

5. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В.//Акуст. журн. 1974. 20, № 3. С. 449.
6. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1975.
7. Васильева О. А., Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М., 1983.
8. Руденко О. В.//УФН. 1965. 165, № 9. С. 1011.
9. Руденко О. В., Хохлова—Заболотской уравнение//Физическая энциклопедия. 1996. Т. 5. С. 866—867.
10. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. Л., 1981.
11. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М., 1982.
12. Гамильтон М. Ф., Руденко О. В., Хохлова В. А.//Акуст. журн. 1996. 42, № 4. С. 600.
13. Островский Л. А., Сутин А. М.//ДАН. 1975. 221, № 6. С. 1300.
14. Применение ультразвука в медицине. Физические основы. М., 1989.
15. Rudenko O. V., Sarvazyan A. P., Emelianov S. Y.//J. Acoust. Soc. Am. 1996. 99, N 5. P. 2791.
16. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. 2-е изд. М., 1990.
17. Гусев В. Э., Руденко О. В.//Акуст. журн. 1979. 25, № 6. С. 875.
18. Kamakura T., Matsuda K., Kumamoto Y., Breazeale M. A.//J. Acoust. Soc. Am. 1995. 97, N 6. P. 2470.
19. Andreev V., Dmitriev V., Pischal'nikov Yu. et al.//Nonlinear Acoustics in Perspective: Proc. 14th Inter. Symp. on Nonlinear Acoustics. Nanjing, 1996. P. 457.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 6

УДК 534.1; 534.2; 535.1; 537.86

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

А. П. Сухоруков

(кафедра радиофизики)

Дан обзор работ по параметрически связанным трехволновым солитонам в диспергирующей анизотропной среде с квадратичной нелинейностью. Исследуется характер кооперативного самовоздействия плоских монохроматических волн. Обсуждаются свойства пространственных и временных солитонов в рамках квазиоптической теории дифракции и второго приближения теории линейной дисперсии с учетом расстройки фазовых и групповых скоростей. Рассматривается простая модель взаимофокусировки пучков и импульсов в среде с квадратичной нелинейностью. Анализируются бистабильные солитоны в случае интерференции двух каналов реактивного взаимодействия волновых пакетов при кратном соотношении частот и наличии кубической нелинейности. Прослежена эволюция предельно коротких импульсов, описываемая в численных экспериментах нелинейными уравнениями Максвелла. Сообщаются результаты экспериментов по наблюдению оптических солитонов в кристаллах с квадратичной нелинейностью.

Введение

Параметрически связанные оптические солитоны на квадратичной нелинейности, существование которых было предсказано более 20 лет назад [1, 2], привлекают все большее внимание ученых и практиков. Причем до начала 1990-х гг. публиковались только теоретические работы (см., напр., монографию [3]). Ситуация резко изменилась в 1995 г., когда были сообщены результаты первых экспериментальных исследований пространственных солитонов в пленочных и объемных оптических кристаллах с квадратичной нелинейностью [4, 5]. Безусловно, это послужило мощным толчком к продолжению и развитию

таких работ в ведущих научных центрах США, Австралии, Италии и других стран. Одновременно происходит лавинообразный рост публикаций по теории параметрических солитонов (их число приближается к сотне). Для обсуждения проблем параметрических солитонов отводятся целые секции на различных конференциях, в частности на конференции по нелинейным направленным волнам в Калифорнии (1995) [6] и на Международной конференции по квантовой электронике (1996) [7]. Столь большое внимание к параметрическим солитонам вызвано несколькими причинами: большой величиной квадратичной нелинейности (особенно органических материалов) и вследствие этого низким порогом образования солитонов, их устойчивостью к малым возмущениям в отличие от солитонов на кубической нелинейности и, наконец, возможностью управления параметрами солитонов оптическими методами (переключение направления распространения, очистка амплитудного профиля пучка от мелкомасштабной модуляции и др.). В данной работе, доложенной на Ломоносовских чтениях в 1996 г., не ставится задача дать полный обзор обсуждаемой проблемы. Акцент сделан на пионерских работах, выполненных на кафедрах волновых процессов и радиофизики физического факультета МГУ, и последних достижениях в этой весьма перспективной и важной области.

Надо сказать, что исследования по дифракции оптических и акустических волн в нелинейных средах с применением метода медленно меняющихся амплитуд начали развиваться по инициативе Р. В. Хохлова с конца 1963 г. В выполнении этих работ принял участие и автор данного обзора, будучи сначала аспирантом Рема Викторовича, а затем его сотрудником. Перенесение метода медленно меняющихся амплитуд на волновые пучки естественным образом привело к параболическим уравнениям с мнимым коэффициентом поперечной диффузии. Этот метод стал независимо развиваться во многих научных лабораториях разных стран. Первым объектом исследований стали самофокусировка и дефокусировка в средах с керровской, тепловой и другими типами нелинейности. В начале 1970-х гг. по инициативе Р. В. Хохлова и А. А. Самарского были начаты работы по численному моделированию сильно нелинейных волновых явлений. Вычислительные эксперименты по трехчастотному взаимодействию волновых пучков (или пакетов), подкрепленные оригинальной аналитической теорией, привели автора совместно с Ю. Н. Карамзиным к открытию двух новых явлений в физике нелинейных волн: взаимофокусировки и параметрически связанных солитонов в средах с квадратичной нелинейностью.

1. Нелинейная дисперсия плоских монохроматических волн

Взаимодействие волн в нелинейной среде сводится к изменению амплитуд и фаз вдоль направления распространения. Число волн, участвующих во взаимодействии, зависит от типа нелинейности и дисперсии. Для квадратично-нелинейных сред с сильной дисперсией характерно трехволновое взаимодействие на частотах $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$; в вырожденном случае взаимодействуют 1-я (ω_1) и 2-я ($\omega_2 = 2\omega_1$) гармоники. Для этих задач Р. В. Хохлов одним из первых начал развивать теорию распространения волн в нелинейной среде с помощью метода медленно меняющихся амплитуд [8]. Особенно плодотворным этот метод оказался в нелинейной оптике [9, 10]. В вырожденном по частоте случае поведение плоских монохроматических волн 1-й и 2-й гармоник описывается следующими укороченными уравнениями для комплексных

амплитуд A_j :

$$\frac{dA_j}{dz} = -i\beta_j \frac{\partial U_2}{\partial A_j^*}, \quad U_2 = A_1^2 A_2^* \exp(-i\Delta_2 k z) + \text{к. с.}, \quad (j=1, 2), \quad (1)$$

где $\beta_j = 2\pi\omega_j \chi_2 / (cn_j)$ — коэффициенты квадратичной нелинейности (для оптического кристалла), $\Delta_2 k = k_2 - 2k_1$ — расстройка волновых векторов.

В [9, 10] уравнения (1) были детально проанализированы применительно к типичным задачам нелинейной оптики: генерация 2-й гармоники, смещение частот, параметрическое усиление. Такого же типа уравнения встречаются в физике плазмы [11], гидродинамике [12], оптоэлектронике [13], оптоакустике [14] и других разделах волновой физики. Р. В. Хохлов впервые показал, что при фазовом синхронизме, $\Delta_2 k = 0$, $n_1 = n_2$, возможна полная перекачка энергии от 1-й ко 2-й гармонике:

$$A_1 = E_{10} \operatorname{ch}^{-1}(z/l_{nl}), \quad A_2 = -iE_{10} \operatorname{th}(z/l_{nl}), \quad (2)$$

где $l_{nl} = 1/(\beta_1 E_{10})$ — длина нелинейного взаимодействия. Если линейные фазовые скорости рассогласованы, $\Delta_2 k \neq 0$, то неоценимую пользу приносит два интеграла движения, сохраняющие свои значения на всем пути распространения волн:

$$I_1 = n_1 B_1^2 + n_2 B_2^2, \quad I_3 = \beta_1 B_1^2 B_2 \cos \Phi + \Delta_2 k B_1^2. \quad (3)$$

Здесь введены действительные амплитуды и фазы: $A_j = B_j \exp(-i\varphi_j)$; обобщенная разность фаз $\Phi = \varphi_2 - 2\varphi_1 - \Delta_2 k z$ определяет направление потока энергии от одной волны к другой. Это хорошо видно из анализа хода интегральных кривых I_3 , семейство которых представлено в переменных $X = B_2 \sin \Phi$ и $Y = B_2 \cos \Phi$ на рис. 1 [9]. В общем случае амплитуды волн испытывают пространственные биения.

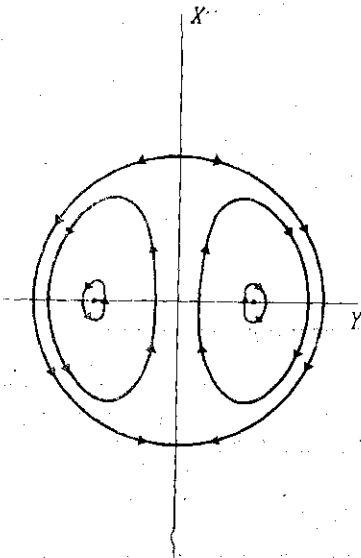


Рис. 1. Интегральные кривые I_3 (3), описывающие в переменных $X = B_2 \sin \Phi$ и $Y = B_2 \cos \Phi$ различные режимы взаимодействия 1-й и 2-й гармоник [9]

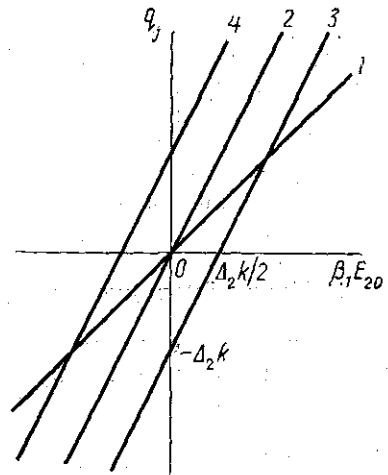


Рис. 2. Зависимость нелинейных добавок к волновым числам 1-й (1) и 2-й (2-4) гармоник от амплитуды 2-й гармоники при $\Delta_2 k = 0$ (2), $\Delta_2 k < 0$ (3), $\Delta_2 k > 0$ (4)

Для нас главный интерес представляют особые точки типа центра с координатами $X_{1,2}=0$ и $Y_{1,2}=\pm I_3/\sqrt{3n_2}$. Именно в них взаимодействие становится чисто реактивным: амплитуды стационарных волн постоянны, а меняются только фазы. Это обстоятельство было отмечено в работе [9], но тогда не получило должного развития.

Самовоздействие параметрически связанных волн в среде с квадратичной нелинейностью проще исследовать, положив

$$A_j = E_{j0} \exp(-iq_j z). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), находим уравнения нелинейной дисперсии (рис. 2)

$$q_1 = \beta_1 E_{20}, \quad q_2 = \beta_2 E_{10}^2 / E_{20}, \quad q_3 = 2q_1 - \Delta_2 k. \quad (5)$$

При синхронизме, $\Delta_2 k = 0$, имеем $E_{10}^2 = 2E_{20}^2$ и $q_3 = 2\beta_1 E_{20}$ (линии 1 и 2). В области $E_{20} > 0$, или $\cos \Phi = 1$, нелинейные приращения волновых чисел (показателей преломления) положительны — случай фокусирующей среды. При изменении знака амплитуды 2-й гармоники, $E_{20} < 0$, $\cos \Phi = -1$, среда становится дефокусирующей. Иными словами, простым изменением фазы 2-й гармоники на π можно кардинально менять тип самовоздействия. В то же время аналогичное изменение фазы 1-й гармоники никак не влияет на характер самовоздействия. Заметим, что при когерентной генерации гармоники согласно (2) устанавливается фаза $\Phi = \pi/2$, обеспечивающая максимальную скорость перекачки энергии.

Если $\Delta_2 k \neq 0$, то линии q_2 сдвигаются вправо или влево в зависимости от знака расстройки (прямые 3 и 4). Причем при положительной расстройке на отрезке $0 < \beta_1 E_{20} < \Delta_2 k / 2$ решений не существует (возникает разрыв линий 1 и 2); при отрицательных расстройках картина зеркально отражается. Таким образом, при $\Delta_2 k > 0$ возникает порог образования фокусирующих, а при $\Delta_2 k < 0$ — дефокусирующих свойств квадратично-нелинейной среды.

По той же схеме можно рассмотреть трехволновое взаимодействие, описываемое укороченными уравнениями (ср. с (1))

$$\frac{dA_j}{dz} = -i\beta_j \frac{\partial U_3}{\partial A_j^*}, \quad U_3 = A_1 A_2 A_3^* \exp(-i\Delta_3 k z) + \text{к. с.} \quad (j=1, 2, 3), \quad (6)$$

где $\beta_j = 2\pi\omega_j \chi_2 / (cn_j)$, $\Delta_3 k = k_3 - k_1 - k_2$. Теперь дисперсионные соотношения для стационарных волн приобретают более сложный вид:

$$q_j = \beta_j E_{10} E_{20} E_{30} / E_{j0}^2, \quad q_3 = q_1 + q_2 - \Delta_3 k. \quad (7)$$

Ограничимся кратким анализом случая $\Delta_3 k = 0$. Во-первых, из (7) следует, что интенсивность третьей волны не может превысить интенсивностей волн на меньших частотах, $n_3 E_{30}^2 \leq n_1 E_{10}^2, n_2 E_{20}^2$. При нарушении этого ограничения система переходит в режим распадной неустойчивости третьей волны (параметрического усиления). Во-вторых, специфическая нелинейная дисперсия возникает, если только одна из низкочастотных волн, например первая, имеет большую амплитуду (по сравнению с остальными). Тогда $q_1 \approx 0, q_2 \approx q_3 \approx (\beta_2 \beta_3)^{1/2} E_{10}$ при $n_2 E_{20}^2 = n_3 E_{30}^2$. Характер трехволнового самовоздействия также можно менять путем изменения на π фазы любой из трех волн, так как обобщенная разность фаз теперь равна $\Phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2 - \Delta_3 k z$.

2. Пространственные солитоны на квадратичной нелинейности

Итак, в отличие от случая кубической нелинейности [15, 16] не нужно искать среду с нужным знаком квадратичной нелинейности. Подбором соотношения амплитуд и фаз трех (или двух) взаимодействующих волн можно придать квадратично-нелинейной среде самофокусирующие свойства. Но в таких условиях могут возбуждаться (формироваться) пространственные солитоны (нелинейные волноводы). Впервые параметрически связанные солитоны были выявлены при анализе взаимодействия дифрагирующих пучков основной и второй гармоник в среде с квадратичной нелинейностью [1, 2]. Представляя дифракцию волнового пучка как поперечную диффузию комплексной амплитуды, можно обобщить уравнения (1) на взаимодействие двух- и трехмерных модулированных волн:

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + iD_j \Delta_{\perp} A_j = -i\beta_j \frac{\partial U_2}{\partial A_j^*}, \quad (8)$$

где Δ_{\perp} — оператор Лапласа в поперечных координатах x, y ; $D_j = = 1/(2k_j)$.

Для системы (8) помимо закона сохранения полной энергии $I_1 = \iint (n_1 |A_1|^2 + n_2 |A_2|^2) dx dy$ можно записать интеграл движения

$$I_3 = \iint [2D_1 (\beta_2/\beta_1) |\nabla_{\perp} A_1|^2 + D_2 |\nabla_{\perp} A_2|^2 - - \Delta_2 k |A_2|^2 - \beta_2 |A_1^2 A_2^*| \cos \Phi] dx dy,$$

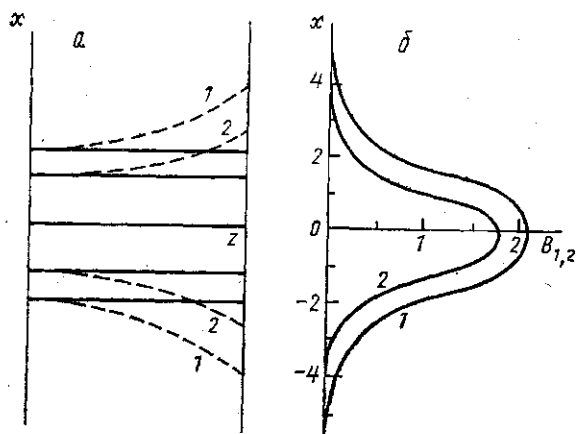


Рис. 3. Схематическое изображение пространственных солитонов 1-й (1) и 2-й (2) гармоник, параметрически связанных через квадратичную нелинейность (штриховыми линиями изображена дифракция пучков в линейной среде) (а), и амплитудные профили двумерных солитонов (б) [1]

линейной добавкой к волновому числу:

$$A_j = B_j(x, y) \exp(-iq_j z), \quad q_2 = 2q_1 - \Delta_2 k. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (8) дает уравнения для собственных мод:

$$D_j \Delta_{\perp} B_j = q_j B_j - \beta_j B_1^2 B_2 / B_j. \quad (10)$$

характеризующий тип взаимодействия пучков двух гармоник. В случае дифракции пучков в линейной среде $I_3 > 0$. В квадратично-нелинейной среде за счет сильного реактивного взаимодействия при $\cos \Phi = 1$ можно сделать $I_3 < 0$. Это означает, что распад волн на не взаимодействующие пучки становится невозможным — происходит захват пучков в параметрически связанные солитоны, в общем случае осциллирующие (рис. 3, а).

Стационарным солитонам соответствуют пучки с неизменным амплитудным профилем и не-

Численное решение системы (10) для двумерных, планарных солитонов при $\Delta_2 k = 0$ представлено на рис. 3, б. При этом погонные мощности пучков, имеющих ширину a , равны $P_1 = 4,8 P_{s1}$ и $P_2 = 2,76 P_{s1}$, где $P_{s1} = D_1^2 \beta_1^{-2} a^{-3}$. В работе [1] было найдено характерное точное решение уравнений (10):

$$B_j = E_{j0} \operatorname{sech}^2(x/a) \quad (11)$$

с $E_{20} = 6a^{-2} D_1 / \beta_1$ и $E_{10} = \pm 6a^{-2} [D_1 D_2 / (\beta_1 \beta_2)]^{1/2}$, причем коэффициенты диффузии в силу (9) связаны соотношением $D_2 = 2D_1 - \Delta_2 k a^2$. Решение (11) было повторно найдено в ряде недавних работ, например [17]. Нелинейные добавки к волновым числам точно в 1,5 раза меньше, чем для плоских волн (5). При таком же вырождении амплитудных профилей численными методами была найдена мода цилиндрических (осесимметричных) пучков; здесь $P_1 = 1,125 P_{s2}$ и $P_2 = 2,25 P_{s2}$, где $P_{s2} = D_2^2 \beta_2^{-2} a^{-2}$. Недавно были выполнены численные расчеты профилей двумерных солитонов в широком диапазоне значений для соотношения коэффициентов диффузии и волновой расстройки [18, 19].

Численные оценки для типичных оптических кристаллов с $\chi_2 \approx 10^{-8}$ СГСЭ и пучков с $a \approx 10^{-2}$ см показывают, что для возбуждения пространственных солитонов нужны сравнительно небольшие мощности $P_{s2} \approx c \lambda^4 \chi_2^{-2} a^{-2}$ порядка сотен ватт. Однако прошло почти 20 лет со дня первой теоретической работы [1] до первых экспериментальных наблюдений солитонов на квадратичной нелинейности в 1995 г. [4, 5]. В этих экспериментах [4] излучение Nd:YAG-лазера на длине волны $\lambda_1 = 1,32$ мкм с мощностью порядка 1–2 кВт и поперечным радиусом 60–70 мкм пропускалось через планарный квадратично-нелинейный кристалл ниобата лития длиной 47 мм. На выходе из кристалла регистрировалось распределение плотности мощности. При температурной настройке на синхронизм между 1-й и 2-й гармониками выходной пучок сильно сужался и принимал размер падающего на кристалл пучка. Это свидетельствовало о подавлении дифракции и образовании пространственного солитона. Затем были реализованы параметрические солитоны в монокристаллических волокнах из ферроорганических материалов с большим коэффициентом квадратичной нелинейности [6].

Хорошие аналитические результаты дает вариационный метод, основанный на минимизации лагранжиана взаимодействия:

$$L = \iint \left[D_1 (\nabla_{\perp} B_1)^2 + \frac{1}{2} D_2 (\nabla_{\perp} B_2)^2 + q_1 B_1^2 + \frac{1}{2} q_2 B_2^2 - \beta B_1^2 B_2 \right] dx dy. \quad (12)$$

Если в качестве базовых функций выбрать гауссовские профили, $B_j = E_{j0} \exp(-r^2/a_j^2)$, то, приравняв нулю частные производные лагранжиана по E_{j0} и a_j , получаем

$$a_1^2/a_2^2 = \xi, \quad E_{20} = D_1 (2 + \xi)^2 / (\beta \xi a_1^2), \quad E_{10} = E_{20} [\xi / (4 - 2\xi)]^{1/2}, \quad (13)$$

где ξ является корнем алгебраического уравнения $\xi^3 + 4\xi - 8 = -\Delta_2 k a_1^2 \xi (2 - \xi) / 2D_1$. При $\Delta_2 k = 0$ соотношения между амплитудами и поперечными радиусами выражаются в явном виде: $a_2 = 0,856 a_1$, $E_{20} = 8,3 D_1 / (\beta a_1^2)$, $E_{10} = 8,6 D_1 / (\beta a_1^2)$. В случае $\Delta_2 k \neq 0$ решение кубического уравнения для ξ выглядит очень громоздко. Численные эксперименты показывают, что действительно амплитуды пучков с найденными параметрами меняются вдоль оси в пределах 10%. Для поддержания солитонного распространения при больших расстройках $|\Delta_2 k|$ необходимо увеличивать входные амплитуды пучков.

Оптимальные параметры (13) можно уточнить с помощью градиентного метода, выбирая мерой качества формирования слабо осциллирующих солитонов, например, величину

$$I = |A_1(0, z)|_{\max}^2 - |A_1(0, z)|_{\min}^2 + |A_2(0, z)|_{\max}^2 - |A_2(0, z)|_{\min}^2.$$

Применение этой процедуры для $D_1=1$, $\beta_1=1$ снижает уровень биений интенсивностей по выбранному критерию на 17%, причем $E_{10}=8,45$, $E_{20}=8,15$, $a_2=0,84 a_1$. Даже на очень больших расстояниях, рав-

ных 80 дифракционным длинам $l_d=ka^2/2$, солитон с такими параметрами хорошо сохраняет свою начальную форму (искажения менее 10%), в то время как в линейной среде на этом расстоянии ширина пучка увеличивается почти в сто раз.

Пространственные солитоны на квадратичной нелинейности обладают очень важным для практики свойством устойчивости по отношению к малым возмущениям. На рис. 4 представлены результаты численного эксперимента по наблюдению распространения пучков двух гармоник с оптимальными параметрами, когда на профиль первого пучка

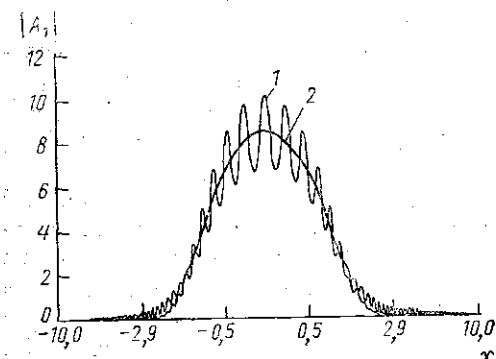


Рис. 4. Эффект сглаживания амплитудного профиля пучка 1-й гармоник при формировании параметрического солитона: 1 — начальный профиль, 2 — на расстоянии $z=1,2 l_d$

наложена мелкомасштабная амплитудная модуляция [20]:

$$A_1(r, 0) = E_{10} \exp(-r^2/a_1^2) (1 + 0,2 \cos 30 r), \quad A_2 = E_{20} \exp(-r^2/a_2^2).$$

Сравнение исходного и конечного профилей показывает, что в процессе формирования солитонов быстрая модуляция пропадает и форма профиля становится гладкой. Эффект «самоутюжки», или самоочистения амплитудных профилей пучков в квадратично-нелинейной среде, наблюдался экспериментально [21].

3. Связанные солитоны и кинки при расстройке групповых скоростей

Уравнения (8) можно использовать и для описания взаимодействия волновых пакетов во втором приближении теории дисперсии. При этом роль поперечной координаты играет локальное время $\eta_j = t - z/u_j$, где $u_j = (\partial k_j / \partial \omega)^{-1}$ — групповая скорость. Коэффициенты диффузии $D_j = -(1/2) \partial^2 k_j / \partial \omega^2$ характеризуют дисперсию групповых скоростей. Коллинеарной геометрии пучков в (8) соответствует согласование групповых скоростей $u_1 = u_2$. Однако групповой синхронизм выполняется далеко не всегда. Наличие расстройки групповых скоростей увеличивает порог захвата пучков или импульсов в связанные солитоны. Но при этом солитоны приобретают ряд принципиально новых черт, которые можно использовать для создания оптически управляемых элементов. В частности, возникают фазовая модуляция и подстраивание солитонов к некоторой средней скорости (направлению) распростране-

ния. Заметим еще, что взаимодействие волновых пакетов более разнообразно, так как коэффициенты дисперсии второго порядка могут иметь разные величины и, главное, знаки. У волновых пучков величины и знаки коэффициентов диффузии предопределены (8).

Итак, если учесть эффекты рассогласования групповых скоростей, то уравнения (8) дополняются новыми членами и приобретает в случае взаимодействия трех волновых пакетов следующий вид [3]:

$$\frac{\partial A_j}{\partial z} + v_j \frac{\partial A_j}{\partial \eta_1} + iD_j \frac{\partial^2 A_j}{\partial \eta_1^2} = -i\beta_j \frac{\partial U_3}{\partial A_j^*}, \quad (14)$$

где $v_j = 1/u_j - 1/u_1$, правая часть совпадает с (6).

На рис. 5 показана эволюция гауссовских профилей $A_j(t, 0) = E_{j0} \exp(-t^2/\tau^2)$ в квадратично-нелинейной диспергирующей среде. Сравнительный анализ формы огибающих трех импульсов, достигших расстояния $z=1,2$ длины дисперсионного расплывания в линейной и нелинейных средах, красноречиво говорит о формировании параметрически связанных солитонов. Кстати, эти солитоны имеют фазовую модуляцию. Более подробную информацию о свойствах солитонов в средах с расстройкой групповых скоростей можно найти в нашей работе [22] и более поздних — других авторов [23].

Параметрически связанные солитоны возникают и в первом приближении теории дисперсии, когда в уравнениях (4) члены со вторыми производными не учитываются. В вырожденном по частоте случае существуют стационарные импульсы 1-й и 2-й гармоник с огибающими [24, 25]

$$B_1 = E_{10} \operatorname{sech}(\eta_s/\tau), \quad B_2 = E_{20} \operatorname{th}(\eta_s/\tau). \quad (15)$$

Из (15) видно, что на частоте первой гармоники распространяется уединенная волна — солитон, а на удвоенной частоте образуется кинк. Однако если регистрировать, как в оптике, интенсивность второй гармоники $B_2^2 = E_{20}^2 \operatorname{th}^2(\eta_s/\tau) = E_{20}^2 - E_{20}^2 \operatorname{sech}^2(\eta_s/\tau)$, то вторую часть решения (15) можно интерпретировать как темный солитон. Таким образом, в среде с квадратичной нелинейностью и с дисперсией первого порядка образуется связанная пара светлого и темного солитонов. Связь между амплитудами солитонов, их длительностью и скоростью дается соотношениями

$$E_{10}^2 = E_{20}^2 + v_{21} E_{20} / (\beta_1 \tau), \quad v_{1s} = \beta_1 E_{20} \tau. \quad (16)$$

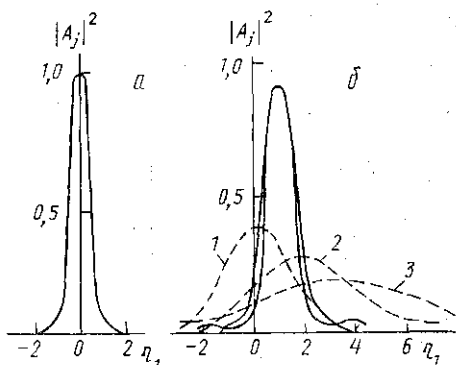


Рис. 5. Самозахват трех импульсов (пучков) в параметрически связанные солитоны в среде с коэффициентами квадратичной нелинейности $\beta_1=15$, $\beta_2=20$, $\beta_3=30$ при групповых расстройках $v_1=0$, $v_2=6$, $v_3=10$ и коэффициентах дисперсионного расплывания $D_1=2$, $D_2=3$, $D_3=5$: профили огибающих на входе (а) и на расстоянии $z=0,3$ (б) (штриховые кривые — дисперсионное расплывание импульсов в линейной среде). Номера кривых соответствуют номерам волн

Солитоны распространяются или с большей, или с меньшей скоростью, чем оба пакета в линейной среде. Более важно для практики то, что при условии $\tau < v_{21}/\beta_1 E_{20}$ (нелинейная длина меньше длины группового запаздывания) пиковая амплитуда 1-й гармоники превышает амплитуду кинка, который играет роль параметрической накачки. Это явление, названное генерацией гигантского параметрического импульса, придает совершенно новые черты параметрическому генератору света, который был предложен С. А. Ахмановым и Р. В. Хохловым в 1962 г. [26]. Генерация гигантских импульсов с возможностью перестройки частоты была экспериментально реализована в пикосекундной нелинейной оптике сначала в работе [27], а затем, сравнительно недавно, в [28]. В работе [27] начальная длительность сигнального импульса 30 пс сокращалась до 0,3 пс при параметрическом усилении в диапазоне длин волн 0,8—1,35 мкм. Напомним, что в параметрическом усилителе непрерывного излучения согласно (2), (3) плотность мощности субгармоники не может превысить плотности мощности накачки.

Теория параметрических солитонов на квадратичной нелинейности, основанная на решении уравнений (14) при $D_j=0$, была сильно продвинута после применения метода обратной задачи рассеяния [29].

4. Взаимофокусировка связанных волн

В предыдущих разделах было показано, что среда с квадратичной нелинейностью может приобрести самофокусирующие свойства при когерентном трехволновом взаимодействии. При формировании солитонов самофокусирующая нелинейность уравнивает дифракционную расходимость пучков или дисперсионное распыливание волновых пакетов. Однако если увеличить плотность мощности связанных волн, то можно ожидать ((по аналогии с самофокусировкой на кубической нелинейности [15, 16]) смены режима самоканалирования пучков их взаимофокусировкой. Действительно, этот новый эффект был зарегистрирован в первых численных экспериментах [2]. Затем были выявлены другие неизвестные ранее явления нелинейной дифракции в квадратично-нелинейных средах, такие, как аномальная дифракция, параметрическая дифракция субгармоники и др. Этот материал подробно разобран в монографии [3]. Здесь же рассмотрим трехволновую взаимофокусировку в приближении нелинейной геометрической оптики.

Запишем параболические уравнения (8) для действительных амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} + D_j (\nabla \Phi_j)^2 &= \beta_j B_1 B_2 B_3 \cos \Phi / B_j^2 + D_j \Delta_{\perp} B_j / B_j, \\ \frac{\partial B_j}{\partial z} + 2D_j \nabla \Phi_j \nabla B_j + D_j B_j \Delta_{\perp} \Phi_j &= \beta_j B_1 B_2 B_3 \sin \Phi / B_j. \end{aligned} \quad (17)$$

Если положить $\Phi_j = q_j z$ и $\cos \Phi = 1$, то уравнения переноса, вторые из (17), дают $B_j = B_j(x, y)$, а первые уравнения переходят в уравнения стационарных уединенных профилей параметрически связанных солитонов. Первые уравнения с точки зрения теории дифракции представляют собой уравнения эйконала. Последние слагаемые в уравнениях эйконала исчезают при переходе к геометрической оптике. Однако и в этом приближении уравнения (17) остаются весьма сложными. Сильное упрощение выступает при чисто реактивном взаимодействии:

$\sin \Phi = 0$, $\cos \Phi = \pm 1$. Анализ (17) показывает, что все три волны ведут себя одинаково, если согласованы коэффициенты поперечной диффузии $D_3^{-1} = D_1^{-1} + D_2^{-1}$, волновые фронты $\varphi_j = D_3 \varphi_3 / D_j$ (с точностью до π) и амплитудные профили $B_j = B_3 (D_j \beta_j / D_3 \beta_3)^{1/2}$. Переходя к эйконалу $\varphi_j = \varphi_j / 2D_j$, окончательно находим геометро-оптические уравнения взаимофокусировки согласованных волн в стандартной форме:

$$2 \frac{\partial S_3}{\partial z} + (\nabla S_3)^2 = \pm 4 (\beta_1 \beta_2 D_1 D_2)^{1/2} B_3, \quad (18)$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial z} + \nabla S_3 \nabla B_3 + \frac{1}{2} B_3 \Delta_{\perp} S_3 = 0.$$

Из уравнения эйконала видно, что нелинейный член содержит амплитуду поля в первой степени (в среде с кубической нелинейностью — во второй). Поэтому параметрическая взаимофокусировка на квадратичной нелинейности не столь сильна, как при кубической нелинейности. В частности, не возникает коллапс пучка. По этой же причине солитон в квадратично-нелинейной среде обладает повышенной устойчивостью.

Уравнения (18) можно решить аналитически с помощью безабберационного приближения [15, 16], полагая

$$\varphi_3 = \frac{(x^2 + y^2) df}{2f} - \frac{df}{dz} + \varphi_0(z) \quad \text{и} \quad B_3 = E_{30} f^{-m/2} \exp \left[-\frac{(x^2 + y^2)}{a^2 f^2} \right],$$

где $f(z)$ — безразмерная ширина трехмерного пучка ($m=2$) или двумерного пучка-пакета ($m=1$). Следуя далее обычной методике, находим уравнение

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \pm \frac{1}{l_s^2 f^{(m+2)/2}}, \quad (19)$$

в которое входит длина взаимофокусировки (знак минус) или дефокусировки (знак плюс) $l_s = a[\beta D E_{30}]^{-1/2}$. Для пучков эта длина имеет особо простой вид, $l_s \approx a[\chi_2 E_{30}]^{-1/2}$. Интегрирование (19) не представляет труда, но в силу громоздкости конечная формула не приводится. Если приравнять силу нелинейной рефракции из правой части (19) дифракционной силе $1/l_d^2 f^3$, $l_d = a^2/2D$, то можно дать грубую оценку эффекта сжатия поля в нелинейном фокусе. В случае дефокусировки из (19) можно вычислить нелинейную расходимость пучков в дальнем поле и нелинейное ограничение поля сходящихся пучков.

5. Новые эффекты при взаимодействии волн на кратных частотах

При синхронном взаимодействии волн с кратными частотами ω , 2ω , 3ω помимо основного параметрического взаимодействия ($\omega + 2\omega = 3\omega$) на той же квадратичной нелинейности может происходить взаимодействие 1-й и 2-й гармоник ($\omega + \omega = 2\omega$). За счет дополнительного канала энергия волны накачки с частотой 3ω , поступающая в сигнальную и холостую волны, может перераспределиться существенным образом. Как впервые показано в [30—32], при синхронном вкладе двух каналов возможна полная перекачка энергии накачки в сигнальную волну 2ω . Этот вывод имеет большое практическое значение для получения максимальных КПД параметрических генераторов и усилителей бегущей волны. Напомним, что в отсутствие канала возбуждения второй гармоники энергия сигнала с частотой 2ω не превышала бы

величины двух третей энергии волны накачки [2]. В другой нашей работе [33] показано, что интерференция двух каналов взаимодействия приводит к явлению бистабильности связанных солитонов. Остановимся на основных чертах этих новых явлений.

Свободная энергия взаимодействия волн с кратными частотами состоит из двух частей (ср. с (1) и (6)):

$$U_{23} = A_1^2 A_2^* \exp(-i\Delta_2 k z) + A_1 A_2 A_3^* \exp(-i\Delta_3 k z) + \text{к. с.} \quad (20)$$

Рассмотрим сначала взаимодействие плоских монохроматических волн. Очевидно, наибольший эффект достигается при фазовом синхронизме по двум каналам одновременно: $\Delta_2 k = \Delta_3 k = 0$. При коллинеарном взаимодействии (волновые векторы параллельны друг другу) это эквивалентно равенству показателей преломления (фазовых скоростей) на всех трех частотах, $n_1 = n_2 = n_3$. Выполнить на практике последнее условие полного синхронизма без привлечения специальных методов проблематично. Большие шансы на успех имеет неколлинеарная ориентация волновых векторов [34].

В случае полного синхронизма можно перейти к действительным амплитудам, полагая, например, $B_1 = A_1$, $B_2 = -iA_2$, $B_3 = -A_3$. Учитывая очевидные соотношения $\beta_2 = 2\beta_1$ и $\beta_3 = 3\beta_1$, можно найти из уравнений типа (6), переписанных для действительных амплитуд со свободной энергией (20), помимо закона сохранения полной энергии $I_1 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$ второй интеграл движения

$$I_3 = (3B_1^2 + B_1 B_3 + B_3^2) \exp \left[\frac{-2}{\sqrt{11}} \arctg \left(\frac{6B_1 + B_3 B}{\sqrt{11} B_3} \right) \right]. \quad (21)$$

С помощью I_1 и I_3 можно достаточно просто исследовать поведение всех трех волн как при параметрическом усилении, так и при умножении частоты. Кстати, теория каскадной генерации третьей гармоники в среде с квадратичной нелинейностью на основе численного решения уравнений (1) с учетом (20) была развита еще в 1964 г. [9, 35]. Однако режим параметрического усиления волн с кратными частотами в этих работах не был рассмотрен. Между тем его анализ принес неожиданные результаты.

Фазовый портрет трехчастотного взаимодействия представляет собой движение по сфере. Если проследить движение по фазовым траекториям, то можно установить, что при параметрическом усилении апериодические колебания амплитуд заканчиваются перекачкой всей энергии накачки в волну с частотой 2ω . В отсутствие дополнительного канала взаимодействия 1-й и 2-й гармоник в соответствии с соотношениями Мэнли—Роу [9, 10, 16] в сигнальную волну может перейти только две трети энергии волны накачки.

На рис. 6 изображены зависимости интенсивностей трех волн от расстояния, нормированного на нелинейную длину, в параметрическом усилителе с оптимальным соотношением фаз. Из рис. 6 ясно видно, что после нескольких пространственных осцилляций амплитуд энергии накачки полностью передается сигнальной волне с частотой 2ω . При подаче на вход усилителя сигнала с неоптимальной фазой наблюдается режим периодических пространственных биений амплитуд и верхний предел интенсивности сигнальной волны становится меньше, чем в оптимальном случае.

Наличие волновых расстройек снижает эффективность работы параметрического генератора на кратных частотах. Численное моделирование [30] показало, что при небольших расстройках в сигнальную

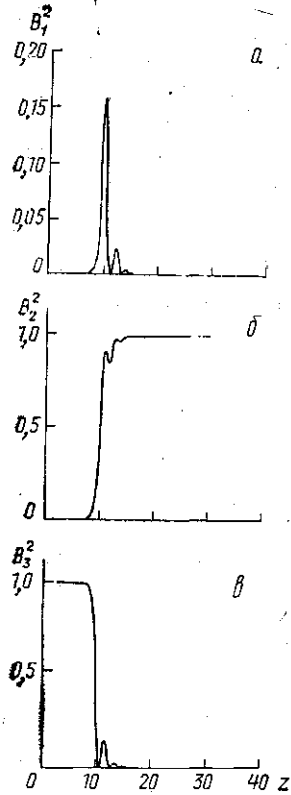
волну перекачивается энергии больше, нежели в случае параметрического генератора только с одним основным каналом взаимодействия. Последний вывод имеет большое значение, так как это позволяет расширить поиск оптических кристаллов с синхронизмом для трех гармоник.

Сильное взаимодействие волновых пучков или пакетов с кратными частотами может привести к формированию параметрически связанных солитонов аналогично предыдущим случаям (см. п. 2, 3). Здесь представляет интерес интерференция двух каналов взаимодействия при формировании солитонов. Ожидаемый эффект бистабильности можно продемонстрировать на простом примере [33], когда огибающие всех трех уединенных волн имеют одинаковый профиль, но разные амплитуды и нелинейные поправки к волновым числам:

$$A_j = E_{j0} \operatorname{sech}^2(\eta_1/\tau) \exp(-iq_j z). \quad (22)$$

Подставляя искомое решение (22) в уравнения (14) при $v_j=0$ и U из (20), нетрудно получить связь между параметрами солитонов.

Рис. 6. Зависимости интенсивностей 1 (а), 2 (б) и 3-й (в) гармоник в параметрическом усилителе с кратными частотами от расстояния, нормированного на нелинейную длину, при работе двух синхронных каналов взаимодействия ($\omega+2\omega=3\omega$ и $\omega+\omega=2\omega$) для граничных условий $E_{10}=10^{-6}$, $E_{20}=0$, $E_{30}=(1-10^{-12})^{1/4}$



Так, расстройки волновых векторов подчиняются условию $(D_3 - D_1 - D_2) \Delta_2 k = (D_2 - 2D_1) \Delta_3 k$. Видно, что полный синхронизм для формирования солитонов не требуется. Напротив, подбором расстроек можно согласовать коэффициенты дисперсионного распывания. Ключевым параметром бистабильных солитонов является величина

$$C_{\pm} = -1 \pm (1 + 12n_1 D_1 / n_3 D_3)^{1/2}, \quad (23)$$

через которую выражаются пиковые амплитуды всех трех гармоник:

$$E_{10} = \pm \frac{(6n_2 D_2 n_3 D_3 C_{\pm})^{1/2}}{\tau^2 \beta_1 n_1 (1 + C_{\pm})^{1/2}},$$

$$E_{20} = \frac{n_3 D_3 C_{\pm}}{\beta_1 \tau^2}, \quad E_{30} = \frac{1}{2} C_{\pm} E_{10}. \quad (24)$$

Из (23), (24) видно, что амплитуда 2-й гармоники может принимать положительное или отрицательное значение. Это и определяет два типа солитонов. Длительность солитонов, обладающих одинаковой энергией, также имеет два значения (рис. 7). Первому типу с C_+ отвечает синфазный вклад обоих

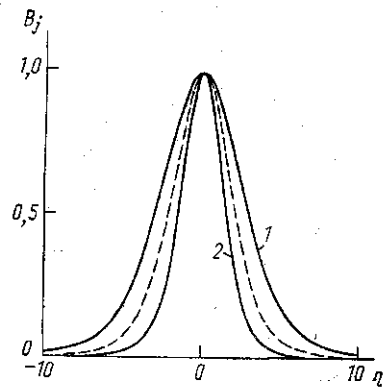


Рис. 7. Амплитудные профили параметрических солитонов при наличии одного (штриховая линия) или двух (сплошные) каналов взаимодействия, противофазных (1) или синфазных (2)

каналов. Так как при этом $E_{20} > 0$ и $E_{10}E_{30} > 0$, то оба канала придают нелинейной среде фокусирующие свойства и длительность солитонов становится меньше (кривая 2). Второй тип связанных солитонов с C_- образуется при дефокусирующем действии дополнительного канала ($E_{20} < 0$), в результате чего эффективная нелинейность основного канала падает и длительность увеличивается (кривая 1); здесь $E_{10}E_{30} < 0$.

Аналогичный анализ был проведен в [36] для взаимодействия трех волн с кратными частотами в среде с кубической нелинейностью, когда волной накачки в параметрическом усилителе служит 2-я гармоника ($2\omega + 2\omega = \omega + 3\omega$), а дополнительным каналом является взаимодействие 1-й и 3-й гармоник ($\omega + \omega + \omega = 3\omega$).

6. Солитоны при интерференции квадратичной и кубической нелинейностей

В сильных полях помимо квадратичной проявляется и кубическая нелинейность. Этому соответствует в выражении для свободной энергии дополнительный член

$$U_4 = |A_1|^4 + |A_2|^4 + |A_3|^4 + 2|A_1|^2|A_2|^2 + 2|A_1|^2|A_3|^2 + 2|A_2|^2|A_3|^2 + \text{к. с.}, \quad (25)$$

который войдет в укороченные уравнения типа (6), (8) и (14) с коэффициентами кубической нелинейности $\gamma_j = 8\pi\omega_j\chi_3/(3cn_j)$.

Характеристики трехволновых параметрических солитонов в среде с квадратичной и кубической нелинейностями впервые обсуждались в нашей работе [37]. Затем для вырожденного по частоте случая были исследованы свойства связанных солитонов при взаимодействии 1-й и 2-й гармоник в такой среде [38, 39]. Полученные результаты во многом совпадают. Основные закономерности совместного действия нелинейностей можно изучить на примере частного, но характерного случая, когда огибающие на всех трех частотах имеют одинаковую форму $B(\eta)$, которая описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} = \rho B - \beta B^2 - \gamma B^3, \quad (26)$$

где $\rho = q/D_1$, $\beta = \beta_1/D_1$ и $\gamma = 5\gamma_1/D_1$. Совпадение профилей солитонов на разных частотах накладывает условие на соотношение коэффициентов дисперсии $D_1 : D_2 : D_3 = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3$, из которого следует $D_3 = D_1 + D_2$.

Решение уравнения (26) имеет следующий вид:

$$B = \frac{3\beta^{-1}\tau^{-2}}{1 \pm (1+g)^{1/2} \text{ch}(\eta/\tau)}, \quad g = 9\gamma/(2\beta^2\tau^2). \quad (27)$$

В случаях чисто квадратичной ($\gamma=0$) или кубической ($\beta=0$) нелинейности из (27) получаем известные выражения $B^{(2)} = 1,5\beta^{-1}\tau^{-2} \text{sech}^2(\eta/\tau)$ и $B^{(3)} = \pm (2/\gamma)^{1/2}\tau^{-1} \text{sech}(\eta/\tau)$ соответственно [31]. В общем случае длительность солитонов (27), рассчитанная по уровню половины пиковой амплитуды, имеет два значения (аналогично предыдущему случаю бистабильности, рис. 7):

$$T_s = \tau \text{Arch}[1 \pm (1+g)^{-1/2}]. \quad (28)$$

Интерференция квадратичной и кубической нелинейности, как видно из (27) и (28), приводит к возможности формирования двух типов солитонов: первому соответствует знак плюс, а второму — знак

минус. Первый тип имеет компрессирующую (фокусирующую) квадратичную нелинейность ($\beta(\eta) > 0$). При этом кубическая нелинейность может быть как компрессирующей ($g > 0, \gamma_i D_i > 0$), так и декомпрессирующей ($-1 < g < 0$). Второй тип солитонов формируется благодаря интерференции декомпрессирующей квадратичной и компрессирующей кубической нелинейностей ($B(\eta) < 0, g > 0$). Свойства бистабильных солитонов при произвольном соотношении пиковых амплитуд и коэффициентов диффузии можно исследовать с помощью вариационного метода, добываясь минимума соответствующего лагранжиана (см. (12), (13)).

Глобальная устойчивость параметрических солитонов гарантируется отрицательным знаком интеграла движения I_3 при $D_i > 0$. Однако при выполнении этого условия солитоны могут не сохранять стабильную форму, испытывая нерегулярные биения профиля в процессе распространения. Исследование такой локальной неустойчивости солитонов (27) можно провести, изучая зависимость I_3 от энергии системы. Такой подход был применен к солитонам в centrosимметричных средах с насыщающейся нелинейностью [40, 41]. В работе [42] было установлено, что необходимым признаком устойчивой ветви стационарных солитонов можно считать выполнение условия $dI_3/dW < 0$. Согласно этому критерию солитоны первого типа устойчивы во всей области определения, а второго типа — лишь при энергиях, меньших $W_{cr} \approx 3\beta^{-2}\tau^{-3}$. Эти выводы были получены при компьютерном моделировании процесса формирования параметрических солитонов, основанном на численном решении системы параболических уравнений типа (14) с $v_j = 0$ и U из (24). В численных экспериментах солитоны первого типа были устойчивы относительно малых возмущений амплитуды и фазы. Несколько иная картина наблюдалась для солитонов второго типа. Так, при $g \approx 9,5$ импульсы не очищались от возмущающей компоненты и развивались сильные нерегулярные пространственные биения амплитудно-фазовых профилей без распада на невзаимодействующие волны. Это говорит о локальной неустойчивости стационарных солитонов второго типа в рассмотренной области параметров.

7. Самовоздействие предельно коротких импульсов

Во многих областях науки и техники разнообразные применения находят электромагнитное излучение предельно малой длительности. В оптике это связано с развитием методов генерации фемтосекундных импульсов [43]. В радио- и микроволновом диапазонах частот генерация коротких по длительности сигналов уже давно не представляет особых трудностей. Для анализа распространения в нелинейной диспергирующей среде ультракоротких импульсов, когда ширина частотного спектра становится сравнимой со значением средней частоты, метод параболического уравнения становится неприменимым. Поэтому для такого случая специально разрабатываются методы высших приближений линейной и нелинейной дисперсии [44—47], используется переход к связанным уравнениям Кортевега—де Фриза [48, 49]. Если же импульс содержит два-три колебания электромагнитного поля, то необходимо решать непосредственно уравнения Максвелла для обыкновенной и необыкновенной волн [50, 51]

$$\frac{\partial H_{o,e}}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (E_{o,e} + 4\pi P_{o,e}), \quad \frac{\partial E_{o,e}}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{o,e}}{\partial t} \quad (29)$$

совместно с уравнениями для двух компонент вектора поляризации среды \mathbf{P} (модель ангармонических осцилляторов с квадратичной нелинейностью) [9]:

$$\frac{\partial^2 P_o}{\partial t^2} + \Omega_o^2 P_o + 2\beta_{oe}^o P_o P_e = \gamma_o E_o, \quad \frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2} + \Omega_e^2 P_e + \beta_{oo}^e P_o^2 = \gamma_e E_e. \quad (30)$$

Здесь z — продольная координата, t — время, c — скорость света в вакууме, Ω — резонансная частота осциллятора; γ — величина, пропорциональная дипольному моменту, β — компонента тензора квадратичной нелинейности; индекс o обозначает величины, характеризующие обыкновенную, а e — необыкновенную волну соответственно; с учетом симметрии элементов тензора квадратичной поляризуемости [9] имеем $\beta_{oo}^e/\gamma_e = \beta_{oe}^o/\gamma_o$.

Линейная дисперсия каждой из нормальных волн вдали от резонанса описывается согласно (29) — (31) хорошо известным выражением, связывающим волновой вектор и частоту: $kc = \omega[1 + 4\pi\gamma/(\Omega^2 - \omega^2)]^{1/2}$. Интересно отметить, что при выполнении соотношений $4\Omega_o^2 = \Omega_e^2$ и $4\gamma_o = \gamma_e$ наступает глобальный синхронизм для 1-й и 2-й гармоник: $2k_o(\omega) = k_e(2\omega)$ независимо от значения частоты ω . Однако этот случай можно реализовать, по-видимому, только в модельных экспериментах с цепочками или длинными линиями.

Весьма важным для анализа характера взаимодействия коротких импульсов является интеграл движения

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[D_o n_o \left(\frac{\partial E_o}{\partial \tau} \right)^2 + D_e n_e \left(\frac{\partial E_e}{\partial \tau} \right)^2 + v n_o E_o^2 - 2\beta_{oo}^e D_o n_o \gamma_o \Omega_e^{-2} E_o^2 E_e \right] d\tau \quad (31)$$

для связанных уравнений Кортевега—де Фриза, которые можно вывести из (29), (30) в предположении слабой дисперсии; здесь введена расстройка скоростей на малых частотах $v = 1/v_o - 1/v_e$. Функционал (31) можно считать квазиинвариантом уравнений исходных нелинейных уравнений Максвелла (29), (30). Действительно, в выполненных нами численных экспериментах величина I_3 сохранялась с хорошей точностью. Для ограниченных во времени сигналов в линейной среде значение функционала положительно. В сильных полях знак I_3 может стать отрицательным, что означает захват волн в параметрически связанные солитоны.

Рассмотрим стационарную бегущую волну $H(\tau_s)$, $E(\tau_s)$, $P(\tau_s)$, где $\tau_s = t - z/v_s$. Связь между электрическим и магнитным полями имеет вид $E = \alpha P$ и $H = v_s E/c$, а скорость распространения волны равна $v_s = c(1 + 4\pi/\alpha)^{-1/2}$. Параметр распространения α зависит от профиля $E(\tau_s)$ и наоборот. Однако всегда единенные нелинейные волны распространяются быстрее, чем в линейной среде ($v_s > v_o, v_e$).

Уравнения (29), (30) имеют простое точное решение, характерное для солитонов в квадратично-нелинейной среде:

$$E_o = E_{om} \operatorname{sech}^2(\tau_s/T_s), \quad E_e = E_{em} \operatorname{sech}^2(\tau_s/T_s). \quad (32)$$

Параметр распространения и длительности этих солитонов равны $\alpha = (\Omega_o^2 - \Omega_e^2)/(\gamma_o - \gamma_e)$, $T_s^2 = 4(\gamma_o - \gamma_e)/(\gamma_e \Omega_o^2 - \gamma_o \Omega_e^2)$. Амплитуды волн электрического поля определяются следующими выражениями:

$$E_{em} = 3\alpha/(\beta_{oe}^o T_s^2), \quad E_{om} = \pm 6\alpha/(2\beta_{oo}^e \beta_{oe}^e T_s^4)^{1/2}.$$

В общем случае длительности двух частей параметрических солитонов с обыкновенной (T_o) и необыкновенной (T_e) поляризациями по-

ля не равны друг другу; при этом профили уединенных волн имеют более сложную форму, чем (32). Так как простого точного решения найти не удастся, то можно обратиться к приближенному методу расчета параметров солитона, основанному на минимизации лагранжиана взаимодействия. Задавая форму искомого решения в виде гауссовских функций

$$E_o = E_{om} \exp(-\tau_s^2/T_o^2), \quad E_e = E_{em} \exp(-\tau_e^2/T_e^2), \quad (33)$$

можно прийти к следующим выводам. Если обозначить отношение квадратов длительностей импульсов через $\xi = T_e^2/T_o^2$, то получаем

$$E_{em} = \alpha (2 + \xi)^{3/2} / (\sqrt{2} \beta_{oe}^o \xi T_o^2),$$

$$E_{om} = \alpha (2 + \xi)^{3/2} / [(\beta_{oe}^o \beta_{oo}^e)^{1/2} \sqrt{\xi} (2 - \xi)^{1/2} T_o^2], \quad (34)$$

где $\alpha = (\Omega_o^2 \alpha_1 - \Omega_e^2) / (\gamma_o \alpha_1 - \gamma_e)$ и $\alpha_1 = \xi^2 (2 + 3\xi) / [(4 + \xi)(2 - \xi)]$. При одинаковых длительностях $T_o = T_e$, $\xi = 1$ имеем $\alpha_1 = 1$ и соотношения (34) переходят в (32) с учетом разницы профилей солитонов. Отметим, что α_1 совпадает с аналогичным параметром, введенным в [19] для солитонов огибающей во втором приближении теории линейной дисперсии (п. 3). Однако в отличие от последних скорость распространения параметрических солитонов, описываемых нелинейными уравнениями Максвелла, зависит от величины электрического поля.

Для численного решения уравнений (29), (30) нами был разработан консервативный спектрально-разностный метод [50, 51]. В безразмерном виде уравнения содержат нормированные время $\omega_o t$ и расстояние $z\omega_o/c$. Характерная частота сигналов ω_o в представленном ниже примере в 9 раз меньше резонансной частоты осциллятора для обыкновенной волны Ω_o .

Приведем результаты расчетов распространения двух ультракоротких импульсов:

$$E_o = E(0) \exp(-t^2/T^2) \sin(t/2), \quad E_e = -E(0) \exp(-t^2/T^2) \sin t \quad (35)$$

с $T = 6,28$ и $E(0) = 20$, обладающих отрицательным значением квазиинварианта (31) (рис. 8, кривые 1). Квадратично-нелинейная среда име-

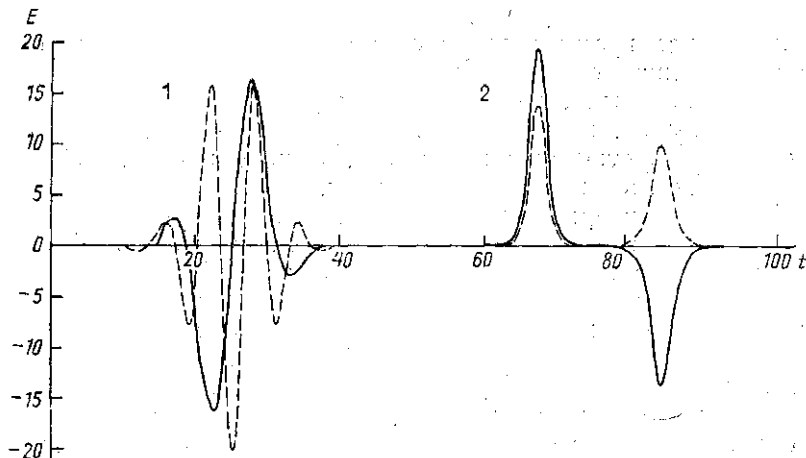


Рис. 8. Формирование связанных солитонов обыкновенной (сплошные линии) и необыкновенной (штриховые) волн. Показаны профили импульсов на входе в среду (1) и на расстоянии $z = 5600$ (2)

есть следующие нормированные значения параметров: $\Omega_0^2=81$, $\Omega_e^2=77,44$, $\gamma_0=8$, $\gamma_e=7,65$, $\beta_{oc}^0=1$. В линейном случае отношения скоростей нормальных волн на малых частотах к скорости света в вакууме равны $v_0/c=0,6679257$ и $v_e/c=0,6679468$.

Численное моделирование показало, что сначала импульсы приобретают нерегулярную форму. Затем происходит формирование отдельных уединенных импульсов и отделение быстро осциллирующего хвоста, скорость распространения которого значительно меньше, чем главной части. После прохождения расстояния $z=5600$ профили приобретают стационарный вид (рис. 8, кривые 2) — образовалась пара связанных солитонов, имеющих разные амплитуды и скорости. Более быстрый солитон с большими амплитудами $E_{om}=19,2198$, $E_{em}=13,4898$ имеет параметр распространения $\alpha=E_{om}/P_{om}=10,3401$, чему соответствует нормированная скорость солитона $v_s/c=0,67186$. Другой, менее быстрый параметрический солитон имеет меньшие амплитуды: $E_{om}=-13,6914$, $E_{em}=9,6336$. По параметру распространения $\alpha=E_{om}/P_{om}=10,27914$ легко вычислить скорость солитона $v_s/c=0,67077$. Эти данные хорошо совпадают с результатами, полученными вариационным методом (34).

Интересно отметить, что параметрически связанный солитон с меньшей амплитудой образовался на фронте начальных импульсов, но затем его догнал солитон с большей амплитудой, который и занял положение в начале электромагнитной волны. Очевидно, что этот обмен позициями солитонов, идущих в одном направлении, сопровождался их столкновением. Отметим, что первый солитон имеет одинаковую положительную полярность обеих составных частей обыкновенной и необыкновенной волн. Две части второго, более слабого солитона имеют разные знаки: как говорилось ранее, обыкновенная волна может иметь как положительный, так и отрицательный знак. Данное свойство связанных солитонов и проявилось при эволюции волновых пакетов (35).

Заключение

В ближайшее время следует ожидать новых экспериментальных успехов в создании полностью оптически управляемых логических устройств, построенных с использованием уникальных свойств солитонов на квадратичной нелинейности. Это даст дополнительный толчок к расширению теоретических изысканий. Однако и сейчас можно перечислить ряд интересных проблем и задач.

В теории параметрических солитонов необходимо развивать различные приближенные аналитические методы, что весьма важно для постановки и проведения экспериментов. Здесь особый интерес представляет анализ влияния расстройек групповых скоростей. Заслуживает внимания использование высших приближений в теории линейной и нелинейной дисперсии для описания свойств коротких связанных солитонов. Решение связанных уравнений Кортевега—де Фриза позволит проанализировать возможности образования параметрически связанных бризеров в среде с квадратичной нелинейностью. В рамках нелинейных уравнений Максвелла помимо продолжения изучения свойств связанных солитонов различной длительности можно исследовать целый ряд новых задач, обусловленных особенностями генерации гармоник, параметрического усиления и распадной неустойчивости пре-

дельно коротких импульсов. Наконец, явление взаимофокусировки волновых пучков в среде с квадратичной нелинейностью также заслуживает более детального изучения.

Важно отметить, что теория параметрических солитонов на квадратичной нелинейности находит применение не только в нелинейной оптике, но и в совершенно другом разделе физики — механике упругих оболочек [52]. Реактивное взаимодействие первых двух гармоник и параметрическая взаимофокусировка представляют практический интерес для нелинейной акустики и гидродинамики, так как квадратичная нелинейность является доминирующей для акустических волн (см., напр., [53]). Этот список наверняка будет расти.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. Н. Карамзину, М. В. Комиссаровой, Лу Синю и А. С. Поташникову за помощь в подготовке данного обзора.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-18592а) и программы «Фундаментальное естествознание».

ЛИТЕРАТУРА

1. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.//Письма в ЖЭТФ. 1974. 20. С. 734.
2. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.//ЖЭТФ. 1975. 68. С. 834.
3. Сухоруков А. П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М., 1988.
4. Torruellas W. E., Wang Z., Hagan D. J., Van Stryland E. W., Stegeman G. I., Torner L., Menyuk C. R.//Phys. Rev. Lett. 1995. 74. P. 5036.
5. Torruellas W. E., Wang Z., Torner L., Stegeman G. I.//Opt. Lett. 1995. 20. P. 1949.
6. Nonlinear Guided Waves and their Applications. 1995 Technical Digest Series. V. 6. Dana Point, California.
7. Conf. on Lasers and Electro-Optics & Quant. Electron. and Laser Science Conf. 1996 Technical Digest Series. V. 9, 10. Anaheim, California, 1996.
8. Хохлов Р. В.//Радиотехн. и электроника. 1961. 6. С. 917.
9. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., 1964.
10. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М., 1966.
11. Вильхельмссон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М., 1981.
12. Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа. М., 1974.
13. Хаус Х. Волны и поля в оптоэлектронике. М., 1988.
14. Балакший В. И., Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Физические основы акустооптики. М., 1985.
15. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.//УФН. 1967. 93. С. 19.
16. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. 2-е изд. М., 1990.
17. Hayata K., Koshiha M.//Phys. Rev. Lett. 1993. 71. P. 3275; 1994. 72. P. 178(E).
18. Buryak A. V., Kivshar Yu. S.//Opt. Lett. 1994. 19. P. 1612.
19. Steblina V. V., Kivshar Y. S., Lisak M., Malomed B. A.//Opt. Commun. 1995. 118. P. 345.
20. Лу Синь, Сухоруков А. П.//Изв. РАН, сер. физ. 1996. 60, № 12. С. 64.
21. Fuerst R. A., Torruellas W. E., Lawrence B. G., Stegeman G. I.//Quant. Electron. and Laser Science Conf. 1996. Technical Digest Series. V. 10. Anaheim, California, 1996.
22. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Филинчук Т. С.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1978. № 4. С. 91 (Moscow University Phys. Bull. 1978. N 4. P. 73); Изв. вузов, Радиофизика. 1978. 21. С. 456.
23. Torner L., Menyuk C. R., Stegeman G. I.//J. Opt. Soc. Am. 1995. В 12. P. 889.
24. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В., Чиркин А. С.//Письма в ЖЭТФ. 1968. 7. С. 237.

25. Akhmanov S. A., Chirkin A. S., Drabovich K. N., Khokhlov R. V., Sukhorukov A. P.//IEEE J. Quant. Electron. 1968. QE-4. P. 598.
26. Ахманов С. А., Хохлов Р. В.//ЖЭТФ. 1962. 43. С. 351.
27. Данелюс Р., Пискараскас А., Сируткайтис В., Стабинис А., Ясевичюте Я. Параметрические генераторы света и пикосекундная спектроскопия. Вильнюс, 1983.
28. Khaudarov J. D. V., Andrews J. H., Singer K. D.//Opt. Lett. 1994. 19. P. 831; Appl. Phys. Lett. 1994. 65. P. 1614.
29. Захаров В. Е., Шабат А. Б.//ЖЭТФ. 1971. 61. С. 118; Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М., 1980.
30. Комиссарова М. В., Сухоруков А. П.//Квант. электроника. 1993. 20. С. 1025.
31. Комиссарова М. В., Sukhorukov A. P.//Laser. Phys. 1996. 6. P. 1036.
32. Комиссарова М. В., Sukhorukov A. P.//Proc. SPIE. 1994. 2332. P. 154.
33. Комиссарова М. В., Сухоруков А. П.//Изв. вузов, Радиофизика. 1995. 38. С. 331.
34. Гурзадян Г. Г., Дмитриев В. Г., Никогосян Д. Н. Нелинейно-оптические кристаллы: Свойства и применение в квантовой электронике. М., 1991.
35. Ахманов С. А., Дмитриев В. Г., Моденов В. П.//Радиотехн. и электроника. 1964. 9. С. 814.
36. Комиссарова М. В. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1996.
37. Комиссарова М. В., Sukhorukov A. P.//Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 1992. 56. P. 1995.
38. Buryak A. V., Kivshar Yu. S., Trillo S.//Opt. Lett. 1995. 20. P. 1961.
39. Trillo S., Buryak A. V., Kivshar Yu. S.//Opt. Commun. 1996. 122. P. 200.
40. Gats S., Herrmann J.//J. Opt. Soc. Am. 1991. B 8. P. 2296.
41. Krolikowski W., Luther-Davies B.//Opt. Lett. 1992. 17. P. 1414.
42. Комиссарова М. В., Сухоруков А. П.//Изв. РАН, сер. физ. 1996. 60, № 12. С. 58.
43. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М., 1988.
44. Marcuse D.//Appl. Opt. 1981. 20. P. 3573.
45. Anderson D., Lisak M.//Phys. Rev. 1983. A27. P. 1393.
46. Громов Е. М., Таланов В. И.//Изв. РАН, сер. физ. 1996. 60, № 12. С. 16.
47. Пирогова И. Ю., Сухоруков А. П.//Опт. и спектр. 1985. 59. С. 694.
48. Ведерко А. В., Дубровская О. Б., Марченко В. Ф., Сухоруков А. П.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. № 3. С. 4 (Moscow University Phys. Bull. 1992. N 3. P. 5).
49. Дубровская О. Б., Сухоруков А. П.//Изв. РАН, сер. физ. 1992. 56, № 12. С. 184.
50. Karamzin Yu. N., Potashnikov A. S., Sukhorukov A. A. 8-th Laser Opt. Conf. Technical Digest. St. Petersburg, Russia, 1995. V. 2. P. 360.
51. Карамзин Ю. Н., Поташников А. С., Сухоруков А. П.//Изв. РАН, сер. физ. 1996. 60, № 12. С. 29.
52. Ковригин Д. А., Потапов А. И. Нелинейная виброакустика упругих систем. Нижний Новгород, 1992.
53. Савицкий О. А. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1996.