрических волноводов ставится как типично некорректная, для решения которой применяется метод регуляризации А. Н. Тихонова. Построены функционалы и предложен эффективный алгоритм для решения широкого круга задач проектирования волоконно-оптических линий связи по заданным эксплуатационным характеристикам. Приведены примеры синтезированных профилей диэлектрических волноводов.

Задачи синтеза составляют специальный класс обратных задач математической физики. Они ставятся как задачи математического про-

ектирования: определение некоторой величины, характеризующей свойства синтезируемого объекта, от которых зависит его требуемая эксплуатационная характеристика [1, 2]. В нашем случае задача синтеза диэлектрических волноводов формулируется следующим образом: по заданным спектральным характеристикам нужно определить распределение функции диэлектрической проницаемости в сечении волновода, обладающего свойствами, в определенном смысле близкими к заданным.

В основе традиционного подхода к решению обратных спектральных задач для диэлектрических волноводов лежат методы квантовой теории рассеяния. В частности, в работах [3, 4] задача распознавания — восстановление профиля показателя преломления в плоских волноводах по заданным постоянным распространения — решается методом ВКБ. В работах [5, 6] для решения задачи синтеза плоских и круглых диэлектрических волноводов используется методика Гельфанда и Левитана решения обратных задач Штурма—Лиувилля, предложенная для приближенных дифференциальных уравнений относительно поперечных составляющих линейно поляризованных мод, содержащих только один спектральный параметр. Следует отметить, что при этом общность задачи существенно сужена как ограничениями, налагаемыми на функцию диэлектрической проницаемости, так и необходимостью рассмотрения задачи синтеза отдельно для каждого азимутального числа, что сильно усложняет решение.

Предлагаемый ниже подход к решению задачи синтеза круглых неоднородных в поперечном сечении диэлектрических волноводов на основе метода регуляризации А. Н. Тихонова свободен от ограничений подобного рода. Применительно к решению задач электродинамики такой подход был предложен в работах [5, 6].

Пусть A — оператор задачи анализа, т. е. оператор, ставящий в соответствие функции $\varepsilon(r, \varphi)$, описывающей параметры исследуемой системы, некоторый спектральный коэффициент — нормированную постоянную распространения $b(V)$:

$$b(V)=A[\varepsilon(r, \varphi)].$$

Для задачи анализа разработаны и предложены [7—9] эффективные алгоритмы решения. Обозначим через $\bar{b}(V)$ необходимый вид зависимости нормированной постоянной распространения и через δ — заданную точность его реализации при оценке близости реальной постоянной распространения и требуемой с помощью некоторого функционала $F\{A[\varepsilon], b\}$.

Вопрос о существовании решения задач синтеза и задач интерпретации (распознавания) [10] ставится по-разному: решение задачи синтеза понимают как возможность определения таких параметров среды (функции ε), для которых соответствующая характеристика синтезируемого объекта (нормированная постоянная распространения $b(V)$) аппроксимирует заданную характеристику $\bar{b}(V)$ с некоторой достаточной точностью. Близость b и $\bar{b}$ определяется с помощью оценочного функционала F, который задается, как правило, в виде функционала типа равномерной или квадратичной метрики.

При постановке и выборе методов решения задач синтеза необходимо принимать во внимание условия физической и конструктивной реализуемости результатов синтеза. Поэтому в пространстве R, элементами которого являются функции $\varepsilon(r, \varphi)$, введем множество Q физически реализуемых решений задачи синтеза. Поскольку требования физической реализуемости для задач синтеза функции профиля диэлек-

трической проницаемости состоят в условии положительности диэлектрической проницаемости среды, множество Q в данном случае состоит из функций, удовлетворяющих условию $0<\varepsilon_{\min}\leqslant\varepsilon(r,\varphi)\leqslant\varepsilon_{\max}$. Здесь учитываются также некоторые требования конструктивной реализуемости решения: значение диэлектрической проницаемости не может превышать некоторого технологически определенного порога. Введем также стабилизирующий функционал $\Omega[\varepsilon]$, который учитывает требования наилучшей конструктивной реализуемости с точки зрения физики процесса, а с математической точки зрения позволяет выделить в пространстве R компактное множество и влиять на устойчивость получаемых решений.

Вопрос о единственности решения, являющийся принципиальным для задач интерпретации, для задач синтеза в нашем случае даже целесообразно не ставить: неединственность решения позволяет выбрать среди результатов наиболее приемлемый с технологической точки зрения. Вообще говоря, единственность решения может быть обеспечена в результате учета условий наилучшей физической и конструктивной реализуемости при математической постановке задачи.

Итак, вариационная постановка задачи синтеза профиля диэлектрической проницаемости волновода формулируется следующим образом: определить элемент ε из условия минимума на Q тихоновского функционала

$$M^{\alpha}[\varepsilon]=F\{A[\varepsilon],\ b\}+\alpha\Omega[\varepsilon]$$

с выбором α по невязке $F\{.,.\}\leqslant\delta$ [10].

Будем искать решение задачи синтеза — функцию диэлектрической проницаемости сердцевины диэлектрического волновода в виде разложения в ряд Фурье по углу φ, коэффициентами которого являются полиномы степени N относительно r, т. е. на множестве $Q_M=M\cap Q$, где

$$M=\left\{\varepsilon(r,\ \varphi)\in C(\sigma)\mid\ \varepsilon(r,\ \varphi)=\sum_{m=0}^{M}\left(\sum_{n=0}^{N}C_{mn}r^{n}\right)e^{im\varphi}\right\}.$$

Множество Q_M является компактом на M. Естественное задание стабилизирующего функционала Ω для нашей задачи:

$$\Omega[\varepsilon]=\|\varepsilon\|^2_{W_2^1(\sigma)}=\int\limits_{\sigma}\{\varepsilon^2(x)+[\nabla\varepsilon]^2\}\,ds.$$

Выбор оценочного функционала $F[\varepsilon]$ в значительной степени определяется физической постановкой задачи. Сформулируем наиболее интересные в практическом отношении задачи и приведем вид соответствующих оценочных функционалов.

1. Синтез диэлектрических волноводов с минимальной межмодовой дисперсией двух первых мод. Соответствующий функционал имеет вид

$$F_1[\varepsilon]=\int\limits_{V_1}^{V_2}\rho_1(V)\,[v_{11}^{\mathrm{gr}}(V[\varepsilon])-v_{01}^{\mathrm{gr}}(V[\varepsilon])]^2\,dV+\rho_2\Phi[\varepsilon],$$

где v_{11}^{gr}, v_{01}^{gr} — групповые скорости двух первых мод, ρ_1, ρ_2 — весовые множители. Задача допускает обобщение на случай минимизации межмодовой дисперсии для любой другой пары мод или для любого заданного набора мод.

2. Создание диэлектрических волноводов с выравненными группо-

выми скоростями двух первых мод на заданной рабочей частоте, что позволяет увеличивать поперечные размеры сердцевины волновода при сохранении минимальной межмодовой дисперсии:

$$F_2[\varepsilon]=\rho_1\,|v_{11}^{gr}(V_0[\varepsilon])-v_{01}^{gr}(V_0[\varepsilon])|+\rho_2\Phi[\varepsilon],$$

где V_0 — значение волноводного параметра, соответствующее заданной рабочей частоте.

3. Проектирование волноводов с одинаковыми значениями фазовой скорости на кратных частотах в двух первых соседних модах:

$$F_3[\varepsilon]=\rho_1\,|b_{11}(mV[\varepsilon])-b_{01}(V[\varepsilon])|+\rho_2\Phi[\varepsilon],$$

где b_{01}, b_{11} — нормированные постоянные распространения двух первых мод, m — целое число.

4. Синтез волноводов с максимально плоской дисперсионной характеристикой на рабочем участке. Такие волноводы обладают малой фазовой чувствительностью к случайным колебаниям их толщины, что весьма существенно для систем и устройств интегральной оптики. Кроме того, волноводы с уплощенной дисперсионной характеристикой в силу слабой зависимости групповой скорости от частоты обладают меньшей волноводной дисперсией:

$$F_4[\varepsilon]=\sum_{i=1}^{N}(b(V_i[\varepsilon])-b(V_{i-1}[\varepsilon]))^2,$$

при условии $b(V_0)=\tilde{b}$, где V_i — значение нормированной частоты в заданной точке i спектрального диапазона, $\tilde{b}$ — заданная величина, $b(V)$ — характеристика исследуемой моды.

5. Проектирование диэлектрических волноводов, обладающих большой полосой частот одномодового режима:

$$F_5[\varepsilon]=\frac{\rho_1}{V_{\text{cutoff}}}+\rho_2\Phi[\varepsilon],$$

где V_{cutoff} — ближайшая к нулевой частота отсечки. Данная задача важна при проектировании волоконно-оптических линий связи с частотным уплотнением каналов информации.

6. Синтез волокна, обладающего дисперсионной характеристикой, в определенном смысле близкой к заданной:

$$F_6[\varepsilon]=\int_{V_1}^{V_2}(b(V[\varepsilon])-\tilde{b}(V[\varepsilon]))^2\,dV,$$

где $\tilde{b}(V)$ — заданная дисперсионная характеристика на спектральном диапазоне $[V_1, V_2]$.

В качестве $\Phi[\varepsilon]$ могут выступать следующие функционалы:

$$\Phi_1=\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{b_{01}(V)},$$

соответствующий поиску минимума при условии наиболее высокой дисперсионной характеристики основной моды;

$$\Phi_2=|b_{01}(V[\varepsilon])-\tilde{b}_{01}(V[\varepsilon])|,$$

соответствующий условию прохождения дисперсионной кривой основной моды через заданную точку $\tilde{b}_{01}(V_0)$ фазовой плоскости;

$$\Phi_3 = \begin{cases} 0, & \text{если } b_{01}(V_0) \geqslant \tilde{b}_{01}, \\ \dfrac{1}{b_{01}(V_0)}, & \text{если } b_{01}(V_0) < \tilde{b}_{01}, \end{cases}$$

определяющей условие прохождения дисперсионной кривой основной моды не ниже точки $\tilde{b}_{01}(V_0)$.

Эти ограничивающие функционалы необходимы для того, чтобы устранить получение в качестве результата синтеза профилей, не имеющих волноводного режима в заданном диапазоне волноводных параметров.

Для решения поставленных задач предложен алгоритм, основой которого являются эффективные методы решения прямых спектральных задач [7—9], с одной стороны, и алгоритм минимизации функции многих переменных на области с заданными неявно ограничениями, разработанный на базе метода Нелдера—Мида [11], — с другой.

Профиль функции диэлектрической проницаемости волокна, синтезированный при условии близости групповых скоростей двух первых мод на рабочей частоте $V_0=4$ (при $\Phi=\Phi_2$, $\rho_1=100$, $\rho_2=2$), представлен на рис. 1. Следует отметить, что диаметр сердцевины полученно-

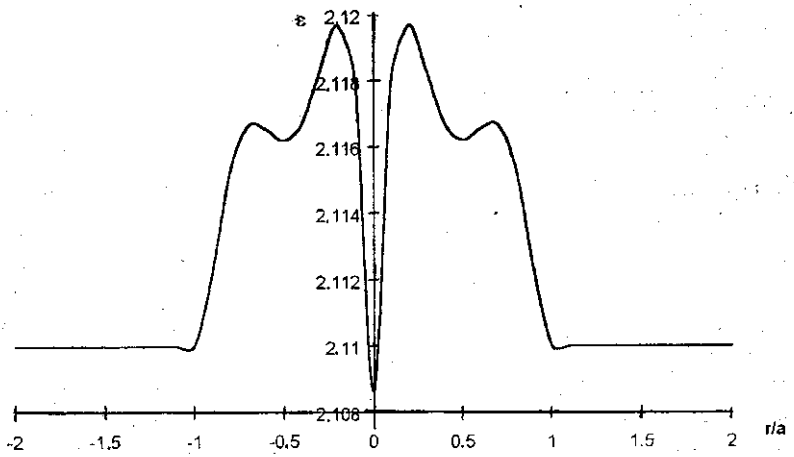

Рис. 1

го волновода примерно вдвое больше, чем в однородном двухслойном волокне. Сходные результаты по увеличению диаметра сердцевины волокна, но на частоте $V=5$ были получены и в [3]. Результирующий профиль, полученный с помощью методов квантовой теории рассеяния, также имеет характерный провал в центре.

На рис. 2 приведены примеры синтезированных профилей волноводов, обладающих свойством, описанным в п. 5, при $\Phi=\Phi_2^2$, $\rho_1=1$, $\rho_2=100$. Решения получены при различных начальных приближениях и соответствуют различным значениям оценочного функционала, которые также приведены на рисунке.

Как было отмечено, задача синтеза принципиально имеет неоднозначное решение. Приведенные примеры решения задач синтеза для круглых диэлектрических волноводов показывают, что практически одинаковых результатов в рамках заданной невязки для построенного оценочного функционала можно достичь на профилях, значительно раз-

личающихся по сложности конфигурации. Поэтому выбор конкретного решения определяется выделением множества технически реализуемых профилей, предпочтительных с точки зрения практики, что математи-

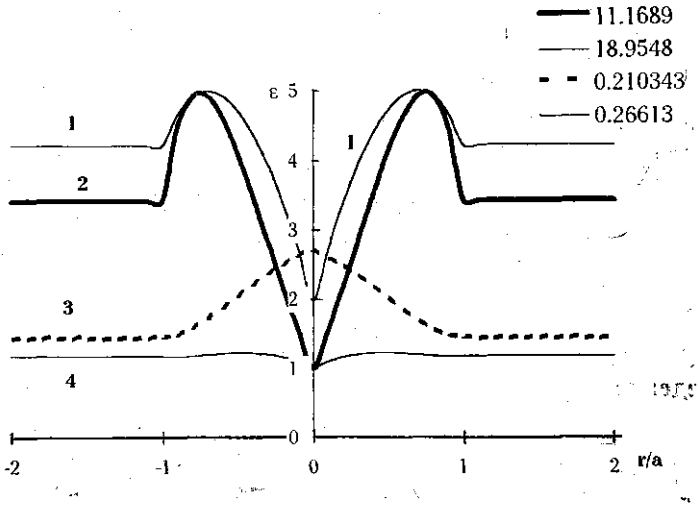

Рис. 2

чески осуществляется путем задания соответствующего стабилизирующего функционала Ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vassel M. O.//J. Opt. Soc. Am. 1975. **65**, N 9. P. 1019.
2. White J. M., Heidrich P. F.//Appl. Opt. 1976. **15**, N 1. P. 151.
3. Андрущко Л. М. Диэлектрические волноводы оптического диапазона. Киев, 1983.
4. Козловский В. В.//Радиотехн. и электроника. 1991. **36**, № 6. С. 1102.
5. Свешников А. Г., Ильинский А. С.//ДАН. 1972. **204**, № 5. С. 12.
6. Свешников А. Г.//Проблемы математической физики и вычислительной математики. М., 1979. С. 287.
7. Боголюбов А. Н., Красильникова А. В.//Радиотехн. и электроника. 1994. **39**, № 2. С. 233.
8. Боголюбов А. Н., Красильникова А. В.//Вестн. Моск. ун-та. 1995. № 3. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1995. N 3).
9. Боголюбов А. Н., Красильникова А. В.//Там же. 1996. № 2. С. 86 (Ibid. 1996. N 2).
10. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.
11. Nelder J. A., Mead R.//Comp. J. 1965. N 7. P. 308.

Поступила в редакцию
09.02.96