

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 524.3

О СРЫВЕ АМПЛИТУДЫ
ВЫНУЖДЕННЫХ АЛЬФВЕНОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ

С.А.Марковский
(ГАИШ)

Рассматриваются вынужденные нелинейные альфвеновские колебания в системе с дискретным спектром. В такой системе, в силу дискретности спектра или за счет диссипации, возможна стабилизация неустойчивых процессов взаимодействия исходной альфвеновской волны с малыми возмущениями. Для этого случая найдена поправка к собственной частоте малых стационарных колебаний. Показано, что при изменении частоты вынуждающей силы в системе происходит срыв амплитуды колебаний. Этот эффект необходимо учитывать при описании динамики плазмы в МГД-резонаторах, таких как полярная ионосфера Земли и солнечные корональные петли.

1. Введение

Вопрос о вынужденных альфвеновских колебаниях возникает в связи с изучением солнечных корональных петель, основания которых закреплены на фотосфере (см., напр., [1]). Как показано в работе [2], гидродинамические движения на фотосфере играют роль вынуждающей силы для резонансных альфвеновских колебаний корональных петель, в которых образуется стоячая волна.

Из результатов работы [3] следует, что аналогичная ситуация имеет место в полярной ионосфере Земли, которая представляет собой резонатор, возбуждаемый падающей из магнитосферы альфвеновской волной.

В данной статье в рамках магнитной гидродинамики без дисперсии обсуждаются нелинейные эффекты, которые обусловлены взаимодействием исходной альфвеновской волны с возбуждаемыми ею магнитозвуковыми возмущениями в третьем порядке по малой амплитуде волны. Недавно эти эффекты для стоячей альфвеновской волны рассматривались в работе [4], причем взаимодействие усреднялось по ее периоду в пределе плазмы с малым β . В работе [4] не учитывались различные виды неустойчивости альфвеновской волны, поскольку проведенное там рассмотрение было направлено в основном на нестационарные процессы с характерным временем, много меньшим обратного инкремента неустойчивости.

Как известно, в бесконечной среде альфвеновские волны неустойчивы и превращаются в неупорядоченные колебания среды за время порядка обратного инкремента неустойчивости [5]. Однако, как указывалось в работе [6], в системе с дискретным спектром возможности для возникновения неустойчивости ограничены.

Ниже рассматриваются стационарные режимы установившихся малых колебаний системы, в которой параметрические неустойчивости альфвеновской волны ста-

билизованы во втором порядке по амплитуде в силу дискретности спектра или за счет диссипации. Найдена зависимость амплитуды стационарных колебаний от частоты вынуждающей силы. Показано, что при достаточно большой величине вынуждающей силы эта зависимость имеет точки срыва.

2. Постановка и решение задачи

Предположим, что однородная электропроводящая среда с магнитным полем, направленным вдоль оси z , ограничена плоскостями $z = 0$ и $z = L$. Рассмотрим малые альфвеновские колебания в такой системе, вызванные движением среды в плоскости $z = L$ со скоростью $V_0 \cos \Omega t$.

Для описания колебаний воспользуемся методом последовательных приближений. Будем исходить из уравнений МГД в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B_{\perp}^2}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dp}{dt} + \gamma p \frac{\partial v_z}{\partial z} - \nu_m \frac{(\gamma - 1)}{4\pi} \left(\frac{\partial B_{\perp}}{\partial z} \right)^2 = 0, \tag{3}$$

$$\rho \frac{dv_{\perp}}{dt} - \frac{B_z}{4\pi} \frac{\partial B_{\perp}}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial B_{\perp}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(v_z B_{\perp}) - B_z \frac{\partial v_{\perp}}{\partial z} - \nu_m \frac{\partial^2 B_{\perp}}{\partial z^2} = 0, \tag{5}$$

где индекс "⊥" обозначает направление поперек магнитного поля, γ — показатель адиабаты идеального газа, а ν_m — магнитная вязкость.

Направим ось x вдоль V_0 , тогда в первом приближении возмущение $v_x^{(1)}$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\mathcal{L}_A v_x^{(1)} - \nu_m \frac{\partial^3 v_x^{(1)}}{\partial t \partial z^2} = 0, \quad (6)$$

где $\mathcal{L}_A = \partial^2 / \partial t^2 - V_A^2 \partial^2 / \partial z^2$ - волновой оператор, с граничным условием

$$v_x^{(1)}|_{z=0} = 0, \quad v_x^{(1)}|_{z=L} = V_0 \cos \Omega t. \quad (7)$$

Эта граничная задача имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} v_x^{(1)} &= V_0 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sin(kz)}{\sin(kL)} e^{i\Omega t} \right\} = \\ &= A V_A [\sin(k_R z) \operatorname{ch}(k_I z) \cos(\Omega t + \phi) - \\ &\quad - \cos(k_R z) \operatorname{sh}(k_I z) \sin(\Omega t + \phi)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \frac{V_0}{V_A} [\sin^2(k_R L) \operatorname{ch}^2(k_I L) + \\ &\quad + \cos^2(k_R L) \operatorname{sh}^2(k_I L)]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\phi = \operatorname{arctg}[\operatorname{ctg}(k_R L) \operatorname{th}(k_I L)]. \quad (10)$$

Предполагая диссипацию малой, достаточно ограничиться первым порядком в разложении величин $k_R \equiv \operatorname{Re} k$ и $k_I \equiv \operatorname{Im} k$. Тогда

$$k_R = \frac{\Omega}{V_A}, \quad k_I = -\frac{1}{2} \frac{\Omega^2 \nu_m}{V_A^3}. \quad (11)$$

В формуле (8) не учитывается общее решение однородной задачи, которое затухает со временем.

Такие вынужденные колебания имеют резонансную частоту $\Omega = \omega_0$, где

$$\omega_0 = \pm k_0 V_A \equiv \pm \frac{n\pi V_A}{L}, \quad (12)$$

а n - целое число.

Для построения следующих приближений асимптотического решения, описывающего колебания на частоте Ω , рассмотрим свободные колебания в системе без диссипации [7]. Возьмем в качестве первого приближения выражения

$$v_x^{(1)} = A V_A \sin(k_0 z) \cos(\omega t), \quad (13)$$

$$B_x^{(1)} = A B_z^{(0)} \cos(k_0 z) \sin(\omega t), \quad (14)$$

которые соответствуют знаку "+" в формуле (12). Здесь ω представляется в виде ряда по степеням A . При этом поправки к нулевому приближению ω_0 следует определять из того условия, что величина A является точной амплитудой колебаний на частоте ω_0 . Это означает, что в более высоких приближениях функции v_x и B_x не содержат гармоники ω_0 [8].

Выпишем теперь волновые уравнения с точностью до членов третьего порядка:

$$\mathcal{L}_s (v_z^{(2)} + v_z^{(3)}) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\rho^{(0)}} \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left[\frac{(B_x^{(1)})^2}{2} + B_x^{(1)} B_x^{(2)} \right], \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A (v_x^{(1)} + v_x^{(2)} + v_x^{(3)}) &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(0)}} \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial t} + v_z^{(2)} \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial z} \right] - \\ &\quad - \frac{B_z^{(0)}}{4\pi\rho^{(0)}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[v_z^{(2)} B_x^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathcal{L}_s = \partial^2 / \partial t^2 - V_s^2 \partial^2 / \partial z^2$. Подставляя (14) в (15), находим во втором приближении

$$v_z^{(2)} = -\frac{A^2 V_A \alpha}{8} \sin(2k_0 z) \sin(2\omega t), \quad (17)$$

$$\alpha = \frac{V_A^2}{V_A^2 - V_s^2}. \quad (18)$$

Затем из (1) определяем $\rho^{(2)}$:

$$\rho^{(2)} = -\frac{A^2 \rho^{(0)} \alpha}{8} \cos(2k_0 z) \cos(2\omega t). \quad (19)$$

Далее, поскольку правая часть уравнения (16) не содержит слагаемых второго порядка, то $\omega_0^{(1)} = 0$.

Подставим теперь (13), (14), (17) и (19) в уравнение (16). Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A (v_x^{(3)}) &= 2 A V_A \omega_0 \omega_0^{(2)} \sin(k_0 z) \cos(\omega t) - \\ &- \frac{\alpha A^3 V_A \omega_0^2}{32} \left\{ \sin(k_0 z) \cos(\omega t) - 9 \sin(3k_0 z) \cos(3\omega t) - \right. \\ &\quad \left. - 7 \sin(k_0 z) \cos(3\omega t) + 7 \sin(3k_0 z) \cos(\omega t) \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Приравнявая к нулю коэффициент при первой гармонике, имеем

$$\omega_0^{(2)} = \frac{\alpha A^2 \omega_0}{64}. \quad (21)$$

Итак, собственная частота системы меняется на величину, пропорциональную квадрату амплитуды.

Вычислим теперь амплитуду вынужденных колебаний, оставляя в выражении (9) только главные члены в разложении по малым параметрам. При этом необходимо выражение для k_R взять в виде $k_R = (\Omega - \omega_0^{(2)}) / V_A$, где $\omega_0^{(2)}$ определяется формулой (21). Отсюда находим связь между амплитудой и частотой вынужденных нелинейных альфвеновских колебаний:

$$A^2 \left[(\delta\Omega - \omega_0^{(2)})^2 + \frac{\nu_m^2 \omega_0^4}{4V_A^4} \right] = \frac{V_0^2 \omega_0^2}{n^2 \pi^2 V_A^2}, \quad (22)$$

где $\delta\Omega$ обозначает малую разность $\Omega - \omega_0$. Таким образом, связь между амплитудой и частотой альфвеновских колебаний формально такая же, как для нелинейного осциллятора. Поэтому можно воспользоваться известными результатами.

При возрастании V_0 кривая $A(\Omega)$ деформируется так, что появляется точка, в которой $dA/d\Omega = \infty$, а затем зависимость $A(\Omega)$ становится трехзначной. Значение амплитуды вынуждающей силы V_0^* , при котором это происходит, определяется из условия совпадения двух точек, $dA/d\Omega = \infty$, ограничивающих область трехзначной зависимости $A(\Omega)$ (см., напр., [7]), что дает

$$(V_0^*)^2 = \frac{16 n^2 \pi^2 \nu_m^3 \omega_0^3}{|\alpha| V_A^4}. \quad (23)$$

Если при $V_0 > V_0^*$ частота вынуждающей силы медленно (по сравнению с периодом колебаний) изменяется, то в точках $dA/d\Omega = \infty$ происходит срыв амплитуды.

3. Условия применимости решения

Перейдем теперь к вопросу об условиях применимости полученного стационарного решения (22). Колебания системы можно считать стационарными только по прошествии характерного времени ее релаксации. В рассматриваемом случае малой диссипации время релаксации по порядку величины сравнимо с временем затухания собственных колебаний [8]:

$$\tau_{\text{diss}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{diss}}} = \frac{4\pi V_A^2}{\nu_m \omega_0^2}. \quad (24)$$

Из формулы (22) видно, что нелинейные эффекты в системе проявляются, если ω_{diss} сравнимо с $\omega_0^{(2)}$, т.е. $\tau_{\text{diss}} \sim 1/A^2$. Поскольку время развития неустойчивости альфвеновской волны относительно распада на две другие МГД-волны порядка $1/A$, то стационарные колебания возможны только в том случае, когда неустойчивость не возникает. Рассмотрим условия, которые для этого необходимы.

Прежде всего заметим, что такая неустойчивость не может быть стабилизирована за счет диссипации, так как критическая (для развития неустойчивости) амплитуда исходной волны, определяемая диссипацией, порядка ν_m . В то же время нелинейные эффекты сказываются при амплитуде порядка $\sqrt{\nu_m}$, которая много больше критической.

Вместе с тем в работе [6] показано, что в системе с дискретным спектром неустойчивость альфвеновской волны относительно распада на две МГД-волны может возникнуть только при специальном выборе V_s и V_A . Причина состоит в том, что, с одной стороны, величины V_s и V_A определенным образом связаны с волновыми векторами возмущений резонансными условиями:

$$\omega_1(\mathbf{k}_1) = \pm \frac{n\pi V_A}{L} + \omega_2(\mathbf{k}_2), \quad (25)$$

$$k_{z1} = \frac{n\pi}{L} + k_{z2}, \quad k_{\perp 1} = k_{\perp 2}, \quad (26)$$

где индексы "1" и "2" обозначают малые возмущения исходной волны. Здесь предполагается, что $k_{\perp}$ также имеет дискретный спектр. С другой стороны, исходная

волна неустойчива только в том случае, если отклонение ее частоты от резонансного значения мало: $\delta\Omega \lesssim A\omega_0$ [6]. Аналогичные рассуждения справедливы и для слияния исходной волны с малым возмущением, т.е. ее модуляции, приводящей к возбуждению комбинационной гармоник. Поэтому при произвольных V_s и V_A трехволновая неустойчивость не возникает.

Если в системе запрещены трехволновые процессы, то в ней, вообще говоря, возможна четырехволновая неустойчивость. Инкремент такой неустойчивости пропорционален амплитудам двух волн, участвующих в процессе взаимодействия (см., напр., [9]). Следовательно, для того чтобы колебания на частоте ω_0 можно было считать стационарными, должны быть подавлены только такие неустойчивые процессы, в которых участвуют обе бегущие волны, образующие исходную стоячую волну. Поскольку амплитуда возмущения много меньше амплитуды исходной волны, то для остальных видов неустойчивости время нарастания много больше $1/A^2 \sim \tau_{\text{diss}}$, так что в рассматриваемом приближении они не нарушают стационарности колебаний.

При учете четырехволновых процессов условия устойчивости исходных бегущих волн становятся более слабыми, так как во втором порядке по амплитуде возможен процесс рассеяния альфвеновских волн. Поскольку это означает, что все возмущения имеют одинаковый закон дисперсии, то резонансные соотношения, аналогичные (25) и (26), не дают дополнительных ограничений на параметры возмущения. В этом случае единственное условие возникновения неустойчивости состоит в том, что квадрат поправки к частотам ω_1 и ω_2 отрицателен.

Как указывалось в работе [6], неустойчивость, связанная с рассеянием альфвеновской волны, возникает, если $k_{\perp}$ меньше некоторого критического значения. Поэтому для стабилизации такой неустойчивости в идеальной среде система должна иметь достаточно малый размер в направлении поперек магнитного поля.

Если же это условие не выполнено, то неустойчивость может быть стабилизирована за счет диссипации, поскольку критическая амплитуда порядка $\sqrt{\nu_m}$. Однако для того чтобы зависимость $A(\Omega)$ имела точки срыва, необходимо, чтобы максимальная амплитуда вынужденных колебаний была больше величины

$$A_{\text{max}}^* = \frac{8}{V_A} \sqrt{\frac{\nu_m \omega_0}{|\alpha|}}, \quad (27)$$

также пропорциональной $\sqrt{\nu_m}$ и представляющей собой максимальную амплитуду при $V_0 = V_0^*$. Это приводит к дополнительному условию на параметры системы (неограниченной в поперечном направлении), которое должно быть выполнено для малых $k_{\perp}$.

Из результатов работы [6] следует, что при рассеянии альфвеновской волны критическая амплитуда не равна нулю, если $V_s = V_A$. В то же время из формул (18) и (27) видно, что A_{max}^* формально обращается в нуль. Исходя из этого, можно показать, что существу-

ет область значений $V_s \sim V_A$, в которой, во-первых, амплитуда колебаний меньше критической для любого $k_{\perp}$, так что неустойчивость подавлена, а во-вторых, амплитуда больше A_{max}^* , так что зависимость $A(\Omega)$ имеет точки срыва.

4. Заключение

Таким образом, в системе с дискретным спектром зависимость амплитуды стационарных альфвеновских колебаний от частоты вынуждающей силы имеет точки срыва. Если частота меняется с характерным временем, много большим времени релаксации системы (но много меньшим обратного инкремента неустойчивости альфвеновской волны), то в системе происходит относительно быстрое изменение амплитуды колебаний. В зависимости от направления изменения частоты амплитуда уменьшается или увеличивается. В первом случае происходит нагрев среды, причем выделившаяся энергия сравнима с исходной энергией колебаний. Во втором случае поток энергии внутрь резонатора возрастает. Если амплитуда превысит критическое значение, то срыв амплитуды будет служить триггером для возникновения неустойчивости, ранее подавленной диссипацией. Эти эффекты могут быть использованы для объяснения динамики плазмы в МГД-резонаторах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93-02-17024).

Литература

1. Priest E.R. Solar magnetohydrodynamics. Dordrecht, 1982.
2. Hollweg J.V. // Astrophys. J. 1984. 277, N 1. P. 392.
3. Trakhtengertz V.Yu., Feldstein A.Yu. // Planet. Space Sci. 1984. 32, N 2. P. 127.
4. Tikhonchuk V.T., Rankin R., Frycz P., Samson J.C. // Phys. Plasmas. 1995. 2, N 2. P. 501.
5. Галеев А.А., Ораевский В.Н. // ДАН 1962. 147, № 1. С. 71.
6. Elfmov A.G., Nekrasov F.M. // Nucl. Fusion. 1972. 12, N 3. P. 201.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М., 1965.
8. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1963.
9. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М., 1988.

Поступила в редакцию
21.02.96

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12:531.51

ФИНСЛЕРОВЫ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЖДУ ДВИЖУЩИМИСЯ СИСТЕМАМИ ОТСЧЕТА

Г.С.Асанов

(кафедра теоретической физики)

Финслеров кинематический подход [1-9] применяется к случаю, когда рассматриваются преобразования между двумя движущимися системами отсчета. Вычислен явный вид соответствующих коэффициентов преобразования.

1. Введение

В предыдущих статьях [1-9] было построено финслерово обобщение специальной теории относительности на основе нескольких простейших предположений. Полученные финслеровы соотношения могут применяться в двух основных направлениях. Во-первых, для теоретического пересмотра и обобщения законов и уравнений лоренц-инвариантной теории фундаментальных физических полей. В частности, можно (и следует) вернуться к идее введения искривленного импульсного простран-

ства (см. ссылки в [3]) и развить ее, используя конкретную финслерову метрическую функцию F , полученную в [1,2,6,9]. Во-вторых, естественно использовать финслеровы соотношения и поправки как основу для проведения расчетов различных возможных нарушений лоренц-инвариантности в современных физических экспериментах (см., напр., [4]). При этом цель может быть двоякой: дать строгую геометрическую основу для таких нарушений и получить оценки на характерный финслеров параметр g .

В предыдущей работе [8] вычисление поправок для