УДК 519.21

МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОСТИ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИКИ РАКА ГРУДИ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦЫ ТЕНЗОДАТЧИКОВ

Д. А. Пашко, Ю. П. Пытьев, А. П. Сарвазян

(кафедра компьютерных методов физики)

Рассматриваются методы обнаружения и оценивания параметров локализованного новообразования в мягкой ткани по измерениям поля давления на ее поверхности в статическом случае. Предлагается минимаксный метод оценивания параметров неоднородности в мягких тканях. Проводится анализ предельных возможностей обнаружения и оценивания параметров неоднородности по измерениям давления на поверхности образца. Проводится анализ информативности измерений на предмет оценивания параметров локализованного включения. Применимость предложенных методов демонстрируется численным экспериментом.

1. Введение

Одной из самых распространенных форм злокачественных новообразований в мягких тканях человека является рак молочной железы. Ранняя диагностика рака молочной железы является важнейшим фактором в борьбе с этим заболеванием. Несмотря на большое внимание, уделяемое современной медициной методам диагностики и лечения рака груди, смертность пациенток с этим диагнозом не уменьшается. Поэтому создание новых методов массового обследования и диагностики является остро актуальной задачей.

До настоящего времени наиболее распространенным методом первичной диагностики рака является пальпация. Высокая эффективность пальпации обусловлена тем, что развитие опухоли обычно сопровождается значительным изменением механических свойств ткани. Модуль Юнга E опухолевой ткани может на порядки превосходить модуль Юнга нормальной ткани молочной железы [1, 2].

Благодаря тому, что нормальные и патологические процессы приводят к различным изменениям механических свойств мягких биологических тканей, пальпация надежно служит источником информации о состоянии внутренних органов, расположенных недалеко от поверхности тела. Среди физических характеристик мягких тканей модуль Юнга занимает особое положение благодаря широкому диапазону возможных значений и изменений [3]. Именно по этой причине внимание многих исследователей привлекла задача дистанционного определения модуля упругости мягких тканей в целях медицинской диагностики. Один из описанных в литературе подходов к выявлению твердых новообразований в мягких тканях основан на использовании матрицы датчиков давления [4, 5], поскольку картина распределения давления на поверхности матрицы, прижатой к исследуемой ткани, содержит информацию о положении, твердости и размере новообразования. В данной работе исследуется задача оценивания параметров локализованного новообразования в мягкой ткани по измерениям поля давления на ее поверхности в статическом случае.

Предварительные количественные оценки, полученные на основе классического решения [6] задачи о равномерном «обжатии» неограниченной упругой среды со сферическим или цилиндрическим включением, а также численное моделирование, некоторые результаты которого приведены на рис. 1, показывают, что возмущения, вносимые включением, быстро затухают по мере удаления от включения. На рис. 1 представлены распределения давления на поверхности образца

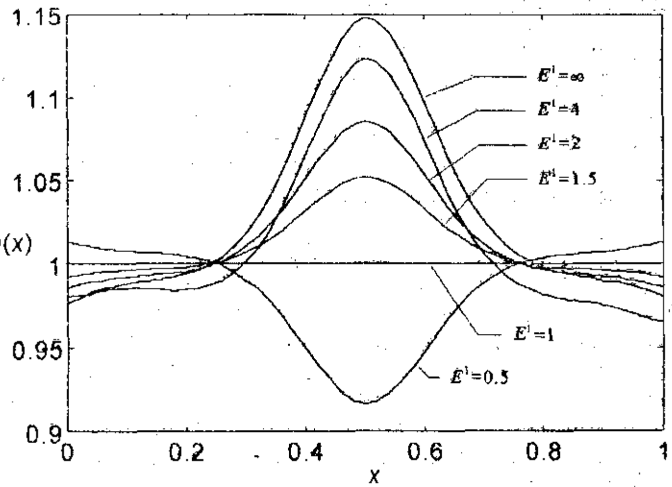


Рис. 1. Распределение давления $p(x)$ на поверхности образца с параметрами неоднородности: $x^1=0{,}5$, $y^1=0{,}75$, $r^1=0{,}05$ при различных значениях модуля Юнга E^1 неоднородности

при $x^1=0{,}5$, $y^1=0{,}7$, $r^1=0{,}05$ и различных значениях модуля Юнга включения. Заметим, что максимальное отклонение давления от давлений на поверхности однородного образца не превышает 15% даже в случае абсолютно твердого включения.

Зависимость возмущения от величины относительного модуля Юнга включения $e=E^1/E^0$, где E^1 и E^0 — значения модуля Юнга включения и среды, является существенной при малых отклонениях e от 1 и слабой при $e\gg1$. Таким образом, можно предположить, что измерения давления на поверхности образца будут нести довольно мало информации о значении модуля Юнга неоднородности. Наиболее интересным с точки зрения диагностики тканевых новообразований представляется диапазон изменения e от 0,5 до 10.

Для расчетов мы использовали следующую схему. На свободную поверхность исследуемого образца помещается плоская пластина с датчиками давления, которой сообщается заданное и не зависящее от горизонтальной координаты вертикальное смещение. Учитывая, что усилия с пластины передаются образцу через слой кожи, который слабо связан с тканью, в модельных расчетах можно предположить, что между пластиной и образцом обеспечиваются условия свободного проскальзывания.

Задача рассматривалась в двумерной (безразмерной) постановке, и для численного моделирования были использованы следующие допущения. Образец считался однородным с модулем Юнга E^0. В нем располагалось также однородное цилиндрическое включение радиуса r^1 с координатами центра (x^1, y^1) и модулем Юнга E^1. Расчетное давление на поверхности $p(x)$ было отнесено к давлению на поверхности однородного образца, так что везде далее считалось, что $E^0=1$, а в качестве модуля Юнга включения E^1 использовался введенный выше относительный модуль Юнга e: $E^1=e$. В конкретных расчетах использовались следующие значения параметров: $w=1$, $0<r^1\leqslant0{,}25$, $0{,}5\leqslant E^1\leqslant2{,}5$.

В случае однородного образца следует положить $E^1=1$ и/или $r^1=0$. При этом выполняется равенство $p(x)=1$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу оценивания параметров неоднородности. Пусть $f(x, s)$, $x \in \mathscr{X}$ — распределение давления на поверхности $\mathscr{X}$ ткани, соответствующее набору $s \in \mathscr{S}$ параметров ткани. В нашем случае $\mathscr{S}=\{(x^1, y^1, r^1, E^1),\ 0 \leqslant x^1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y^1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant r^1 \leqslant 0{,}2,\ 0{,}5 \leqslant E^1 \leqslant 2{,}5\}$. Наборы параметров, выделенные сечениями $E^1=1$ и $r^1=0$, соответствуют однородному образцу. Предположим, что схема измерения давления имеет вид равенства

$$\xi(x, s)=f(x, s)+\nu(x),\quad x \in \mathscr{X},\ s \in \mathscr{S},\ \nu \in \mathscr{N},$$

где $\xi(x, s)$ — значение, получаемое при измерении давления в точке $x \in \mathscr{X}$, соответствующее значению параметров $s \in \mathscr{S}$, $\nu(x)$ — реализация ошибки датчика давления в точке $x \in \mathscr{X}$ — случайная функция. При каждом $x \in \mathscr{X}$ $\nu(x)$ — случайный элемент, принимающий значения в ограниченном множестве $\mathscr{N} \subset \mathscr{R}$. В своих исследованиях мы предполагали, что множество $\mathscr{N}$ представляет собой отрезок $[-\Delta, \Delta]$. Таким образом, при любом $x \in \mathscr{X}$ шум $\nu(x)$ ограничен и по модулю не превосходит Δ. По результатам измерения $\xi(\cdot)$ требуется оценить значение параметра распределения $s \in \mathscr{S}$ [7—9].

Если на множестве $\mathscr{S}$ задано расстояние между различными наборами параметров $\rho(s_1, s_2)$, $s_1, s_2 \in \mathscr{S}$, задачу оценивания параметров неоднородности можно поставить как задачу минимизации на множестве всех решающих правил R максимальной на множестве всех $s \in \mathscr{S}$ и $\xi(\cdot) \in \mathscr{C}$ погрешности $\rho(R(\xi), s)$ интерпретации $R(\xi)$ как значения s параметров ткани (см. [10]):

$$h[R]=\sup_{\xi(\cdot) \in \mathscr{C}} \sup\{\rho(R(\xi), s) \mid s,\ \xi: s \in \mathscr{S},\ \nu(x) \in \mathscr{N},$$
$$\xi(x, s)=f(x, s)+\nu(x)\} \sim \min_{R(\cdot) \in \mathscr{R}},$$
$$\mathscr{S}=\{\xi(x, s)=f(x, s)+\nu(x),\ s \in \mathscr{C},\ \nu(x) \in \mathscr{N}\}. \tag{1}$$

Решение задачи (1) дается для каждого $\xi(\cdot) \in \mathscr{C}$ оценкой $\hat{s}=\hat{R}(\xi)$, являющейся решением следующей задачи на минимакс (см. [10]):

$$h_{\xi}(\hat{s})=\sup\{\rho(s, \hat{s}) \mid s: s \in \mathscr{S},\ \nu(x) \in \mathscr{N},$$
$$\xi(x, s)=f(x, s)+\nu(x)\} \sim \min_{\hat{s}}. \tag{2}$$

Следовательно, функция $\hat{R}(\xi)$, $\xi(\cdot) \in \mathscr{C}$ минимизирует погрешность интерпретации (1) и является наиболее точной версией значения параметров неоднородности $s_0 \in \mathscr{S}$, основанной на априорных данных и результате измерения $\xi(\cdot)$.

Решение задачи (2) строится следующим образом. Для любой реализации наблюдаемого распределения давления $\tilde{\xi}(\cdot)$ можно указать множество $\mathscr{S}_{\xi} \subset \mathscr{S}$ наборов параметров, соответствующих измерению $\tilde{\xi}(\cdot)$,

$$\mathscr{S}_{\xi}=\{s \in \mathscr{S}: \xi(x)=f(x, s)+\nu(x),\ x \in \mathscr{X},\ \nu \in \mathscr{N}\}. \tag{3}$$

При наших предположениях о структуре множества $\mathscr{N}$ можно видеть, что все наборы параметров $s \in \mathscr{S}_{\xi}$ удовлетворяют условию

$$\forall x \in \mathscr{X}: |\xi(x)-f(x, s)| \leqslant \Delta,$$

$$\mathscr{S}_\xi=\{s\in\mathscr{S} : |\xi(x)-f(x,s)|\leqslant\Delta,\ x\in\mathscr{X}\}. \tag{4}$$

Условие (4) легко проверяется и может быть использовано для построения множества $\mathscr{S}_\xi$ в явном виде.

Величина $\hat{s}=\hat{R}(\xi)$ будет решением задачи (1) при всех $\xi(\cdot)\in\mathscr{C}$ и минимаксной оценкой параметров распределения $\xi(x, s)$, если она удовлетворяет условию

$$h_\xi(\hat{s})=\inf_{s'\in\mathscr{S}}\sup\{\rho(s, s') \mid s\in\mathscr{S}_\xi\}=\sup\{\rho(\hat{R}(\xi), s'), s'\in\mathscr{S}_\xi\}. \tag{5}$$

В этом случае $h(\hat{s})$ будет погрешностью оценки $\hat{s}=\hat{R}(\xi)$. Условие (5) имеет следующую геометрическую интерпретацию: оценка $\hat{s}=\hat{R}(\xi)$ есть центр шара $B(\hat{s})$ наименьшего радиуса, содержащего множество $\mathscr{S}_\xi$, причем погрешность $h(\hat{s})$ равна радиусу шара $B(\hat{s})=\{s:\rho(s,\hat{s})\leqslant\leqslant h(\hat{s})\}$, $\mathscr{S}_\xi\subset B(\hat{s})$.

В рассмотренной задаче важным моментом является построение множества $\mathscr{S}_\xi$ возможных значений параметра неоднородности. Множество $\mathscr{S}_\xi$ в свою очередь определяет шар $B(\hat{s})$, а вместе с ним и решение задачи интерпретации измерения $\xi(\cdot)$. Однако в то время как $\mathscr{S}_\xi$ содержит всю информацию о возможных значениях параметров неоднородности, переход к $B(\hat{s})$ влечет за собой частичную потерю информации, а его результат существенно зависит от топологии задачи $\rho(s_1, s_2)$. Можно видеть, что наиболее употребительная евклидова метрика

$$\rho(s_1, s_2)=\|s_1-s_2\|_A,\quad \|s\|^2_A=(As, s), \tag{6}$$

в этой задаче мало пригодна для получения оценок. Это связано со сложной структурой множества $\mathscr{S}_\xi$. Множество $\mathscr{S}_\xi$ не является выпуклым, и оценка $\hat{s}=\hat{R}(\xi)$, полученная с помощью правила (5), в метрике (6) может оказаться не принадлежащей множеству $\mathscr{S}_\xi$. Кроме того, если $\xi(\cdot)$ соответствует набору параметров s_0, описывающему состояние образца, близкое к однородному, то при достаточно высоком уровне шума в множество $\mathscr{S}_\xi$ попадут и все точки множества, описывающего однородное состояние образца: $\mathscr{S}_0=\{s\in\mathscr{S} : r^1=0$ или $E^1=1\}$. В этом случае положение и размер шара B будут определяться главным образом расположением плоскостей $r^1=0$ и $E^1=1$ и, как следствие, оценка $\hat{s}$ будет иметь мало общего с реальным состоянием образца. Остроту этих проблем, впрочем, можно несколько снизить, если на оценку параметров $\hat{s}$ наложить дополнительное условие

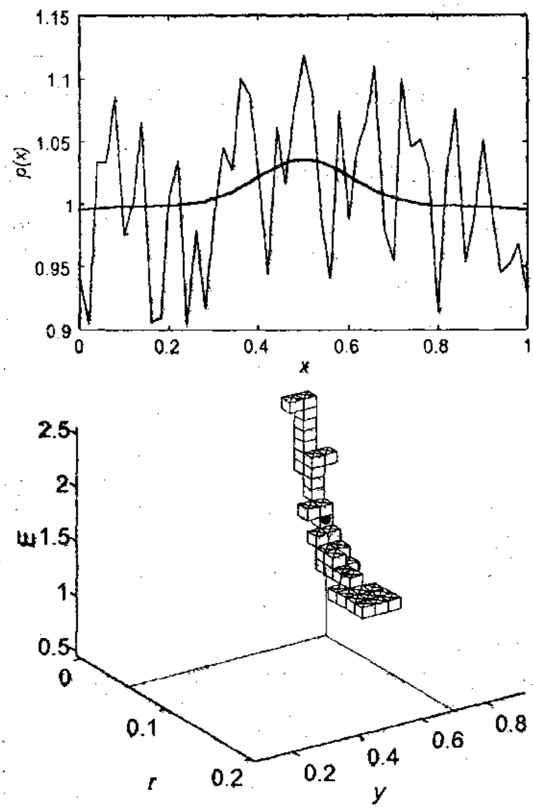
$$\hat{s}(\xi)\in\mathscr{S}_\xi. \tag{7}$$

3. Вычислительный эксперимент

Для проверки предположений, сделанных в первой части работы, был поставлен численный эксперимент. Эксперимент ставился по следующей схеме. Выбирался произвольный набор параметров $\{y^1, r^1, E^1\}$ (параметр x^1 полагался равным 0,5). Затем для выбранного набора параметров рассчитывалось распределение давления на поверхности образца — $f(x)$. Чтобы смоделировать случайные возмущения наблюдаемого сигнала, на точное значение распределения давления $f(x)$ накладывался случайный аддитивный шум $\nu(x)$. Таким образом, предполагалось, что непосредственному наблюдению доступна величина

$$\xi=f+\nu.$$

Шум ν моделировался распределенным равномерно на отрезке $[-\Delta, \Delta]$ и независимым от f. В своем вычислительном эксперименте мы исполь-



зовали шум умеренной мощности ($\Delta=0{,}1$). Далее на основе наблюдаемого сигнала ξ строилось множество $\mathcal{S}_\xi$ и вычислялась оценка параметров неоднородности $\hat{s}$ и ее погрешность h в евклидовой метрике (6). Оператор A в (6) был выбран таким образом, чтобы различные параметры вносили сопоставимый вклад в расстояние между точками $\mathcal{S}$. В своих вычислениях мы использовали оператор A вида

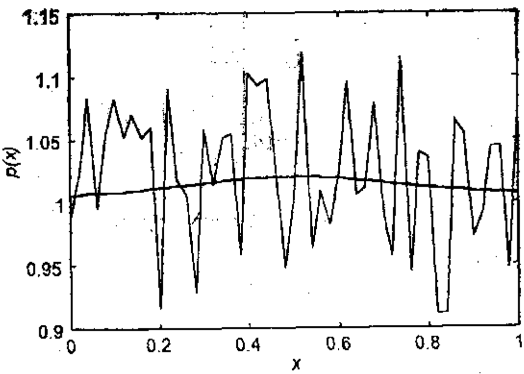
$$A=\mathrm{diag}\left((y^1_{\max}-y^1_{\min})^{-2},\ (r^1_{\max}-r^1_{\min})^{-2},\ (E^1_{\max}-E^1_{\min})^{-2}\right).$$

Рис. 2. Наблюдаемый сигнал $p(x)$ для образца с параметрами $y^1=0{,}7$, $r^1=0{,}05$, $E^1=1{,}5$ (вверху) и множество значений параметров неоднородности $\mathcal{S}_\xi$, не противоречащих измерению (внизу). Оценка параметров неоднородности: $\widehat{y}^1=0{,}700$, $\widehat{r}^1=0{,}055$, $\widehat{E}^1=1{,}507$. Погрешность оценивания $h(\widehat{s})=0{,}418$

Точные значения параметров неоднородности, их оценки и погрешности оценивания для модельных измерений

№	Параметры неоднородности	Точное значение	Оценка с учетом условия (7)	Оценка без учета условия (7)
1	x^1	0,5	0,500	0,500
	y^1	0,7	0,700	0,665
	r^1	0,05	0,055	0,079
	E^1	1,5	1,507	1,787
			($h=0{,}418$)	($h=0{,}338$)
2	x^1	0,5	0,500	0,500
	y^1	0,3	0,329	0,316
	r^1	0,05	0,120	0,142
	E^1	2,5	1,708	1,739
			($h=0{,}473$)	($h=0{,}471$)
3	x^1	Однородный образец	0,500	0,500
	y^1		0,500	0,500
	r^1		0,066	0,088
	E^1		1,034	1,500
			($h=0{,}782$)	($h=0{,}717$)

Результаты численного эксперимента приведены на рис. 2—4. В верхней части рисунков изображены распределения давления по поверхности образца: жирной плавной линией — теоретическое распределение $f(\cdot)$ и тонкой ломаной — наблюдаемое распределение $\xi(\cdot)$. В нижней части рисунков отображены множества $\mathcal{S}_\xi$ — множества наборов параметров, не противоречащих измерению ξ. Точкой на рис. 2 отмечена оценка $\hat{s}=\hat{R}(\xi)$ параметров неоднородности, полученная при дополнительном условии (7). Точные значения параметров неоднородности, их оценки и погрешности оценивания приведены также в таблице. Там же для сравнения приведены и значения оценок параметров неоднородности полученных без учета условия (7). Обсудим полученные результаты.



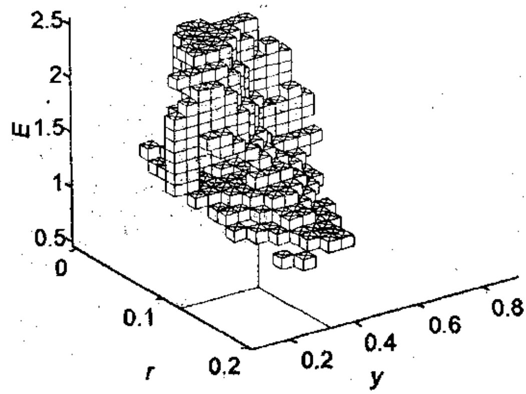
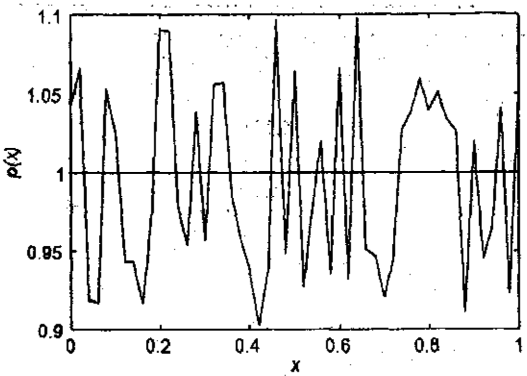


Рис. 3. Наблюдаемый сигнал $p(x)$ для образца с параметрами $y^1=0{,}3$, $r^1=0{,}05$, $E=2{,}5$ (вверху) и множество значений неоднородности $\mathcal{S}_\xi$, не противоречащих измерению (внизу). Оценка параметров неоднородности: $\widehat{y}^1=0{,}329$, $\widehat{r}^1=0{,}120$, $\widehat{E}^1=1{,}708$. Погрешность оценивания $h(\widehat{s})=0{,}473$

Как видно из приведенных рисунков, вид множества $\mathcal{S}_\xi$ сильно зависит от параметров неоднородности. Так, для неоднородностей, лежащих в верхней части образца, множество $\mathcal{S}_\xi$ обычно имеет вид узкой, сильно вытянутой вдоль оси E^1 «полоски», иногда несколько изогнутой. Такой случай представлен на рис. 2. Сильная вытянутость множества $\mathcal{S}_\xi$ вдоль E^1 говорит о том, что наблюдаемые величины действительно несут довольно мало информации о модуле Юнга неоднородности. Обычно в этом случае оценка параметров неоднородности $\hat{s}$ строится весьма точно, причем оценки параметров с учетом и без учета условия (7) мало отличаются как по значению, так и по погрешности оценивания (см. таблицу).

Множества $\mathcal{S}_\xi$, подобные представленному на рис. 3, наиболее часто встречаются в случае, когда образец содержит лежащую в глубине сравнительно небольшую или рыхлую неоднородность. Форма множества в этом случае часто бывает довольно сложной и сильно зависит от реализации шума. Наблюдается выраженное «притяжение» множества к плоскостям $r^1=0$ и $E^1=1$. В этом случае оценка $\hat{s}$ может довольно сильно отличаться от истинных значений, однако она редко соответствует однородному образцу. Нужно отметить, что оценки без учета условия (7) значительно отличаются от оценок с учетом этого условия и зачастую имеют мало общего с реальным состоянием образца.



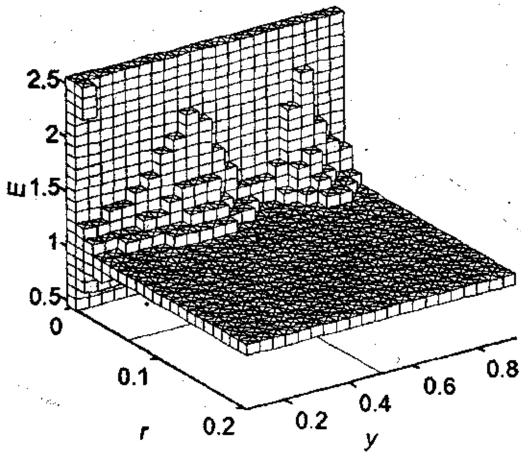


Рис. 4. Наблюдаемый сигнал $p(x)$ для однородного образца (вверху) и множество значений параметров неоднородности $\mathcal{S}_\xi$, не противоречащих измерению (внизу). Оценка параметров неоднородности: $\widehat{y^1}=0{,}500$, $\widehat{r^1}=0{,}066$, $\widehat{E^1}=1{,}034$. Погрешность оценивания $h(\widehat{s})=0{,}782$

Наконец, на рис. 4 представлено множество $\mathcal{S}_\xi$, отвечающее однородным образцам или образцам с небольшими рыхлыми (недиагностируемыми) неоднородностями, расположенными в глубине образца. Для этого типа множеств характерно присутствие в $\mathcal{S}_\xi$ плоскостей $r^1=0$ и $E^1=0$, свидетельствующих о том, что результат измерения практически неотличим от отклика однородного образца. Оценка $\hat{s}$, как правило, дает значения параметров однородного образца.

4. Заключение

Проведенный численный эксперимент показал высокую эффективность минимаксной методики оценивания параметров неоднородности в задачах диагностики новообразований в мягких тканях с помощью матрицы тензодатчиков. Показано, что геометрические параметры неоднородности, такие, как расположение и размер, могут быть оценены с достаточно высокой точностью. Однако при данном способе измерений наблюдаемые величины несут мало информации о механических свойствах включения. В связи с этим удается только качественно оценить значение модуля Юнга неоднородности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sarvazyan A., Maevsky E., Gukassian D. et al.//Abstracts of the 1993 IEEE Ultrasonic Symp., Baltimore, Maryland, USA, November 1993. P. 157.
2. Sarvazyan A., Gukassian D., Maevsky E. et al.//Proc. of Intern. Workshop «Interaction of Ultrasound with Biological Media». Valenciennes. France, 1994. P. 69.
3. Sarvazyan A. P., Skovoroda A. R., Emelianov S. Y. et al.//Acoustical Imaging. Vol. 21/Ed. J. P. Jones. N. Y.; L., 1995.
4. Gentle C. R.//J. Biomed. Eng. 1988. N 10. P. 124.
5. Sarvazyan A. P., Skovoroda A. P., Pyt'ev Yu. P.//Proc. 8th IEEE Symp. on Computer-Based Medical Systems. Lubbock, Texas, June 09—11, 1995.
6. Goodier J. N.//Trans. of ASME. 1933. 55, N 39. P. 39.
7. Pyt'ev Yu. P.//Pattern Recognition and Image Analysis. 1991. 1, N 1. P. 54.
8. Пытьев Ю. П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. М., 1990.
9. Пытьев Ю. П. Математические методы интерпретации эксперимента. М., 1989.
10. Пытьев Ю. П.//Математическое моделирование. 1992. 4, № 2. С. 76.

Поступила в редакцию
06.03.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 5

УДК 536.75

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ

П. Н. Николаев

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

Предложен новый метод использования асимптотических методов для задач статистической термодинамики систем, отталкивательная часть короткодействующего потенциала которых аналогична потенциалу нежестких сфер. Для таких систем получено уравнение состояния, описывающее стабильную и метастабильную фазы в пределах точности машинного эксперимента.

1. Введение

До настоящего времени имеются значительные проблемы в описании статистических неупорядоченных систем при больших плотностях в стабильной и метастабильной областях [1, 2]. Они связаны с расхождением теоретических и имеющихся экспериментальных данных, а также с проблемами описания характерных особенностей фазовых диаграмм вблизи фазовых переходов и в метастабильной области.

В данной работе мы исходим из описания таких систем на основе канонического распределения Гиббса, позволяющего вычислить свободную энергию

$$F=-kT\ln Z, \tag{1}$$

где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, Z — статистический интеграл (или статистическая сумма в квантовом случае).

Наиболее последовательным способом вычисления F является ее реконструкция на основе имеющейся информации по асимптотическому поведению. В работе [3] нами предложен метод вычисления свобод-