

УДК 534.22

МОЩНЫЙ ФОКУСИРОВАННЫЙ УЛЬТРАЗВУК: НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ, ВОЗБУЖДЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН И МЕДИЦИНСКАЯ ДИАГНОСТИКА

О. В. Руденко

(кафедра акустики)

Дан обзор явлений, сопровождающих фокусирование мощных ультразвуковых пучков. Показана возможность увеличения радиационной силы и сужения области ее локализации при использовании нелинейного режима фокусировки. Предложен способ создания ударных фронтов в фокусе за счет синтеза специального исходного профиля, позволяющий транспортировать волновую энергию почти без потерь и организовать локальное ее выделение в фокусе, «включив» нелинейное поглощение. Развита теория нового высокочувствительного диагностического метода, основанного на дистанционном возбуждении низкочастотных сдвиговых волн в мягких биологических тканях с помощью мощного модулированного ультразвука.

Проблема фокусировки мощных акустических волн и волновых пучков связана в основном с развитием ультразвуковых технологий и совершенствованием приборов медицинской техники. С точки зрения физики нелинейных волн процесс создания предельно сильных полей в фокальной области интересен потому, что при его описании требуется одновременно учесть нелинейные, диссипативные и дифракционные эффекты. Пренебрежение хотя бы одним из них даст искаженную картину гармонического состава и интегральных характеристик волны — средней интенсивности и мощности пучка, а также полей радиационного давления и приращения температуры, определяющих воздействие ультразвука на среду.

Решение столь сложных задач стало принципиально возможным лишь благодаря использованию аппарата нелинейных эволюционных уравнений. Эти уравнения были получены в работах академика Р. В. Хохлова, опубликованных совместно с рядом его учеников и коллег: С. И. Солуяном, К. А. Наугольных, А. Л. Поляковой, Е. А. Заболотской и О. В. Руденко [1—5]. С использованием предложенного Р. В. Хохловым метода медленно изменяющегося профиля вначале удалось вывести уравнение эволюционного типа [1], описывающее искажение формы профиля плоских волн, бегущих в нелинейной среде с поглощением. Затем было получено аналогичное уравнение для сферических сходящихся и расходящихся волн [2]. С помощью последнего был исследован процесс концентрации волновой энергии, но без учета дифракции.

Наиболее интересным из описанных в работе [2] явлений оказался эффект двукратного формирования ударного фронта (рис. 1). Гармоническая волна излучается пульсирующей сферой радиуса x_0 и сходится к ее центру $x=0$. Удобно радиальную координату волны x нормировать на характерный нелинейный масштаб x_s — расстояние, на котором формируется разрыв [6], т. е. ввести безразмерную координату $z=x/x_s$. На рис. 1 изображен процесс искажения одного полупериода волны для значений безразмерных параметров $x_0/x_s=10$ и $x_s/x_a=0,1$, где x_a — расстояние, на котором амплитуда волны в результате линейного поглощения уменьшится в e раз.

Рисунок 1 показывает, как исходная ($z=10$) гармоническая волна искажается в процессе ее схождения к фокусу. На профиле волны, соответствующем координате $z=8,2$, уже отчетливо виден крутой пе-

редний фронт; профиль принимает пилообразную форму. После этого максимальное возмущение в волне начинает быстро уменьшаться (из-за появления нелинейного затухания на ударном фронте), а фронт расширяется — до кривой $z=4,5$. Ширина фронта достигает максимального значения в точке $z \approx 4$; в ее окрестности процесс нелинейного затухания «пилы» ослаблен.

По мере дальнейшего приближения к фокусу, в области $4 > z > 0$, пиковое возмущение вновь начинает расти, поскольку сходимость берет верх над диссипацией. Ударный фронт соответственно сужается [6, 7].

На рис. 2 [8] приведены зависимости коэффициента усиления

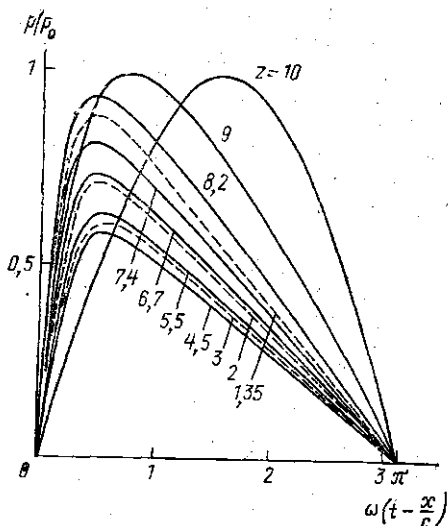


Рис. 1

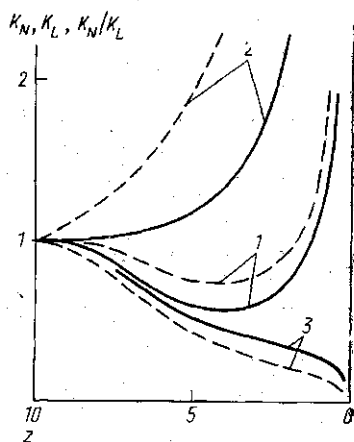


Рис. 2

$K_N(z)$ нелинейной фокусирующей системы от радиальной координаты z , $10 > z > 0$ (кривые 1). Для сравнения кривыми 2 показана зависимость усиления $K_L(z)$ линейного фокусатора. Отношение K_N/K_L изображено с помощью кривых 3. Все штриховые линии отвечают идеальной, сплошные — диссипативной среде, у которой $\chi_s/\chi_a = 0,1$.

Видно, что нелинейное поглощение сильно понижает усиление; в окрестности точки $z=4$, где ширина фронта стабилизируется, зависимость $K_N(z)$ имеет минимум.

Однако подход к исследованию одномерных сходящихся волн, предложенный в работе [2], не позволял учесть эффекты дифракции, существенно влияющие на ультразвук в фокальной области. Математической основой для изучения дифрагирующих пучков послужило уравнение, опубликованное в работе [4] и называемое ныне уравнением Хохлова—Заболотской. Это одно из основных уравнений теории нелинейных волн [9]. Оно широко используется сегодня как для изучения проблем нелинейной фокусировки, так и для решения конкретных прикладных задач [10]. Об аналитических и численных методах анализа уравнения Хохлова—Заболотской и полученных с его помощью результатах подробно рассказано в монографиях и обзорах (см., напр., [5, 6, 8, 10, 11]).

Один из результатов (необходимый для дальнейшего изложения), относящийся к трансформации профиля интенсивной ультразвуковой

волны при ее схождении к фокусу, показан на рис. 3 [12]. Кривые построены для следующих отношений характерных нелинейной x_s и дифракционной x_d длин к фокальному расстоянию x_0 : $x_s/x_0=3,3$, $x_d/x_0=10$. Таким образом, здесь существенны оба эффекта — нелинейность и дифракция. Цифры у кривых соответствуют пройденному волной пути, нормированному на расстояние x_0 от излучателя до фокуса. Наряду с процессами увеличения амплитуды и укрупнения переднего фронта, отмеченными на рис. 1, здесь наблюдается дифракционный сдвиг профиля как целого вперед. В геометрическом фокусе ($x=x_0$)

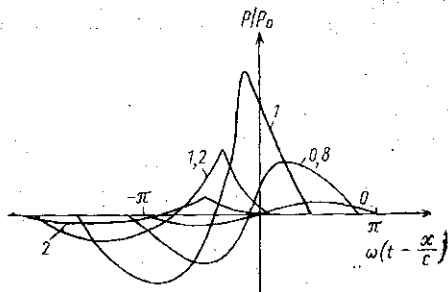


Рис. 3

из-за дефазировки гармоник, связанной с различным влиянием дифракции на них, профиль становится несимметричным; область положительного давления заостряется и усиливается заметнее. Сразу же за фокусом (кривая $x/x_0=1,2$) профиль волны приобретает вид, похожий на производную от профиля перед фокусом (кривая $x/x_0=0,8$).

Отметим, что нелинейность может не только уменьшать коэффициент усиления фокусатора за счет внесения дополнительного затухания (см. рис. 2), но и увеличивать его в присутствии дифракции за счет более «острой» фокусировки высших гармоник, генерируемых волной основной частоты. Этот обратный эффект возможен, если нелинейное затухание не приводит к заметным потерям энергии, т. е. если

пилообразная волна успевает сформироваться лишь на подходе к фокальной области [13].

Полная картина трансформации профиля ультразвуковой волны при ее фокусировке вовнутрь биологической ткани типа печени (линейное затухание $\alpha \approx 0,008$ см⁻¹ на частоте $f=1$ МГц, его частотная зависимость $\alpha \sim f$) показана на рис. 4, а, б для значений $x_d/x_0=10$, $x_s/x_0=10$. Видно, что на первом этапе, при подходе к фокусу (рис. 4, а), волна усиливается; ее передний фронт становится крутым, почти вертикальным, а полупериоды сжатия и разрежения неодинаковы (ср. с рис. 3). Второй этап, связанный с прохождением волны через фокус, иллюстрирован рис. 4, б. В точке геометрического фокуса на месте крутого фронта формируется узкий и высокий пик; однако он

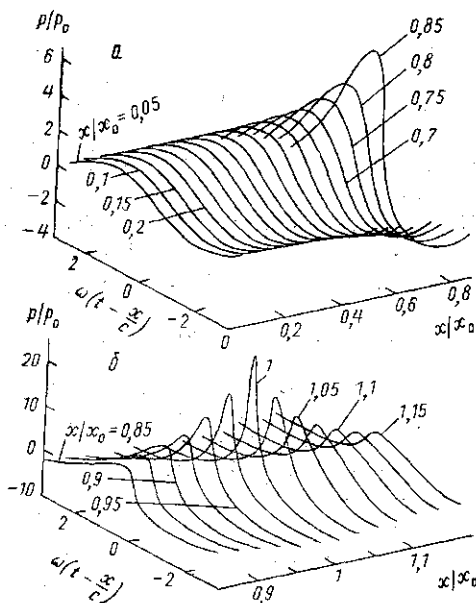


Рис. 4

существует лишь в малой окрестности $x=x_0$, где нелинейные искажения не успевают накопиться. Быстрые изменения формы профиля на этом этапе обусловлены дифракционными сдвигами фаз между различными

гармониками (геометрической дисперсией в ограниченных пучках [6]), разрушающими ударный фронт.

Во многих приложениях требуется обеспечить локальность ультразвукового воздействия, т. е. создать наибольшие радиационные силы и приращения температуры в малом объеме среды. Для этого, очевидно, нужно оптимизировать геометрические параметры фокусирующего излучателя и частоту волны. Однако для мощных ультразвуковых полей появляются принципиально новые проблемы, связанные с выбором оптимальных интенсивности и формы профиля исходного возмущения. Удивительно, что эти проблемы ранее почти не исследовались, несмотря на то что нелинейные режимы типичны для работы медицинской техники, используемой в ультразвуковой хирургии, терапии, а также в некоторых диагностических приборах [14].

На рис. 5 показано, как изменяются вдоль оси полная мощность

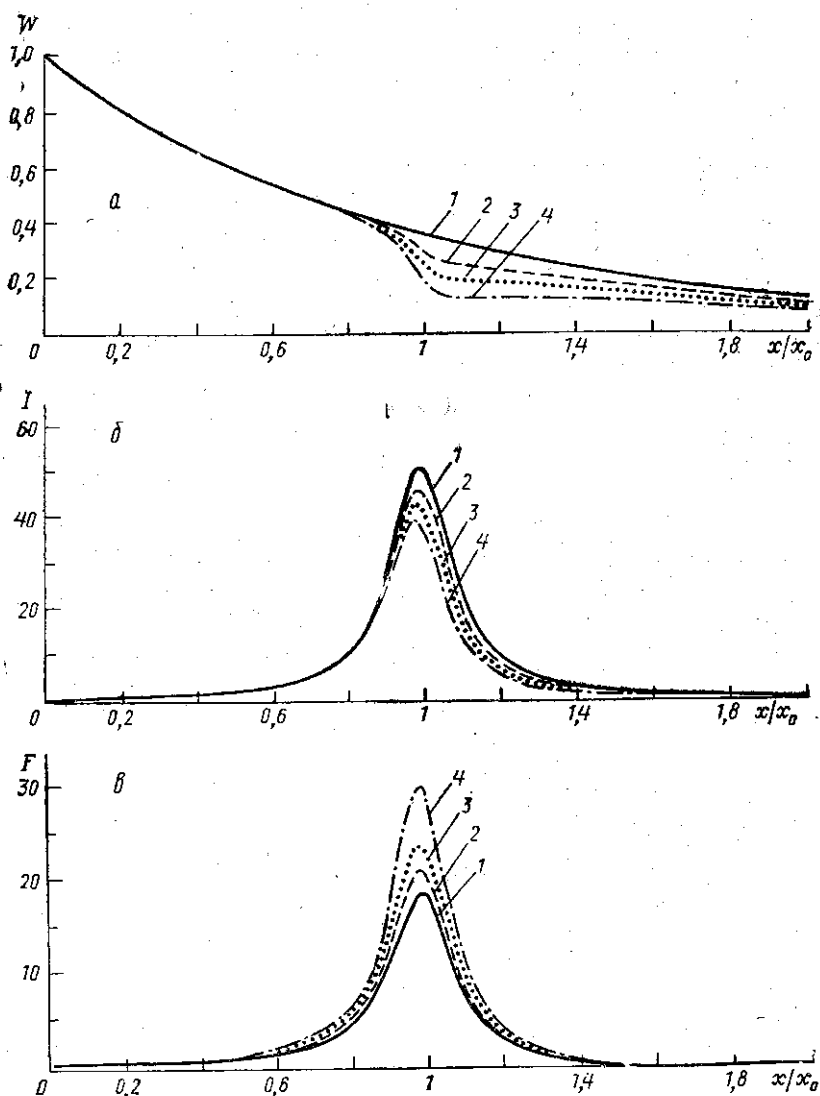


Рис. 5

$W(a)$, интенсивность $I(b)$ пучка, сфокусированного в поглощающую биоткань, а также создаваемая им радиационная сила F . Кривые 1—4 отвечают возрастающим значениям нелинейности $x_0/x_s=0; 0,3; 0,4; 0,5$. Из рис. 5, а видно, как на кривой для мощности, экспоненциально убывающей с расстоянием из-за линейных диссипативных потерь, вблизи фокуса появляется провал, который углубляется с ростом нелинейности. Интенсивность (рис. 5, б) имеет в фокусе максимум; его величина уменьшается вследствие нелинейных потерь на крутом фронте волны. Напротив, пик радиационной силы (рис. 5, в) возрастает, а ширина кривой (область локализации силы) при этом уменьшается [15]. Таким образом, нелинейный режим дает преимущества при воздействии ультразвука на среду. К сожалению, принципиальный вопрос о максимально возможном увеличении радиационной силы при использовании нелинейного режима до сих пор количественно не решен. (На рис. 5 W , I и F нормированы на исходные ($x=0$) значения.)

Очевидно, что дифракционные фазовые сдвиги между гармониками вредны; разрушая ударный фронт, они уменьшают поглощение в фокальной области. Следовательно, эти сдвиги ответственны за понижение максимума радиационной силы и увеличение размеров области ее локализации.

Этот нежелательный эффект можно скомпенсировать, синтезировав на излучателе профиль сложной формы, состоящий из многих гармоник с определенными соотношениями их амплитуд и фаз. Последние выбираются так, чтобы нелинейность, дифракция и диссипация приводили к образованию ударного фронта непосредственно у фокуса. Таким образом можно осуществить транспортировку высоких плотностей энергии (без существенных потерь по пути от излучателя к фокусу) и организовать локальное выделение энергии в фокальной области, «включив» нелинейное поглощение.

Для синтеза профиля специального вида необходимо решить нелинейную обратную задачу. Соответствующий профиль изображен на рис. 6. Здесь же можно проследить за его эволюцией вплоть до появления ударного фронта вблизи фокуса.

Остановимся теперь более подробно на новой и важной проблеме, связанной с медицинским применением интенсивного ультразвука. В диагностических целях очень широко используется аппаратура для акустической томографии и эхоскопии. Эти приборы улавливают отличия между нормальной и измененной тканями по их линейным характеристикам (обычно это плотность среды или скорость звука). В последние 20 лет интенсивно исследовались также нелинейные свойства биотканей. Однако различия в этих параметрах между нормой и патологией не превышают нескольких процентов. В то же время существует иной, весьма информативный параметр, различие в котором достигает 2—3 порядков.

Известно, что, пальпируя мягкую ткань (например, молочную или предстательную железу), хирург может «на ощупь» обнаружить «уплотнение», связанное, возможно, с опухолевым новообразованием. Однако плотность опухоли практически такая же, как у здоровой ткани. Какое же изменение обнаруживает хирург? Другой пример: пловец в море может «на ощупь» обнаружить медузу. Но последняя плавает, не совершая движений; следовательно, ее плотность почти равна плотности воды. Оказывается, что в обоих случаях объект обнаруживается благодаря отличию в сдвиговом модуле упругости. Для воды модуль равен нулю, а в мягких биотканях изменяется в пределах нескольких порядков.

Измерить сдвиговый модуль упругости можно различными способами, например по скорости распространения сдвиговых волн. Однако эти волны в тканях быстро затухают, и возбуждать их необходимо вблизи той области, где проводятся измерения.

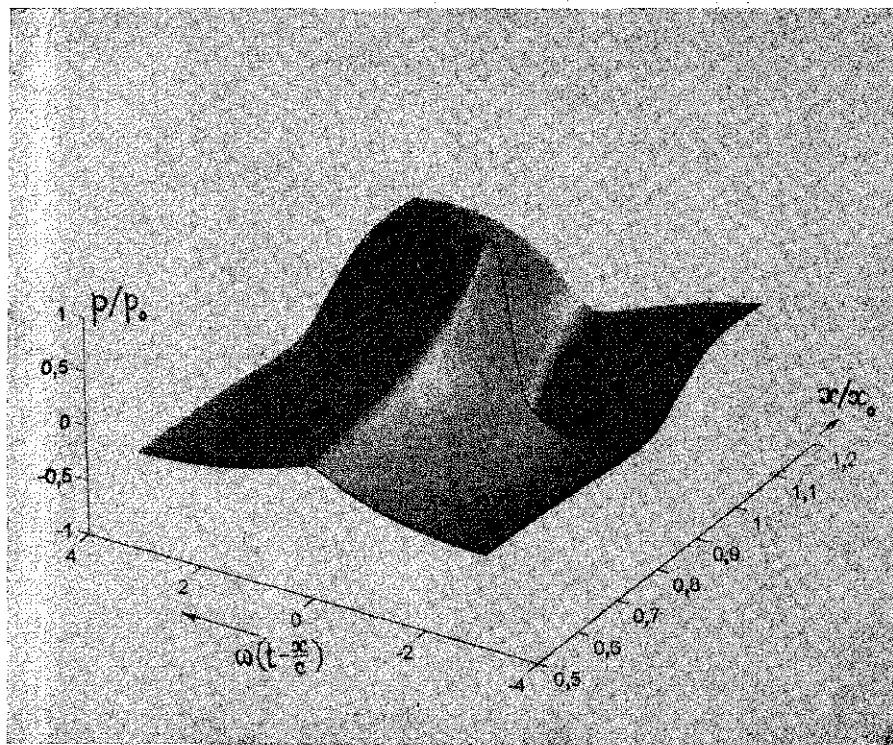


Рис. 6

Дистанционный способ возбуждения сдвиговых волн с помощью пульсирующего радиационного давления, создаваемого сфокусированным ультразвуком, предложен А. П. Сарвазяном.

Рассматривается следующая задача (см. схему на рис. 7). Ультразвуковой излучатель возбуждает в биологической ткани ультразвуковую волну на частоте 1—10 МГц, модулированную по амплитуде характерной частотой порядка килгерц.

Из-за сильных диссипативных свойств ткани ультразвук теряет значительную часть своей энергии. Для того чтобы эти потери сконцентрировать в пределах возможно более узкой области пространства, нужно использовать сфокусированный ультразвук и оптимизировать величину его частоты для данной ткани и геометрических параметров. Как показано в работе [15], локальность повышается также при использовании интенсивного ультразвука благо-

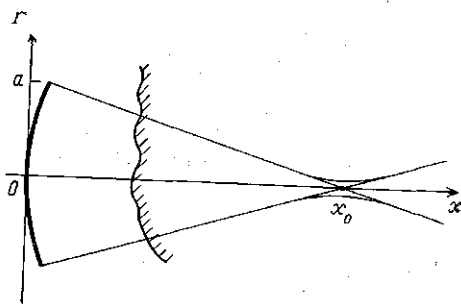


Рис. 7

даря нелинейному поглощению, выраженному сильнее всего именно вблизи фокуса.

Потери ультразвуковой энергии (а следовательно, и количества движения) в среде приводят к появлению радиационной силы. Благодаря низкочастотной модуляции величина этой силы «пульсирует» во времени, и сила является источником, вызывающим сдвиговые колебания в среде. Анализ картины сдвиговых смещений может дать полезную информацию для определения сдвиговых модулей среды, которые необходимо знать для многих биофизических и медицинских приложений.

Итак, сигнал на излучателе имеет вид

$$p(x=0, r, t) = p_0 \Phi \left(\frac{r^2}{a^2} \right) \varphi(\Omega t) \sin \omega \left(t + \frac{r^2}{2cx_0} \right). \quad (1)$$

Здесь p_0 — амплитуда давления на оси пучка, совпадающей с осью x , r — координата в плоскости, перпендикулярной к оси, Ω — низкая частота модуляции, ω — высокая ультразвуковая частота. Функция Φ описывает поперечный профиль пучка, функция φ — форму огибающей.

Уравнение распространения акустического пучка с учетом нелинейных и диссипативных эффектов, а также дифракции описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\epsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_0^\infty K(\xi) p(x, \tau - \xi) d\xi \right] = \frac{c}{2} \Delta_\perp p. \quad (2)$$

Здесь c — скорость звука, ρ — плотность среды, ϵ и γ — нелинейный и диссипативный параметры, $\Delta_\perp$ — лапласиан, действующий на поперечную координату r , K — ядро подынтегрального выражения, структура которого определяется дисперсионными и диссипативными характеристиками среды (их частотными зависимостями). В уравнении (2) использована типичная для нелинейной акустики [6] переменная $\tau = t - x/c$ — время в бегущей системе координат.

Уравнения типа (2) были предложены в работе [5]. Процедура определения ядра K для данной среды описана в книге [16]. В том случае, когда запаздыванием под интегралом (2) можно пренебречь и положить

$$\gamma K(\xi) = \frac{b}{2c^3 \rho} \delta(\xi), \quad (3)$$

где δ — дельта-функция Дирака, b — эффективная вязкость среды [6], уравнение (2) перейдет в известное уравнение Хохлова—Заболотской—Кузнецова [10]. Для биологических тканей, где частотная зависимость коэффициента поглощения имеет обычно вид $\alpha \sim \omega^{1+\nu}$ (здесь $0 < \nu < 1$), соответствующее ядро должно иметь форму

$$K = \xi^{-\nu}. \quad (4)$$

Ядро (4) описывает «память» среды, затухающую во времени по степенному закону.

Уравнения типа (2) выводятся из уравнений механики сплошной среды, дополненных модельными связями между механическими параметрами, которые учитывают состояние среды и неравновесные процессы, идущие внутри нее.

Для вывода уравнения (2) необходимо сделать предположения о скоростях изменения давления p и компонент колебательной скорости и вдоль оси пучка и в ортогональном ей направлении [6, 10]:

$$p = \mu P(\tau = t - x/c, x_1 = \mu x, r_1 = \sqrt{\mu} r),$$

$$u \equiv u_x = \mu U(\tau, x_1, r_1), \quad (5)$$

$$\dot{v} \equiv u_y = \mu \sqrt{\mu} V(\tau, x_1, r_1).$$

Предположения (5) означают, что «быстрая» зависимость от переменной τ связана с процессом распространения волны вдоль оси x . Кроме того, параметры пучка изменяются медленно (со скоростью $\sim \sqrt{\mu}$, где $\mu \ll 1$ — малый параметр задачи) в ортогональном оси направлении r и еще более медленно (со скоростью $\sim \mu$) — с увеличением пройденного волной расстояния x . Справедливость предположений (5) неоднократно проверялась конкретными расчетами линейных и нелинейных задач на основе уравнений типа (2) (см., напр., [10], где уравнение Хохлова—Заболотской—Кузнецова использовано для расчетов параметрических приборов гидроакустики).

Формальные предположения (5) имеют наглядный физический смысл. В задачах, где необходимо учитывать нелинейность, затухание и дифракцию, возникают характерные комбинации параметров, имеющие размерность длины:

$$x_s = \frac{c^3 \rho}{\varepsilon \omega \rho_0}, \quad x_a = \frac{2c^3 \rho}{b \omega^2}, \quad x_d = \frac{\omega a^2}{2c}. \quad (6)$$

Их смысл: как и выше, x_s — это нелинейная длина, или расстояние образования разрыва, x_a — длина поглощения, а x_d — дифракционная длина, зависящая от радиуса a излучающего элемента. Все три характерных расстояния (6) могут соотноситься между собой произвольным образом, но отношение длины волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ к любой из величин x_s , x_a или x_d должно быть малой величиной, принимаемой в качестве малого параметра μ данной задачи.

Решив уравнение (2) с граничным условием (1), можно рассчитать поле акустического давления. Зная это поле, удастся совершить следующий шаг — рассчитать поле радиационных сил, создаваемое в результате поглощения ультразвуковой волны. В каждом конкретном случае радиационная сила должна определяться с учетом диссипативных свойств данной среды. Такая задача может оказаться весьма сложной, и для ее решения необходимо проводить специальное исследование. Однако в данной работе мы обсуждаем общую структуру математической модели процесса и поэтому для простоты дальнейших рассуждений ограничимся здесь моделью вязкой водоподобной среды, для которой радиационная сила может быть записана в виде [17, 18]

$$F = -\frac{1}{c^2 \rho^2} b' \rho \operatorname{grad} \operatorname{div} u. \quad (7)$$

Здесь $b' = \xi + 4\eta/3$, где ξ и η — сдвиговая и объемная вязкости, черта сверху означает усреднение по периоду волны. Выражение (7) конкретизировано в работе [18] для дифрагирующего гауссова пучка малой интенсивности. В работе [15] дан детальный анализ поведения осевой компоненты силы (7) с учетом как дифракции, так и нелинейного поглощения волны.

Принимая во внимание темпы пространственного изменения переменных (5) по различным направлениям, а также известные связи

между этими переменными для бегущих волн, получим из формулы (7) следующие выражения для осевой и радиальной компонент силы:

$$F_x = \frac{b'}{c^3 \rho^3} \left(\frac{\partial P}{\partial \tau} \right)^2 = \mu^2 \Phi_x(\mu x, \sqrt{\mu} r, \sqrt{\mu} t),$$

$$F_r = \frac{b'}{c^3 \rho^3} P \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla_{\perp} P = \mu^{5/2} \Phi_r(\mu x, \sqrt{\mu} r, \sqrt{\mu} t). \quad (8)$$

Медленное изменение силы во времени связано с низкочастотной модуляцией акустического поля.

Теперь перейдем к последнему этапу в нашем описании схемы решения задачи — к определению поля смещений, вызываемых в среде радиационными силами (8). Рассмотрим упругую изотропную среду, характеризуемую модулями упругости k и m по отношению к объемным и сдвиговым деформациям соответственно. Поле смещений s в такой среде описывается уравнением Ламе динамической теории упругости

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \left(k + \frac{m}{3} \right) \text{grad div } s - m \Delta s - \eta \frac{\partial}{\partial t} \Delta s = \rho F. \quad (9)$$

Темпы (8) изменения силы F во времени и в пространстве «навязывают» аналогичное поведение и полю смещения s . Следовательно, в уравнении (9) нужно положить

$$s_x = \mu S_x(\mu x, \sqrt{\mu} r, \sqrt{\mu} t), \quad s_r = \mu^{3/2} S_r(\mu x, \sqrt{\mu} r, \sqrt{\mu} t). \quad (10)$$

Подставляя (10) и (8) в векторное уравнение (9) и проецируя его на осевое и радиальное направления, получим два упрощенных скалярных уравнения для компонент смещения:

$$\rho \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} - \left(m + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta_{\perp} s_x = \rho F_x, \quad (11)$$

$$\rho \frac{\partial^2 s_r}{\partial t^2} - \left(k + \frac{4}{3} m + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta_{\perp} s_r = \rho F_r + \left(k + \frac{m}{3} \right) \frac{\partial^2 s_x}{\partial x \partial r}. \quad (12)$$

В уравнении (11) все сохраненные члены имеют порядок малости μ^2 , в уравнении (12) — порядок $\mu^{5/2}$. Члены более высоких порядков малости в обоих уравнениях отброшены.

Уравнение (11) не зависит от уравнения (12) и имеет наглядный физический смысл. Если пренебречь уравнением (12) и наиболее медленной из зависимостей — от продольной координаты x , уравнение (11) будет описывать осевые сдвиговые колебания $s_x(t, r)$, профиль которых зависит от поперечной координаты r .

Если стремиться к более точному решению задачи с учетом уравнения (12) для величин, малых по сравнению с теми, которые оставлены в уравнении (11), то возникнут новые виды движения в рассматриваемой модели. Уравнение (11) по-прежнему можно решать независимо и по заданному полю радиационных сил F_x (8) рассчитать продольные сдвиговые смещения s_x . Затем следует подставить s_x в правую часть уравнения (12), где после этого будут присутствовать два независимых члена. Один из них (F_r) ответствен за возбуждение радиальных смещений s_r непосредственно соответствующей компонентой радиальной силы. Второй член, пропорциональный $\partial^2 s_x / \partial x \partial r$, описывает волну радиальных смещений, возбуждаемую пространственными градиентами поля продольных смещений.

При этом интересно отметить, что если осевое смещение s_x в рассматриваемом приближении есть чисто сдвиговая волна, то радиальное смещение s_r , как это следует из уравнения (12), представляет собой продольную (т. е. звуковую) волну.

Из сказанного выше следует, что проблема возбуждения низкочастотных колебаний упругой среды, возбуждаемых пульсирующей радиационной силой, которая создается за счет поглощения средой модулированной высокочастотной ультразвуковой волны, — это сложная, в общем случае нелинейная задача, содержащая большое число независимых параметров. Поэтому предложенная выше упрощенная модель процесса делает реальной возможность получения численных оценок и проведения расчетов с целью понимания основных особенностей рассматриваемого явления.

Итак, в наиболее простой ситуации, для вязкой теплопроводной среды, с учетом всех сделанных оговорок математическая модель имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right] = \frac{c}{2} \Delta_{\perp} p, \quad (13)$$

$$F_x = \frac{b'}{c^3 \rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)^2, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} - \left(c_t^2 + v \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta_{\perp} s_x = F_x, \quad (15)$$

где $c_t = \sqrt{m/\rho}$ — скорость поперечных волн, $v = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость. Здесь (13) — уравнение Хохлова—Заболотской—Кузнецова, описывающее интенсивный дифрагирующий ультразвуковой пучок в диссипативной среде. Решая (13) с граничным условием (1), находим поле p акустического давления. Зная поле p , по формуле (14) рассчитываем поле F_x радиационных сил. И наконец, зная поле F_x , рассчитываем поле s_x сдвиговых смещений.

Существует, однако, особый случай, для которого необходимо специально обсудить справедливость одного из уравнений (а именно уравнения (15)), составляющих предлагаемую математическую модель. Этот случай относится к средам, обладающим сдвиговым модулем упругости, очень малым по сравнению с величиной объемного модуля: $m \ll k$. В силу этого соотношения некоторые из отброшенных в уравнении (9) членов могут быть не малы по сравнению с оставленными. Видно, что неравенство

$$\mu^3 \left(k + \frac{m}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r s_r)}{\partial x \partial r} \right) \ll \mu^2 m \Delta_{\perp} s_x \quad (16)$$

может не выполняться в случае $m/k \sim \mu$. Однако в эксперименте по измерению сдвиговых волн, представляющем основной интерес, из-за их сильного затухания размер образцов должен быть порядка нескольких длин сдвиговых волн; в противном случае их регистрация будет затруднена. В то же время в случае $m/k \ll 1$, когда неравенство (16) может нарушаться, длина продольной волны оказывается много большей размеров образца и, следовательно, среду можно считать несжимаемой. Но при этом неравенство (16) будет выполнено автоматически, поскольку левая часть (16) для несжимаемой среды ($\text{div } \mathbf{S} = 0$) тождественно обращается в нуль, и уравнение (15) вновь оказывается справедливым. Решив его для продольной компоненты смещения s_x , из условия $\text{div } \mathbf{s} = 0$ можно рассчитать радиальную компоненту смещения s_r .

Приближения, в которых получена система уравнений (13)–(15), были использованы в работе [15] для расчета радиационной силы и детального анализа ее структуры как для слабых, так и для интенсивных волн, на поведении которых заметно сказываются нелинейные эффекты. Однако поле смещений s_x на основе уравнения (15) ранее не анализировалось, хотя именно этот вопрос представляет наибольший интерес.

Ограничимся расчетом поля смещений, создаваемых «линейными» радиационными силами (14), которые в свою очередь формируются за счет линейного поглощения фокусированного гауссова пучка гармонической волны (1). Выражение для этой силы (см., напр., [15, 17]) имеет вид

$$F_x = \frac{2\alpha I}{c_l \rho f^2(x)} \exp \left\{ -2\alpha x - \frac{2r^2}{a^2 f^2} \right\} \varphi^2(\Omega t). \quad (17)$$

Здесь I — интенсивность волны в центре излучателя, $\alpha = \alpha_a^{-1}$ — коэффициент поглощения ультразвуковой волны, $c_l = c$ — скорость продольных волн,

$$f = [(1 - x/x_0)^2 + (2c_l x / (\omega a^2)^2)]^{1/2} \quad (18)$$

— функция, описывающая поведение ширины пучка и амплитуды волны с учетом фокусировки и дифракции, x_0 — расстояние от излучателя до точки геометрического фокуса.

Подставим выражение для силы (17) в уравнение (15). Для его решения воспользуемся интегральным преобразованием Ханкеля и перейдем от смещения $s = s_x$ к его трансформанте $\tilde{s}$:

$$s(r, t) = \int_0^\infty \tilde{s}(\lambda, t) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (19)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Несложно показать, что поведение трансформанты $\tilde{s}$ во времени описывается уравнением вынужденных затухающих колебаний

$$\frac{d^2 \tilde{s}}{dt^2} + \lambda^2 v \frac{d\tilde{s}}{dt} + \lambda^2 c_l^2 \tilde{s} = \frac{\alpha a^2 I}{2c_l \rho} \exp \left\{ -2\alpha x - \frac{a^2 f^2}{8} \lambda^2 \right\} \varphi^2(\Omega t). \quad (20)$$

Решая это обыкновенное уравнение (20) и возвращаясь в соответствии с преобразованием Ханкеля (20) к смещению s , получим общее решение

$$s = \frac{\alpha a^2 I}{2c_l \rho} \exp \{ -2\alpha x \} \int_0^\infty \frac{\exp \{ -a^2 f^2 \lambda^2 / 8 \} J_0(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2 c_l^2 - \lambda^4 v^2 / 4}} \lambda d\lambda \int_0^t \varphi^2(\Omega t') \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\lambda^2 v}{2} (t - t') \right\} \sin [V \lambda^2 c_l^2 - \lambda^4 v^2 / 4 (t - t')] dt'. \quad (21)$$

Формула (21) описывает поле смещений в двумерной пространственной области (x, r) в любой момент времени t . Предполагается, что сигнал огибающей $\varphi(\Omega t)$ «включается» в момент $t=0$.

В том случае, когда ультразвук модулирован по гармоническому закону, $\varphi^2 = \sin \Omega t$, решение удобно представить в виде

$$s = \frac{\alpha a^2 I}{2c_l \rho} \exp \{ -2\alpha x \} \int_0^\infty \frac{\exp \{ -a^2 f^2 \lambda^2 / 8 \} J_0(\lambda r)}{\sqrt{(\lambda^2 c_l^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega \lambda^2 v)^2}} \times \\ \times \sin \left(\Omega t - \arctg \frac{\Omega \lambda^2 v}{\lambda^2 c_l^2 - \Omega^2} \right) \lambda d\lambda. \quad (22)$$

Подынтегральный член в формуле (22), рассматриваемый как функция низкой частоты Ω , имеет максимум при $\Omega \approx \lambda c_t$. В том случае, когда вязкость относительно мала (безразмерная комбинация параметров $(\Omega \nu / c_t^2)^2 \ll 1$), можно приближенно положить в аргументе функции Бесселя J_0 : $\lambda = \Omega / c_t$. Вынося $J_0(\Omega r / c_t)$ из-под интеграла (22), его удастся выразить через специальные функции. Амплитуда колебаний смещения будет равна

$$|s| = \frac{\alpha a^2 I}{4 c_t c_l^2 \rho} e^{-2\alpha x} J_0\left(\frac{\Omega}{c_t} r\right) e^{-\delta} \{[\operatorname{Re} E_1(-\delta + i\delta\gamma)]^2 + [\operatorname{Im} E_1(-\delta + i\delta\gamma)]^2\}^{1/2}, \quad (23)$$

где

$$\delta = \frac{\alpha^2 f^2 \Omega^2}{8 c_l^2}, \quad \gamma = \frac{\Omega \nu}{c_t^2}, \quad (24)$$

E_1 — интегральная показательная функция комплексного аргумента, от которой берутся реальная (Re) и мнимая (Im) части.

Оценки по формуле (23) проведем для амплитуды смещения, измеренной вблизи фокуса на оси пучка. Примем следующие характерные значения параметров:

$$\omega/(2\pi) = 3 \text{ МГц}, \quad \Omega/(2\pi) = 1 \text{ кГц}, \quad a = 1 \text{ см}, \quad x_0 = 5 \text{ см}, \quad (25)$$

$$\rho = 1 \text{ г/см}^3, \quad c_l = 1,5 \cdot 10^5 \text{ см/с}, \quad c_t = 3 \cdot 10^3 \text{ см/с}, \quad I = 10 \text{ Вт/см}^2.$$

Для численных значений (25) смещения $|s|$ составляют порядка единиц микрон. Аналогичные оценки получены в работе [19] на основе упрощенной теории без учета дифракции ультразвука и затухания сдвиговых волн. Кроме того, оценки [19] подтверждены экспериментами, выполненными на моделях биологических тканей из прозрачного кремнийорганического полимера; точная регистрация смещений проводилась лазерным способом.

Расчет пространственной структуры поля смещений, описываемого формулами (20), (21), необходим для восстановления распределения сдвиговых модулей по данным экспериментальных измерений, проведение которых сейчас планируется.

Наглядное представление о картине смещений в некоторый фиксированный момент времени дает рис. 8. На этом рисунке изображены «линии тока» для векторного поля смещений $s = (s_x, s_r)$. Касательная в каждой точке к линии тока определяет направление, вдоль которого происходит колебание вектора s с частотой модуляции Ω . Расстояние

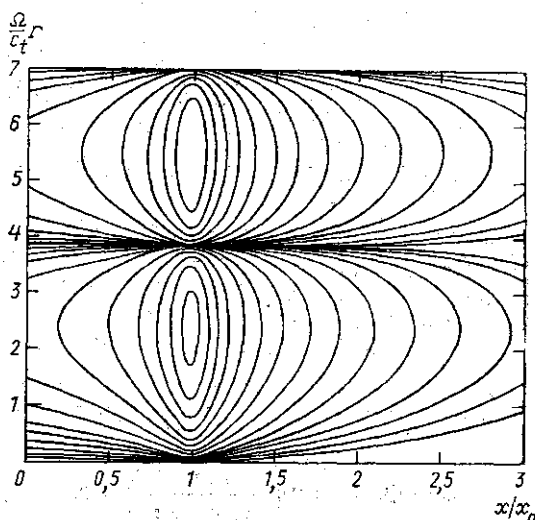


Рис. 8

вдоль оси абсцисс измерено в единицах фокальных длин x_0 . Следовательно, значение $x/x_0=1$ соответствует точке геометрического фокуса. По оси ординат отложена величина $(\Omega/c_t)r$. Таким образом, на рис. 8 изображена картина поля смещений в пределах одной длины сдвиговой волны.

Представление об относительных величинах s_x и s_r дает рис. 9. На рис. 9, а изображено пространственное распределение амплитуды

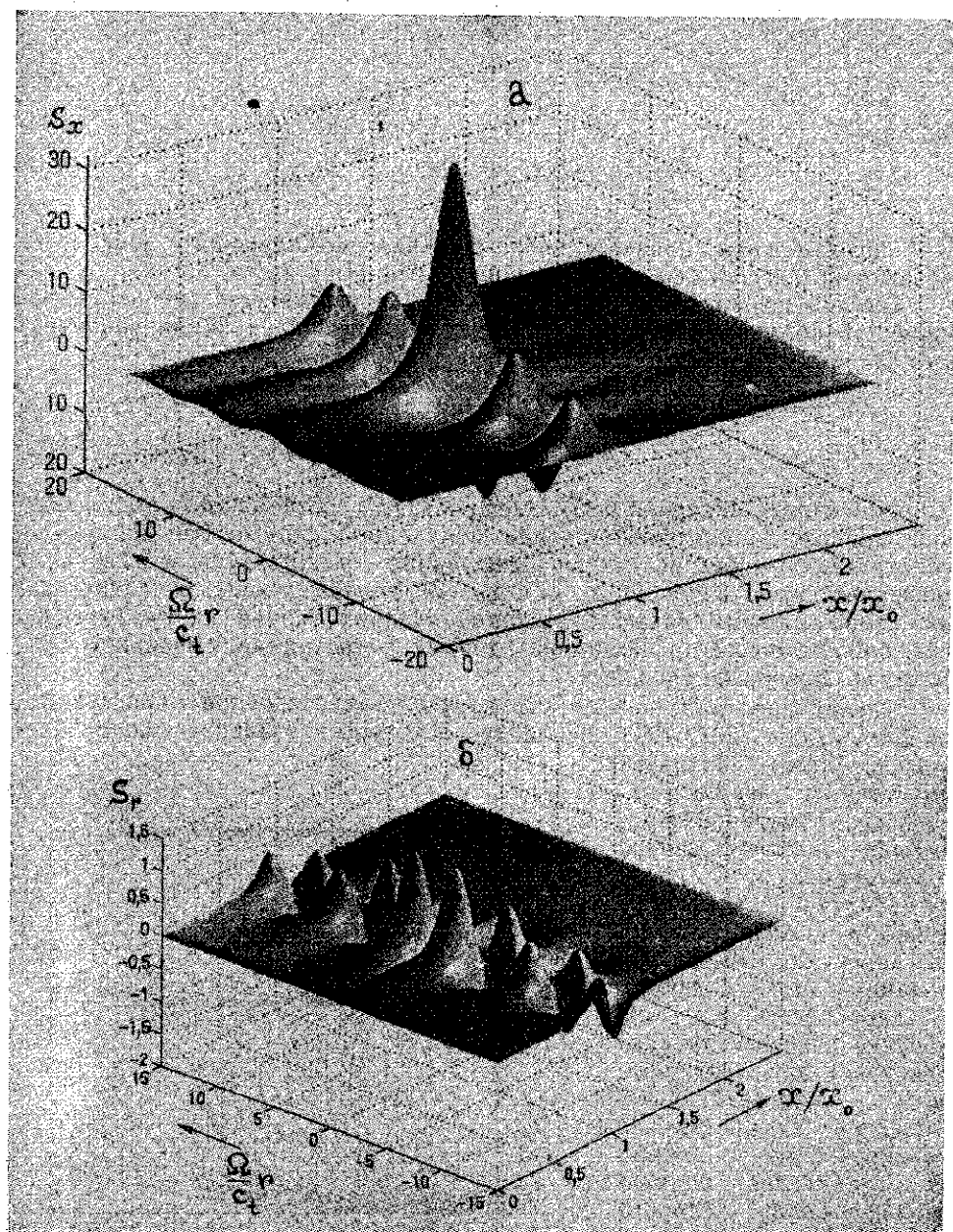


Рис. 9

колебаний осевого смещения $s_x(x, r)$, а на рис. 9, б — такая же поверхность для амплитуды радиального смещения $s_r(x, r)$. Видно, что абсолютный максимум s_x достигается вблизи геометрического фокуса $x=x_0$ на оси ультразвукового пучка $r=0$. Соседние экстремумы удалены друг от друга на расстояние около половины длины волны. Такая структура чередующихся максимумов и минимумов характерна для ближнего поля, где бегущая волна еще не сформировалась. Однако она может и не сформироваться вовсе из-за обычно сильного затухания сдвиговых волн в тканях. Поскольку при этом экспериментальные измерения в дальнем поле провести не удается, знание картины смещений вблизи оси, показанной на рис. 8 и 9, приобретает важное значение.

Из рис. 9, б видно, что на оси пучка $r=0$ радиальных смещений нет. Два одинаковых абсолютных максимума величины s_r удалены от оси на расстояние, равное примерно половине длины сдвиговой волны. Сразу же за положительным максимумом лежит экстремум отрицательной полярности, где колебания s_r происходят в противофазе; граница между ними приблизительно лежит в сечении $x=x_0$.

Заметим, что при построении рис. 8 и 9 использовалось решение в форме (23), полученное для периодической низкочастотной модуляции ультразвукового пучка. Параметрам придавались численные значения (25). Кроме того, значение коэффициента затухания принималось таким же, как для печени. По формуле (23) рассчитывались осевые смещения s_x . Соответствующие радиальные смещения s_r находились из уравнения непрерывности $\operatorname{div} s=0$.

Случай импульсной модуляции ультразвука проанализирован в работе [19]. Там же опубликованы результаты экспериментов по измерению сдвиговых модулей.

Таким образом, в работе впервые сформулирована полная система уравнений, описывающих процесс возбуждения сдвиговых колебаний в средах типа мягких биологических тканей или слабо сшитых водоподобных полимеров под действием радиационной силы, порождаемой в результате поглощения интенсивной ультразвуковой волны. Эта система сильно упрощена по сравнению с исходными уравнениями механики сплошных сред, но тем не менее учитывает все существенные особенности рассматриваемых процессов. Такое упрощение позволяет находить аналитические решения и описывать структуру поля смещения в зависимости от большого числа параметров, характеризующих конкретные свойства среды и акустического пучка. Знание закономерностей, следующих из анализа предложенной модели, имеет важное значение для выбора оптимальных режимов (частоты ультразвука и его модуляции, геометрических параметров фокусирующей системы), при которых величина смещения в заданной точке пространства в данной среде будет максимальной. Это позволит проводить измерения малых смещений, содержащих важную информацию о сдвиговых модулях среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солуян С. И., Хохлов Р. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1961. № 3. С. 52 (Moscow University Phys. Bull. 1961. N 3).
2. Наугольных К. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В. // Акуст. журн. 1963. 9, № 1. С. 54.
3. Полякова А. Л., Солуян С. И., Хохлов Р. В. // Акуст. журн. 1962. 8, № 1. С. 107.
4. Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. // Акуст. журн. 1969. 15, № 1. С. 40.