3. Lehmann G., Moore W. J.//J. Chem. Phys. 1966, **44.** P. 1741.
4. Важенин В. А., Шерстков Ю. А.//Кристаллография. 1974. **19,** № 1. С. 172.
5. Заитов М. М., Зарипов М. М., Самойлович М. И. и др.//Там же. № 5. С. 1090.
6. Зонн З. Н., Янчевская И. С.//Неорганическая химия. 1962. **7,** № 9. С. 2213.
7. Николаев В. И., Русаков В. С. Мёссбауровские исследования ферритов. М., 1988.
8. Rusakov V. S., Chistyakova N. I.//Proc. LACAME'92. Buenos Aires, Argentina. 1992. N 7—3.
9. Черепанов В. М., Чуев М. А., Якимов С. С.//ФТТ. 1988. **30,** № 4. С. 1076.
10. Menil F.//J. Phys. Chem. Solids. 1985. **46,** N 7. P. 763.
11. Kunding W., Bommel H., Constabaris G., Lindquist R. H.//Phys. Rev. 1966. **142,** N 2. P. 327.
12. Крупянский Ю. Ф., Суздалев И. П.//ЖЭТФ. 1973. **65,** № 4(10). С. 1715.
13. Крупянский Ю. Ф., Суздалев И. П.//Тр. Междунар. конф. по магнетизму МКМ—73. М., 1974. Т. 6. С. 170.

Поступила в редакцию
01.03.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 5

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.135

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Л. Г. Лукьянов, А. Ю. Кочеткова

(ГАИШ)

Впервые в линейном приближении исследованы области устойчивости для треугольных и прямолинейных точек либрации в ограниченной эллиптической фотогравитационной задаче трех тел.

Введение

Устойчивость точек либрации в ограниченной эллиптической задаче впервые была рассмотрена в работах Денби [1] и Беннета [2]. В 1953 г. В. В. Радзиевский [3] сформулировал фотогравитационную ограниченную задачу трех тел, которая затем рассматривалась многими авторами [4—8]. Устойчивость точек либрации в ограниченной эллиптической фотогравитационной задаче ранее не исследовалась.

Постановка задачи

В ограниченной эллиптической фотогравитационной задаче трех тел расстояние r между основными телами M_1 и M_2 связано с истинной аномалией φ соотношением

$$r=p(1+e\cos\varphi)^{-1},$$

где e — эксцентриситет орбиты, а p — фокальный параметр, который обычно принимается за единицу измерения длины. Тело бесконечно малой массы M_0 движется в поле, характеризующемся силовой функцией

$$U=q_1\frac{1-\mu}{r_1}+q_2\frac{\mu}{r_2}. \qquad (1)$$

Здесь μ — отношение массы тела M_2 к сумме масс тел M_1 и M_2, q_1 и q_2 — фотогравитационные параметры, значения которых лежат в интервале $(-\infty, +1]$. Сила светового давления со стороны тела M_i отсутствует при $q_i=1$ и равна силе ньютоновского тяготения, когда $q_i=0$ $(i=1, 2)$. В формуле (1) r_1 и r_2 — расстояния от тела малой массы M_0 до тел M_1 и M_2 соответственно. Единица измерения времени выбрана так, что гравитационная постоянная равна единице.

Положение пассивно гравитирующего тела описывается в прямоугольных координатах x, y, z с началом в центре масс основных тел. Ось x направлена в сторону тела с меньшей массой M_2. Ось y лежит в плоскости движения основных тел, а ось z перпендикулярна плоскости xy и образует с осями x и y правую систему координат. Введем новые переменные ξ, η, ζ по формулам

$$\xi=x/r, \quad \eta=y/r, \quad \zeta=z/r.$$

В этих переменных, используя вместо времени в качестве независимой переменной истинную аномалию φ, уравнения движения бесконечно малой массы можно записать в виде [9]:

$$\begin{aligned}
&\xi''-2\eta'=(1+e\cos\varphi)^{-1}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi},\\
&\eta''+2\xi'=(1+e\cos\varphi)^{-1}\frac{\partial\Omega}{\partial\eta},\\
&\zeta''+\zeta=(1+e\cos\varphi)^{-1}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta},
\end{aligned} \tag{2}$$

$(\cdot)'$ — производная по φ,

$$\Omega=\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+q_1\frac{1-\mu}{\sigma}+q_2\frac{\mu}{\rho}-\frac{1}{2}\zeta^2 e\cos\varphi,$$

$$\sigma^2=(\xi+\mu)^2+\eta^2+\zeta^2, \quad \rho^2=(\xi+\mu-1)^2+\eta^2+\zeta^2.$$

Уравнения в вариациях

Пусть $\xi=\alpha_i$ и $\eta=\beta_i$ — координаты точек либрации $(i=\overline{1, 5})$. Из уравнений

$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right|_{\zeta=0}=0, \quad \left.\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\right|_{\zeta=0}=0$$

получаем решения, соответствующие треугольным точкам либрации L_4 и L_5:

$$\alpha_4=\alpha_5=\frac{q_1^{2/3}-q_2^{2/3}}{2}+\frac{1}{2}-\mu, \quad \beta_4=\sqrt{\frac{q_1^{2/3}+q_2^{2/3}}{4}+\frac{1}{4}}, \quad \beta_5=-\beta_4.$$

Для прямолинейных точек либрации L_1, L_2, L_3 решение может быть записано в виде

$$\alpha_j=\sigma_j-\mu, \quad \beta_1=\beta_2=\beta_3=0, \quad j=1, 2, 3,$$

где

$$\sigma_j-\mu\pm q_1\frac{1-\mu}{\sigma_j^2}\pm q_2\frac{\mu}{(\sigma_j-1)^2}=0, \tag{3}$$

$$-1{,}0\leqslant\sigma_1\leqslant 0, \ 0\leqslant\sigma_2\leqslant 1{,}0, \ 1{,}0\leqslant\sigma_3\leqslant 2{,}0.$$

В отличие от треугольных точек величины α_i для коллинеарных точек зависят от μ, и поэтому необходимо решать уравнения (3) для каждого из значений μ. В уравнениях движения (2) делаем замену переменных:

$$u=\xi-\alpha_i,\quad v=\eta-\beta_i,\quad w=\zeta.$$

Уравнения в вариациях примут вид

$$\begin{aligned}
&u''-2v'=(1+e\cos\varphi)^{-1}(\Omega_{xx}u+\Omega_{xy}v),\\
&v''-2u'=(1+e\cos\varphi)^{-1}(\Omega_{yx}u+\Omega_{yy}v),\\
&w''+w=0.
\end{aligned}\tag{4}$$

Для треугольных точек либрации L_4 и L_5

$$\Omega_{xx}=1-\frac{1-\mu}{q_1}-\frac{\mu}{q_2}+3\,\frac{1-\mu}{q_1^{7/3}}\gamma+\frac{\mu}{q_2^{7/3}}\delta,$$

$$\Omega_{xy}=\pm3\sqrt{\frac{q_1^{2/3}+q_2^{2/3}}{2}-\frac{(q_1^{2/3}-q_2^{2/3})^2}{4}-\frac{1}{4}}\times$$

$$\times\left[\frac{1-\mu}{q_1^{7/3}}\gamma+\frac{\mu}{q_2^{7/3}}\delta\right],$$

$$\gamma=\frac{(q_1^{2/3}+q_2^{2/3})^2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{q_1^{2/3}-q_2^{2/3}}{2},$$

$$\delta=\frac{(q_1^{2/3}-q_2^{2/3})^2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{q_1^{2/3}-q_2^{2/3}}{2},$$

$$\Omega_{yx}=\Omega_{xy},$$

$$\Omega_{yy}=1-\frac{\mu}{q_1}-\frac{\mu}{q_2}+3\left(\frac{q_1^{2/3}+q_2^{2/3}}{2}\;\frac{(q_1^{2/3}-q_2^{2/3})^2}{4}\;\frac{1}{4}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1-\mu}{q_1^{7/3}}+\frac{\mu}{q_2^{7/3}}\right).$$

Для прямолинейных точек L_1, L_2, L_3

$$\Omega_{xx}=1+2\left(\frac{1-\mu}{|\sigma_j|^3}+\frac{\mu}{|\rho_j|^3}\right),\quad \Omega_{yy}=1-\left(\frac{1-\mu}{|\sigma_j|^3}+\frac{\mu}{|\rho_j|^3}\right),$$

$$\Omega_{xy}=\Omega_{yx}=0,$$

где $\rho_j=\sigma_j-1$. Индекс $j=1$, 2, 3 соответствует индексу точки либрации. Третье из уравнений в вариациях описывает простое гармоническое колебание вдоль оси z. Поэтому далее можно рассматривать только двумерную задачу, решая первые два уравнения из системы (4).

Нахождение корней характеристичного уравнения

Характеристичные корни для уравнений в вариациях (4) находятся численным методом, основанным на классической теории Флоке [10]. Этот метод был применен Денби [1] и Беннеттом [2]. Введем новые переменные

$$x_1=u,\quad x_2=v,\quad x_3=u',\quad x_4=v',$$

тогда уравнения в вариациях принимают вид

$$x' = Ax, \tag{5}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ и } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Phi\Omega_{xx} & \Phi\Omega_{xy} & 0 & 2 \\ \Phi\Omega_{yx} & \Phi\Omega_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi = (1 + e\cos\varphi)^{-1}.$$

Из теории Флоке известно, что характеристичные корни s_k ($k = 1, 2, 3, 4$) являются решениями уравнения

$$\det(C - Is) = 0, \tag{6}$$

где I — единичная матрица, а

$$C = X^{-1}(\varphi)X(\varphi + T),$$

$X(\varphi)$ — фундаментальная матрица уравнения (5), $T = 2\pi$ — период коэффициентов этого уравнения. Если выбрать $X(0) = I$, то $C = X(2\pi)$. Когда корни в (6) определены, то четыре независимых вектора решений $x_{(k)}$ обладают свойством

$$x_{(k)}(\varphi + T) = s_k x_{(k)}(\varphi),$$
$$k = \overline{1, 4}.$$

Таким образом, нормальное решение периодично, если $s_k = 1$. Когда $X(\varphi)$ является линейной комбинацией $x_{(k)}$, устойчивость точек либрации определяется по известным s_k. Система (4) является гамильтоновой, и поэтому корнями уравнения (6) будут s, s^{-1} и комплексно сопряженные им $\bar{s}$ и $\bar{s}^{-1}$. Если все корни лежат на единичной окружности, то точки либрации будут устойчивы в первом приближении. Существование хотя бы одного вещественного или комплексного корня неединичного модуля приводит к неустойчивости движения [2]. Характеристичное уравнение имеет вид [2]

$$s^4 + ps^3 + qs^2 + ps + 1 = 0. \tag{7}$$

Поэтому для нахождения корней вовсе необязательно решать уравнение (6). Нужно только найти коэффициенты при кубическом и квадратичном членах в (7). Они связаны с элементами c_{ij} матрицы C следующими соотношениями [2]:

$$p = \sum_{i=1}^{4} c_{ii}, \quad q = \sum_{j=i+1}^{4} \sum_{i=1}^{4} (c_{ii}c_{jj} - c_{ij}c_{ji}).$$

Вычисления

Четыре вектора решений, из которых состоит матрица $C = X(2\pi)$, были получены прямым интегрированием уравнения (6) методом Рунге—Кутта четвертого порядка с фиксированным шагом. Корни характеристичного уравнения (7) найдены методом Берстоу—Хичкока. Точность вычислений убывала с увеличением e и уменьшением μ. Для точек L_4 и L_5 точность до четырех знаков после запятой получалась при $e < 0{,}9$ на всем диапазоне значений μ. Для L_3 исследования могли быть проведены только при $\mu > 0{,}3$, а для точки L_1 — в области от $e < 0{,}9$,

$\mu=0$ до $e>0,6$, $\mu=1/2$ — с точностью до трех знаков после запятой. Точность значений для L_2 резко уменьшалась с увеличением e. Значения параметров q_1 и q_2 лежали в интервале [0, 1]. Вычисления проводились на IBM PC 386 AT.

Результаты

1. Треугольные точки либрации. На рис. 1 на плоскости e, μ изображено изменение области устойчивости при уменьшении значения параметра q_2. При этом $q_1=1=\text{const}$. Кривая, представляющая случай, когда $q_1=q_2=1$, совпадает с кривой Денби [1]. При уменьшении

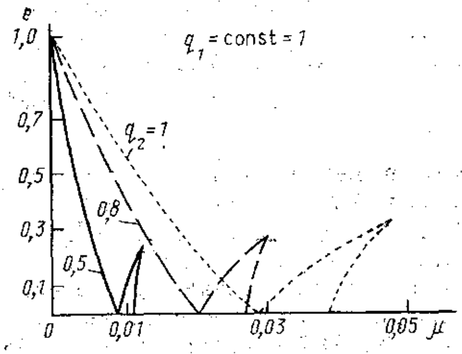

Рис. 1

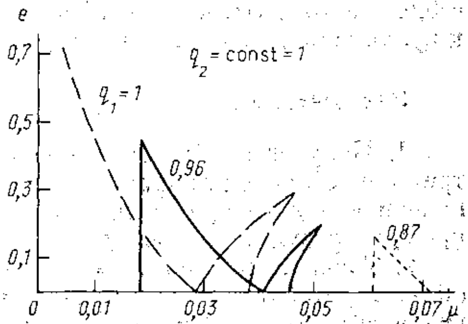

Рис. 2

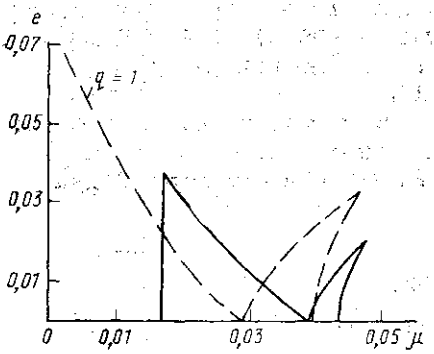

Рис. 3

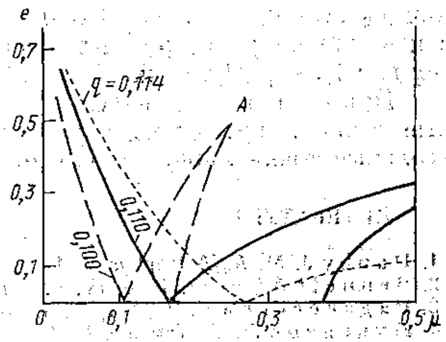

Рис. 4

q_2 область устойчивости тоже уменьшается, одновременно сдвигаясь влево. На рис. 2 показан случай, когда $q_2=1=\text{const}$, а параметр q_1 уменьшался. Относительно кривой Денби область устойчивости сдвигается вправо. Появление вертикального отрезка обусловлено тем, что один из корней, лежащих на единичной окружности, достигает в точке, лежащей на этом отрезке, значения, равного -1. Если уменьшать q_1 и q_2 по биссектрисе, т. е. $q_1=q_2=$ $=q$, то область устойчивости также сдвигается вправо ($q=0,96$, рис. 3).

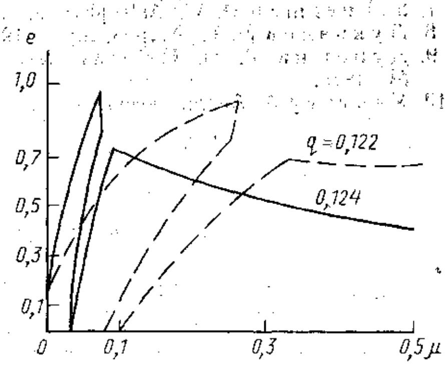

Рис. 5

2. Прямолинейные точки либрации. При исследовании корней характеристических уравнений для прямолинейных точек либрации L_1 и L_3 не было обнаружено областей устойчивости. Результаты исследований для точки либрации L_2 приведены на рис. 4. На этих графиках $q_1=q_2=q$. Когда $q=0{,}100$, область устойчивости ограничена кривой, аналогичной кривой Денби для треугольных точек либрации. При уменьшении q уменьшается и область устойчивости, стягиваясь к началу координат. Если же q увеличивать, то область устойчивости также увеличивается, сдвигаясь вправо. При этом точка A стремится к прямой $\mu=0{,}5$. Все кривые симметричны относительно прямой $\mu=0{,}5$. Когда $q=0{,}110$, точка A уже перешла в отрезок. Дальнейшее увеличение q приводит к тому, что отрезок движется вниз по прямой $\mu=0{,}5$. На рис. 5 изображен вид области устойчивости при μ, близких к нулю. При $q=0{,}125$ движение становится неустойчивым.

Заключение

1. Получены области устойчивости в первом приближении для треугольных точек либрации в эллиптической фотогравитационной ограниченной задаче трех тел. Эти области приведены на рис. 1—3. При $q_1=q_2=1$ результаты совпадают с результатами работы Денби [1].

2. Точки либрации L_1 и L_3 неустойчивы. Для точки L_2 получены области устойчивости, изображенные на рис. 4, 5. Кривые, ограничивающие область устойчивости, имеют вид, сходный с видом кривой Денби, но при увеличении q область устойчивости видоизменяется и увеличивается. Когда q достигает значения 0,125, движение в точке либрации L_2 становится неустойчивым. Полученные результаты согласуются с известными ранее результатами при $e=0$. Так, при $\mu=0{,}5$ и $q_1=q_2=q$ для $1/9\leqslant q\leqslant 1/8$ точка L_2 устойчива [6].

При одинаковых значениях параметров прямолинейные и треугольные точки либрации одновременно устойчивыми быть не могут. Треугольные точки либрации или обе устойчивы, или обе неустойчивы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Danby J. M. A.//Astrophys. J. 1965. **69**. P. 165.
2. Bennett A.//Icarus. 1965. IV. P. 177.
3. Радзиевский В. В.//Астрон. журн. 1953. **30**. С. 256.
4. Лукьянов Л. Г.//Там же. 1984. **61**. С. 564.
5. Куницин А. Л., Турешбаев А. Т.//Письма в Астрон. журн. 1983. **9**. С. 432.
6. Куницин А. Л., Турешбаев А. Т.//Там же. 1985. **11**. С. 145.
7. Schuerman D. W.//Astrophys. J. 1980. **238**. P. 337.
8. Лукьянов Л. Г.//Астрон. журн. 1986. **63**. С. 1222.
9. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., 1978.
10. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М., 1967.

Поступила в редакцию
26.01.96