

6. Гуфан Ю. М., Ларин Е. С. // ДАН. 1978. 242. С. 1311.
 7. Мудров А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск, 1991.
 8. Ujma Z., Handerek J., Hassan H. et al. // J. Phys.: Condens. Matter. 1995. 7. P. 895.
 9. Handerek J., Ujma Z. // Ibid. P. 1721.
 10. Xunhu Dai, Jie-Fang Li, Dwight Viehland // J. Appl. Phys. 1995. 77. P. 3354.

Поступила в редакцию
03.04.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 6

ГЕОФИЗИКА

УДК 532.5

О ПОРОГОВО-КРИТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТАХ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ СЕЙСМОВОЛН В ВЯЗКОУПРУГИХ ГЕОСРЕДАХ

С. А. Арсеньев, М. М. Вахрушев, Н. К. Шелковников

(кафедра физики моря и вод суши)

В рамках вязкоупругой модели геосреды с реологией Максвелла получены и исследованы нелинейно-диссипативные эффекты, возникающие при распространении сейсмических волн с большими числами Маха.

В последнее время в связи с развернувшимися исследованиями нелинейных явлений в сейсмологии подробно изучается связь между нелинейными и другими факторами, определяющими процесс распространения сейсмических волн через геосреду. Наиболее важным является баланс между поглощением (диссипацией) волны и нелинейностью, для характеристики которого в работах [1, 2] предложено ввести два масштаба:

$$L_n = \frac{\lambda}{20\pi N M}, \quad L_* = \frac{1}{\beta}. \quad (1)$$

Первый из них называют характерной длиной нелинейности, определяя как 1/10 от расстояния, на котором вследствие действия нелинейности формируется вертикальный фронт нелинейной волны: $L_b = 10 L_n$. Масштабы L_n и L_b зависят от длины волны λ , коэффициента нелинейности N и числа Маха M . Второй масштаб в (1) — это масштаб затухания L_* , обратный амплитудному коэффициенту затухания β . Согласно [1, 2], при $L_n \gg L_*$ доминирует диссипация и нелинейные эффекты не успевают развиться. При $L_n \ll L_*$ нелинейные эффекты преобладают. Оценки, сделанные в [1], показывают, что в реальных геосредах $L_n \gg L_*$, и на этом основании делается вывод о том, что при распространении сейсмических волн преобладают эффекты поглощения, а нелинейностью можно пренебречь.

По нашему мнению, однако, дело обстоит не так просто, поскольку нелинейные эффекты могут накапливаться по мере распространения волны. В настоящей статье на примере вязкоупругой среды показано, что на самом деле соотношения между нелинейностью и диссипацией намного сложнее, так как нелинейность приводит к порогово-критическим эффектам при распространении сейсмических волн. Вязкоупругие модели привычны для геофизиков [3—5], потому что они достаточно ра-

зумно аппроксимируют реологические соотношения для реальных геосред с внутренним пластическим [6] и даже с кулоновским сухим трением [7].

Будем исходить из уравнений баланса плотности потока импульса

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2)$$

в эйлеровых переменных, не связанных с деформируемой геосредой. Замыкая их реологическим уравнением Максвелла [8], можно получить следующее нелинейное эволюционное уравнение [3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial x \partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \omega_* \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3)$$

описывающее процесс распространения сейсмоволн вдоль определенного направления (в данном случае $x_1 = x$). В (3) обозначено: $c_0^2 = \mu/\rho$ — скорость сейсмоволн, μ — модуль сдвига и $\omega_* = \mu/\eta_2 = 1/\theta$ (θ — время релаксации), u — скорость деформации геосреды [3]. В безразмерных переменных $U = u/u_0$, $\bar{t} = \omega t$, $\bar{x} = \omega x/c$ (u_0 — характерная скорость деформаций, ω — частота сейсмоволны) уравнение (3) имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{t}^2} + \frac{M}{2} \frac{\partial^2 U^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}^2} - R \frac{\partial U}{\partial \bar{t}} \quad (4)$$

Здесь $M = u_0/c$ — число Маха и $R = \omega_*/\omega$ — число Рэлея, обозначаемое также как диссипативная функция $1/Q$, где Q — добротность [8].

В реальных геосредах числа M и R малы. Например, для песка вблизи поверхности Земли $\theta = 10^{-4}$ с [9], $\omega_* = 10^4$ Гц и $R = 10^{-2}$ для ультразвуковых волн, используемых в сейсмовибраторах с частотой $\omega = 1000$ кГц. Для сейсморазведки типичные значения числа Маха имеют порядок $10^{-3} - 10^{-5}$ [10]. Вблизи источников сейсмоволн можно считать $M = 10^{-2}$. Таким образом, можно записать $M = \nu m_1$, $R = \nu r$, где $\nu = 10^{-2}$ — малый параметр.

Для решения нелинейного уравнения (4) введем быструю $\xi = \nu \bar{x}$ и медленную $\tau = \bar{t} - \bar{x}$ переменные. Пренебрегая малыми членами порядка ν^2 и выше, перепишем уравнение (4) в новых переменных:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} - mU \frac{\partial U}{\partial \tau} + \delta U = 0, \quad (5)$$

где $m = m_1/2$, $\delta = r/2$.

Если диссипация сейсмоволн отсутствует ($\omega_* = 0$), уравнению (5) соответствует обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\xi}{1} = - \frac{d\tau}{mU}$$

Его интеграл

$$-mU\xi = \tau + c(U) \quad (6)$$

содержит постоянную c , зависящую от U . Эта постоянная находится из граничного условия

$$U(0, \bar{t}) = \Phi(\bar{t}), \quad (7)$$

которое означает, что сейсмодатчик излучает волну известной формы $\Phi(\bar{t})$. Условие (7) дает $\bar{t}=F(U)$, где F — известная функция, обратная к Φ . При $\xi=0$ $\tau=\bar{t}$, а (7) дает $c(U)=-\tau=-\bar{t}=F(U)$. Следовательно,

$$\tau = -mU\xi + F(U). \quad (8)$$

Если вибратор излучает гармоническую волну частоты ω и амплитуды u_0 : $\Phi(\bar{t})=\sin \bar{t}$, то $F(U)=\bar{t}=\arcsin U$ и (8) принимает вид

$$\tau = -m\xi U + \arcsin U. \quad (9)$$

Решение (9) определяет интересующую нас зависимость U от ξ в трансцендентной форме. Ее лучше представить графически, в координатах U и τ . Как видим (рис. 1), решение представляет собой сум-

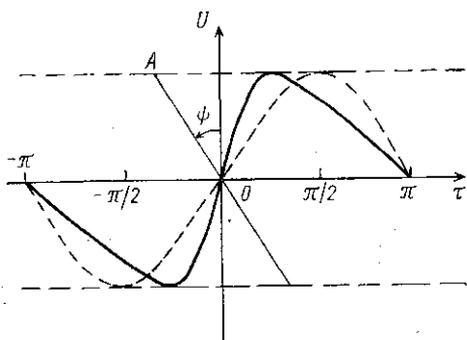


Рис. 1. Зависимость безразмерной амплитуды сейсмодолны U от координаты τ в соответствии с решением (15) (сплошная линия) и решением (9) при $\delta=0$ (штриховая)

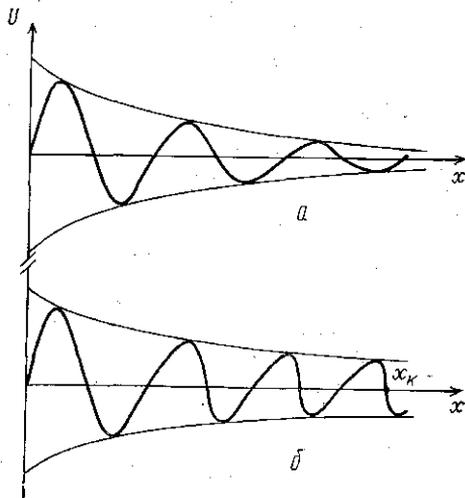


Рис. 2. Изменение формы сейсмодолны, обусловленное нелинейными эффектами и диссипацией: $u_0 < u_0^p, \alpha > 1$ (а) и $u_0 > u_0^p, \alpha < 1$ (б)

му синусоиды и прямой, угол наклона ψ которой относительно оси ординат определяется из соотношения $\operatorname{tg} \psi = m\xi$. В отсутствие нелинейности ($m=0$) прямая OA совпадает с осью ординат. Форма волны при этом остается гармонической на любом расстоянии от сейсмодатчика, координата которого $x=0$. В нелинейном случае по мере продвижения волны (с увеличением $\xi=vx$) угол ψ увеличивается, т. е. прямая OA вращается против часовой стрелки. Происходит непрерывное изменение формы волны: укручение переднего склона и сглаживание заднего, показанное на рис. 1 сплошной линией.

Когда $\psi=\pi/4$, профиль волны становится вертикальным. Поэтому условие $m\xi=1$ определяет расстояние, после прохождения которого профиль сейсмодолны из гладкого синусоидального трансформируется в пилообразный. Безразмерное расстояние $m\xi=1$ отвечает длине пути формирования вертикального фронта x_b , определяемой формулой

$$x_b = \frac{\lambda}{2\pi M} = \frac{c_0^2}{u_0 \omega}, \quad (10)$$

согласно которой на длине x_b укладывается $(2\pi M)^{-1}$ длин волн. Формулу (10) можно также переписать в виде

$$x_b = \frac{\mu}{\rho u_0 \omega}, \quad (11)$$

показывающем, что чем больше модуль сдвига μ и меньше скорость деформации u_0 , частота ω сейсмической волны и плотность ρ геосреды, тем большее расстояние сейсмическая волна проходит в геосреде без образования ударной волны. Наоборот, в геосреде с малым модулем сдвига μ при больших скоростях деформаций u_0 и больших плотностях геосреды ρ высокочастотные сейсмические волны с большими ω образуют ударную волну на малых расстояниях от источника.

Этот результат, однако, справедлив при отсутствии диссипации, весьма существенно влияющей на распространение сейсмических волн. При $\omega_* \neq 0$ уравнению (5) соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi}{1} = -\frac{d\tau}{mU} = -\frac{dU}{\delta U}.$$

Интегрируя ее, получим

$$U = c_1 \exp(-\delta\xi), \quad (12)$$

$$\tau = mU/\delta + c_2(c_1). \quad (13)$$

Для определения постоянных интегрирования c_1 и c_2 разрешаем (12) относительно постоянной c_1 и результат подставляем в (13):

$$\tau = mU/\delta + c_2[U \exp(\delta\xi)].$$

Для определения постоянной c_2 используем граничное условие (7):

$$mU/\delta + c_2(U) = F(U).$$

Отсюда получим

$$c_2(U) = F(U) - mU/\delta.$$

Входящая в решение (13) константа $c_2(c_1)$ определяется поэтому формулой

$$c_2(c_1) = F[U \exp(\delta\xi)] - mU \exp(\delta\xi)/\delta.$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$\tau = -(m/\delta) U \exp(\delta\xi) [1 - \exp(-\delta\xi)] + F[U \exp(\delta\xi)]. \quad (14)$$

Если при $\bar{x}=0$ сейсмический вибратор излучает гармоническую волну $U = \sin \bar{t}$ с амплитудой u_0 и частотой ω , то (14) можно записать следующим образом:

$$\tau = -(m/\delta) [1 - \exp(-\delta\xi)] U \exp(\delta\xi) + \arcsin[U \exp(\delta\xi)]. \quad (15)$$

Соотношение (15), так же как и (9), удобно анализировать графически. Но вместо координат τ и U удобно использовать координаты τ и $U \exp(\delta\xi)$. Угол наклона прямой к оси ординат теперь определяется иным соотношением:

$$\operatorname{tg} \psi = (m/\delta) [1 - \exp(-\delta\xi)]. \quad (16)$$

При $\xi=0$, $\operatorname{tg} \psi=0$ и с ростом ξ величина $\operatorname{tg} \psi$ увеличивается. При $\xi \rightarrow \infty$ величина $\operatorname{tg} \psi$ стремится к постоянному значению

$$\operatorname{tg} \psi = m/\delta. \quad (17)$$

Если $\operatorname{tg} \psi \ll 1$, то нелинейностью можно пренебречь. Сейсмоволна, распространяясь в геосреде, заглушается по закону $\exp(-\delta\xi)$ и исчезает раньше, чем успеет изменить свою форму из-за нелинейности. При $\operatorname{tg} \psi \geq 1$ в геосреде образуется ударная волна.

Условие $\operatorname{tg} \psi=1$, эквивалентное условию $M=R$, определяет пороговую амплитуду излучаемой в источнике волны:

$$u_0^b = R c = \frac{\omega_* c}{\omega} = \frac{1}{\omega \vartheta} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (18)$$

Для того чтобы в геосреде могла возникнуть пилообразная волна, необходимо, чтобы $u_0 \geq u_0^b$, где u_0^b определяется формулой (18), так что $\alpha = u_0^b / u_0 \leq 1$. На рис. 2 приведены формы волны при $\alpha > 1$ и $\alpha \leq 1$ для заданной частоты трения ω_* .

Из формулы (18) видно, что пороговая амплитуда сейсмоволны тем больше, чем больше трение, модуль сдвига (скорость сейсмоволны) и чем меньше плотность геосреды и частота сейсмоволны. Поэтому в геосреде с большим трением и модулем сдвига (скоростью волны) низкочастотные сейсмические волны не могут образовывать ударных волн. Однако при уменьшении трения, модуля сдвига (скорости волн) и увеличении плотности геосреды высокочастотные сейсмические волны могут образовывать ударные волны, так как пороговое значение (18) в этом случае уменьшается.

Величину критического расстояния x_k , на котором происходит формирование ударной волны, при заданной амплитуде u_0 находим из условия

$$(m/\delta) [1 - \exp(-\delta\xi)] = 1.$$

Его удобно переписать в виде

$$x_k = -\frac{c}{\omega_*} \ln \left(1 - \frac{\omega_*}{\omega} \frac{c}{u_0} \right) = \frac{c}{\omega_*} \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right). \quad (19)$$

Для интерпретации наблюдений важно получить спектральные разложения полученных решений. Для решения (9) соответствующие формулы легко находятся с помощью формул известного в нелинейной теории волн разложения Бесселя—Фубини [11]. Поэтому выпишем здесь полученное нами спектральное разложение решения (14), учитывающего диссипацию. Для удобства перепишем (14) в виде

$$U = \exp(-\delta\xi) \cos \left\{ \tau - \frac{m}{\delta} U [1 - \exp(\delta\xi)] \right\}, \quad (20)$$

соответствующем выбору косинуса в граничном условии (7).

Функциональное уравнение (20) решается методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} U_0 &= 0, \quad U_1 = \exp(-\delta\xi) \cos \tau, \\ U_2 &= \exp(-\delta\xi) \cos \left(\tau + \beta \cos \tau \right) = \exp(-\delta\xi) \operatorname{Re} [\exp(i\tau + i\beta \cos \tau)], \\ \beta &= (m/\delta) [1 - \exp(-\delta\xi)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя соотношения из теории функций Бесселя [12], получим

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \exp(-\delta\xi) \operatorname{Re} \exp(i\tau) \left\{ J_0(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\beta) \cos \left[2n \left(\tau + \frac{\pi}{2} \right) \right] + \right. \\
 &+ 2i \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\beta) \sin \left[(2n+1) \left(\tau + \frac{\pi}{2} \right) \right] \left. \right\} = \\
 &= \exp(-\delta\xi) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [J_{2n}(\beta) - J_{2n+2}(\beta)] \cos[(2n+1)\tau + \pi n] + \right. \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} [J_{2n-1}(\beta) + J_{2n+1}(\beta)] \cos \left[2n\tau + (2n-1) \frac{\pi}{2} \right] \left. \right\} = \\
 &= A_1(\xi) \cos \tau + A_2(\xi) \cos \left(2\tau + \frac{\pi}{2} \right) + A_3(\xi) \cos(3\tau + \pi) + \dots \quad (22)
 \end{aligned}$$

Вычисления по формулам (21), (22) выполнены нами для сейсмически активной геосреды с большим затуханием: $R=0,1$. На рис. 3, 4 безразмерные амплитуды трех первых гармоник показаны

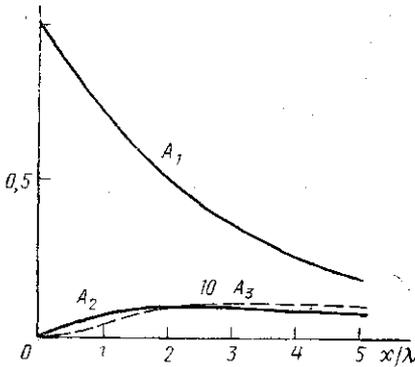


Рис. 3. Гармоники в нелинейной сейсмической волне при $u_0 < u_0^b$ (ударная волна отсутствует)

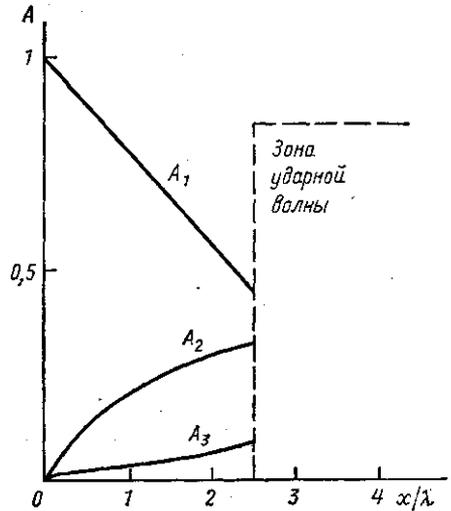


Рис. 4. Гармоники в нелинейной сейсмической волне при $u_0 > u_0^b$: ударная волна образуется при $x=1,276 \lambda$. (Масштаб по оси x/λ следует уменьшить в 2 раза.)

как функция безразмерного расстояния x/λ для двух различных уровней u_0 сейсмического сигнала, создаваемого источником. В первом случае (рис. 2, а и 3) $u_0 < u_0^b$ и пилообразная ударная волна не образуется даже при бесконечном путешествии сейсмической волны в геосреде, где она в конце концов затухает по экспоненциальному закону. Максимальная амплитуда второй гармоники достигается при $x=1,5 \lambda$, а третьей гармоники — при $x=3,5 \lambda$, но третья гармоника меньше, чем вторая, и в дальнейшем картина становится более однородной. Во

втором случае (рис. 2, б и 4) $u_0 > u_0^b$ и ударная волна формируется при $x = 1,27\lambda$. Легко видеть, что гармоники во втором случае растут быстрее, чем в первом.

Резюмируя основной результат, полученный в данной работе, подчеркнем порогово-критический характер соотношения между эффектами нелинейности и диссипации в вязкоупругих геосредах. Только при условии $u_0 < u_0^b$ возможно пренебречь нелинейными эффектами и считать, что диссипация доминирует (см. рис. 2, а). Если амплитуда возникшей сейсмической волны превышает порог u_0^b , то нелинейностью пренебрегать нельзя, так как в этом случае образуется пилообразная ударная волна, для описания которой существенны нелинейные эффекты (см. рис. 2, б).

Условие образования ударных волн в вязкоупругих геосредах $u_0 \geq u_0^b$ можно записать в безразмерном виде:

$$A = M/R = MQ \geq 1. \quad (23)$$

Таким образом, для характеристики баланса между нелинейностью и диссипацией при распространении сейсмических волн необходимо вводить безразмерное число A , равное отношению чисел Маха и Рэлея или произведения числа Маха на диссипативную функцию.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 95-05-16028а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев И. А., Николаев А. В. // Проблемы нелинейной сейсмологии. М., 1987. С. 86.
2. Николаев А. В. // Физические основы сейсмического метода. М., 1991. С. 5.
3. Арсеньев С. А., Рыкунов Л. Н., Шелковников Н. К. // ДАН. 1994. 338, № 2. С. 225.
4. Николаевский В. Н. // Проблемы нелинейной сейсмологии. М., 1987. С. 190.
5. Арсеньев С. А. // Водные ресурсы. 1991. № 1. С. 29.
6. Пальмов В. А. Колебания упруго-пластических сред. М., 1976.
7. Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М., 1984.
8. Магницкий В. А. Внутреннее строение и физика Земли. М., 1965.
9. Николаевский В. Н. // ДАН. 1985. 283, № 6. С. 1321.
10. Хаврошкин О. Б. // Проблемы нелинейной сейсмологии. М., 1987. С. 75.
11. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., 1979.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

Поступила в редакцию
24.11.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1996. № 6

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.92; 93

О ВАРИАЦИЯХ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ СУТОК И КОЛЕБАНИЯХ АТМОСФЕРНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ

В. Е. Жаров
(ГАИШ)

Сравнение спектров продолжительности суток и аксиальной компоненты атмосферного углового момента показывает значительное влияние турбулентности атмосферы на вращение Земли. Вариации продолжительности суток с периодами от не-