

друга вследствие эрмитовости полного оператора плотности. В принципе, возможно получение и эрмитовых амплитуд спектрального разложения путем симметризации исходных операторов на ранних стадиях расчета. Например, в выражении (2) $P_{m_3}(I_{3z})I_{1y}$ следует заменить на $[P_{m_3}(I_{3z})I_{1y} + I_{1y}P_{m_3}(I_{3z})]/2$. Однако в этом нет особой необходимости, и достаточно воспользоваться сформулированным выше правилом.

Литература

1. Eich G.W., Bodenhausen G., Ernst R. // J.Am.Chem.Soc. 1982. 104. P.3731.
2. Bolton P.H., Bodenhausen G. // Chem. Phys. Lett. 1982. 89. P.139.
3. Эрнст Р., Боденгаузен Дж., Вокаун А. ЯМР в одном и двух измерениях. М., 1990.

4. Дероум Э. Современные методы ЯМР для химических исследований. М., 1992.
5. Туманов В.С. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1993. №5. С.21 (Moscow University Phys. Bull. 1993. N5. P.18).
6. Туманов В.С. // Там же. 1993. №6. С.3 (Ibid. 1993. N6. P.1).
7. Туманов В.С. // Там же. 1996. №4. С.7 (Ibid. 1996. N4).
8. Туманов В.С. Введение в теорию спектров ЯМР. М., 1988.

Поступила в редакцию
08.04.96

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

ОСЦИЛЛЯЦИИ НЕЙТРИНО В ЗАМАГНИЧЕННОЙ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЕ С УЧЕТОМ РЕАЛИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

А.М.Егоров, Г.Г.Лихачев, А.И.Студеникин

(кафедра теоретической физики, кафедра квантовой статистики и теории поля)

С учетом изменения плотности вещества нейтронной звезды, описывающегося реалистическим уравнением состояния, детально рассмотрен "пограничный эффект", в основе которого лежат осцилляции нейтрино в магнитном поле — переход под действием магнитного поля половины активных нейтрино в стерильные при выходе нейтрино за пределы нейтронной звезды. На основе проведенных численных расчетов сделан вывод, что осцилляции нейтрино могут становиться существенными в областях вблизи границы нейтронной звезды и до расстояний порядка 600 радиусов звезды.

Известно, что при наличии у нейтрино ненулевого магнитного или переходного момента возможно возникновение нейтринных осцилляций, вызванных взаимодействием нейтрино с магнитным полем, интенсивность которого характеризуется величиной $\tilde{\mu}B_{\perp}$ (где $\tilde{\mu}$ — магнитный (переходный) момент нейтрино, B_{\perp} — проекция вектора напряженности магнитного поля на плоскость, перпендикулярную импульсу нейтрино). Такие осцилляции могут служить основой для решения проблемы солнечных нейтрино [1,2]. Проведенные исследования (см., напр., [3] и цитированную там литературу) показывают, что в солнечных полях с напряженностью $B \sim 10^5$ Гс нейтринные осцилляции могут становиться существенными даже с учетом современных эксперимен-

тальных ограничений на верхнюю границу величины магнитного момента нейтрино [4] (которые колеблются от $5 \cdot 10^{-13} \mu_B$ до $7 \cdot 10^{-10} \mu_B$).

Интерес к исследованиям нейтринных осцилляций в магнитном поле связан также и с ролью, которую играют нейтрино при взрыве сверхновых и при остывании нейтронных звезд, где, по современным оценкам, напряженность магнитного поля на поверхности нейтронной звезды может достигать громадных величин: $B \sim 10^{12} - 10^{14}$ Гс [5-7], а во внутренних областях — еще больших, вплоть до $B \sim 10^{16}$ Гс (см., напр., [8]).

Вопрос о нейтринных осцилляциях в условиях нейтронных звезд неоднократно рассматривался в литературе (см., напр., [3, 9-22]).

В работах [9–13] были, в частности, детально проанализированы осцилляции дираковских и майорановских нейтрино в веществе нейтронной звезды под действием сильных магнитных полей. Была рассмотрена характерная ситуация, при которой эффективно происходят переходы одних типов нейтрино в другие под действием сильного магнитного поля; нами была предсказана возможность перехода половины активных нейтрино в стерильные при пересечении потоком нейтрино границы нейтронной звезды ("пограничный эффект" [9–13]). Из проведенного анализа следует, что величина и само существование "пограничного эффекта" определяются видом зависимости плотности вещества от расстояния до центра звезды. Это связано с тем, что, как было показано нами [9], нейтринные осцилляции могут становиться существенными, если напряженность магнитного поля превосходит критическое значение $\tilde{B}_{cr}(\Delta m_\nu^2, \theta, n_{eff}, E_\nu)$:

$$\tilde{B}_{cr} = \left| \frac{1}{2\tilde{\mu}} \left(\frac{\Delta m_\nu^2 A^*}{2E_\nu} - \sqrt{2} G_F n_{eff} \right) \right| \quad (1)$$

(где $\Delta m_\nu^2 = m_2^2 - m_1^2 > 0$, m_1 и m_2 — массы нейтринных состояний ν_1 и ν_2 , θ — вакуумный угол смешивания, n_{eff} — эффективная концентрация вещества, $\tilde{\mu}$ — магнитный (переходный) момент нейтрино, E_ν — энергия нейтрино, $A^* = \cos 2\theta$, G_F — постоянная Ферми).

При выводе формулы (1) мы пренебрегали эффектами, связанными с возможным вращением вектора напряженности магнитного поля в плоскости, перпендикулярной движению нейтрино, $\dot{\phi} \equiv d\phi/dt = 0$. Вероятность изменения типа нейтрино при этом определяется формулой

$$P(\nu_i \rightarrow \nu_j) = \sin^2 2\theta_{eff} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L_{eff}} \right), \quad i \neq j, \quad (2)$$

$$L_{eff} = \frac{\pi}{\tilde{\mu}(B_{cr}^2 + B^2)^{1/2}}, \quad \text{tg} 2\theta_{eff} = \frac{B}{B_{cr}}. \quad (3)$$

При проведении качественных оценок величины "пограничного эффекта" в [9,13] мы фактически считали, что плотность вещества на коротком расстоянии $\Delta r \sim 10 \text{ см} \ll r_0$, где r_0 — радиус нейтронной звезды, очень резко, т.е. практически скачкообразно, падает до вакуумного значения.

Ниже мы детально исследуем "пограничный эффект", используя для описания изменения с расстоянием плотности вещества нейтронной звезды реалистическое уравнение его состояния [5,11]. Это позволило дополнить качественное рассмотрение "пограничного эффекта" количественным расчетом, в котором учитывается более сложная зависимость плотности вещества от расстояния до центра звезды. Отметим, что все рассуждения проводятся в рамках адиабатического приближения, применимость которого для данного случая следует из подробного анализа в статье [9].

Реализованный в настоящей работе подход позволил также поставить и решить с учетом изменяющейся плотности вопрос о величине нейтринных осцилляций, происходящих под действием магнитного поля, во внутренних слоях нейтронной звезды.

Для определения величины критического поля внутри нейтронной звезды в соответствии с формулой (1) необходимо знать зависимость эффективной концентрации вещества n_{eff} от расстояния до центра нейтронной звезды. Невращающаяся звезда, состоящая из холодной материи, описывается уравнением Толмена—Оппенгеймера—Волкова [5]

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G(\rho + P)(m(r) + 4\pi r^3 P)}{r^2(1 - 2Gm(r)/r)}, \quad (4)$$

$$m(r) = \int_0^r \rho(r') d^3 r', \quad (5)$$

где $P(r)$ — давление, $m(r)$ — масса звезды, r — расстояние от центра звезды, G — гравитационная постоянная.

Перепишывая уравнение (5) в дифференциальной форме

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(P), \quad (6)$$

получим систему дифференциальных уравнений (4),(6), которую затем решаем численно методом разностных схем.

Для этого нужно дополнить уравнения (4), (6) начальными условиями: значениями m_0, P_0 для некоторого фиксированного r_0 и задать зависимость плотности от давления $\rho(P)$, определяемой уравнением состояния $P = P(\rho)$.

Рассмотрим внешнюю кору нейтронной звезды. Этой области соответствуют значения плотности $10^6 \text{ г/см}^3 \leq \rho \leq 4,3 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$. В качестве модели вещества выбирается кулоновская решетка тяжелых ядер, сосуществующая в бета-равновесии с релятивистским вырожденным электронным газом (подробнее см. [5]). При таких условиях в качестве уравнения состояния следует использовать уравнение Бейма—Петика—Сазерленда [5,23]. Оно может быть сведено к системе уравнений

$$\begin{cases} P = P_e + P_L, \\ \rho = \varepsilon = n_e M(A, Z) \frac{1}{Z} + \varepsilon_e + \varepsilon_L. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь ε — плотность энергии, n_e — концентрация электронов, $M(A, Z)$ — энергия ядра с атомным номером A и зарядом Z , ε_e — энергия электронов без учета энергии кулоновского взаимодействия, ε_L — энергия кулоновского взаимодействия между электронами и ядрами, P_e — давление электронов, $P_L = \frac{1}{3}\varepsilon_L$ — поправка к давлению, возникающая за счет кулоновского взаимодействия между электронами и ядрами.

Величины $n_e, \varepsilon_L, P_e, \varepsilon_e$ могут быть представлены как функции параметра $X_e = p_F^e/m$ (p_F^e — импульс Ферми для электрона) [5]:

$$n_e = \frac{1}{3\pi^2 \lambda_e^3} X_e^3 \quad (8)$$

($\lambda_e = 1/m_e$ — комптоновская длина волны электрона),

$$\varepsilon_L = -1,444 Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3}, \quad (9)$$

$$P_e = \frac{m_e}{\lambda_e^3} \Phi(X_e), \quad (10)$$

$$\varepsilon_e = \frac{m_n}{\lambda_e^3} \chi(X_e), \quad (11)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \{x(1+x^2)^{1/2} (2\frac{x^2}{3} - 1) - \ln[x + (1+x^2)^{1/2}]\},$$

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \{x(1+x^2)^{1/2} (1+2x^2) - \ln[x + (1+x^2)^{1/2}]\}.$$

Необходимая для решения системы уравнений (4), (6) зависимость $\rho = \rho(P)$ была получена численно. Сначала, используя уравнения (7)–(11), определялось значение X_e (при этом применялся метод вилки [24]). Затем определялась величина $\rho = \rho(X_e)$. Используя тот факт, что $P = P(r)$ является функцией расстояния, одновременно с зависимостью $\rho(P)$ мы получаем и зависимость плотности $\rho = \rho(r)$ от расстояния r . С помощью уравнения (8) аналогично была получена зависимость $n_{\text{eff}}(r)$.

Далее для определенности рассмотрим осцилляции майорановских нейтрино ($\nu_{eL} \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu$), тогда для эффективной концентрации вещества имеем

$$n_{\text{eff}} = n_e - \left(\frac{A}{Z} - 1\right) n_e. \quad (12)$$

По формулам (4), (6), (7) — (12) нами были проведены численные расчеты на персональном компьютере и найдена зависимость $n_{\text{eff}} = n_{\text{eff}}(r)$, что позволило по формуле (1) определить значение критического поля $B_{\text{cr}}(r)$ для различных расстояний до центра звезды r . При этом для численных оценок использовалась величина магнитного момента нейтрино $\tilde{\mu} = 10^{-10} \mu_B$, также считалось, что $\Delta m_\nu^2 = 10^{-4} \text{ эВ}^2$, $\sin 2\theta = 0,1$ (см. [25]), энергия нейтрино $E_\nu = 20 \text{ МэВ}$, а величина A^* в случае перехода между состояниями майорановских нейтрино ($\nu_{eL} \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu$) равна $\cos 2\theta$.

Для решения системы дифференциальных уравнений (4), (6) использовалась разностная схема Рунге–Кутты [24]. При этом для модели, основанной на жестком уравнении состояния вещества для ядра нейтронной звезды [5] (модель трехнуклонного взаимодействия, приближение тензорного взаимодействия), в качестве начальных данных были использованы значения r_0 , m_0 и $P_0 = P_0(\rho_0)$ на внешней границе внутренней коры звезды.

Представляет интерес провести сравнение вычисленного значения критического поля B_{cr} и реального магнитного поля B при различных значениях r . Зависимость поля нейтронной звезды от расстояния r на достаточном удалении от поверхности звезды ($r \gg 10 \text{ км}$) может быть аппроксимирована формулой

$$B(r) = B_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3. \quad (13)$$

Для внутренних областей звезды, при условии вмонженности поля в вещество, можно считать, что поле будет меняться с изменением плотности по закону $B \sim \rho^{2/3}$.

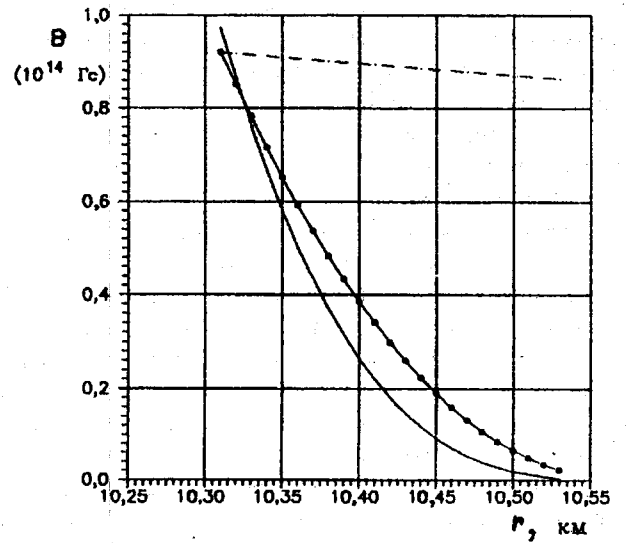


Рис.1

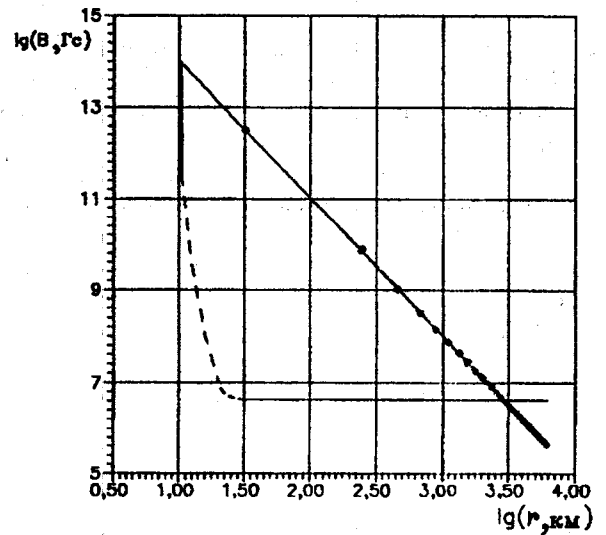


Рис.2

Используя эти предположения относительно поведения магнитного поля, можно построить (рис. 1) зависимость критического поля $B_{\text{cr}}(r)$ (сплошная линия) и магнитного поля звезды $B(r)$ (сплошная линия с точками) от расстояния r для области вблизи поверхности нейтронной звезды ($r \sim r_0$). Предполагается, что на внутренней границе внешней коры нейтронной звезды поле принимает значение $B(r \approx r_0 = 10 \text{ км}) \approx 10^{14} \text{ Гс}$. Линия с точками соответствует случаю, когда $B \sim \rho^{2/3}$. Штриховая линия описывает характер поведения поля $B(r) \sim 1/r^3$.

На рис. 2 линией без точек показана зависимость критического поля $B_{\text{cr}}(r)$ от расстояния для удаленных областей ($r \geq r_0$), а линией с точками — аналогичная зависимость магнитного поля $B(r) \sim 1/r^3$. Для больших расстояний ($r \gg r_0$) $B_{\text{cr}}(r)$ совпадает с соответствующим вакуумным значением

$$B_{\text{cr}} \approx \frac{\Delta m_\nu^2 A^*}{4\tilde{\mu} E}. \quad (14)$$

Для иллюстрации характера рассматриваемых осцилляций нейтрино в пучке на рис.3 показана усредненная по расстоянию от точки появления нейтрино вероятность $P_{av} \equiv \bar{P}(\nu_{eL} \rightarrow \bar{\nu}_{\mu R})$, характеризующая общее число нейтрино $\bar{\nu}_{\mu R}$ в пучке, исходно состоящем из нейтрино ν_{eL} , в зависимости от расстояния r до центра звезды.

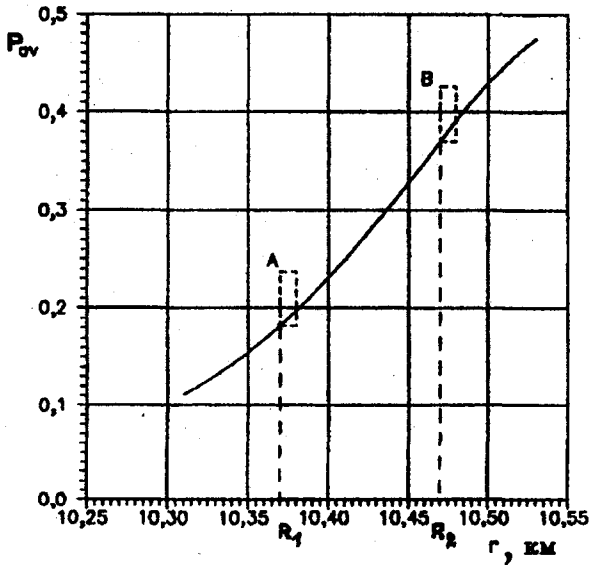


Рис.3

в вещество, при приближении к центру звезды, в более глубоких слоях (внутренняя кора, ядро) значение вероятности перехода $P_{\nu_i \rightarrow \nu_j} \ll 1$. Эта тенденция отражена и на рис. 3. Поэтому особый интерес при исследовании осцилляций нейтрино в веществе, обусловленных наличием магнитного поля, представляет рассмотренная нами область нейтронной звезды (внешняя кора).

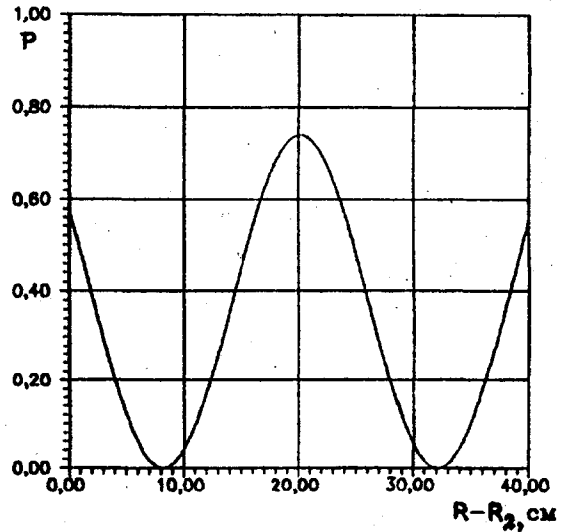


Рис.5

Таким образом, проведенное сравнение величин возможных реального и критического значений напряженности магнитных полей позволило сделать вывод, что осцилляции нейтрино могут становиться существенными в областях, прилежащих к границе нейтронных звезд, до расстояний порядка $600 r_0$. При этом у поверхности нейтронной звезды может иметь место "пограничный эффект" [9] (переход половины активных нейтрино в стерильные). Отметим, что в указанной области многократные переходы нейтрино из одного состояния в другое под действием сильного магнитного поля становятся возможными вдали от точки резонансного увеличения вероятности перехода (см.[9]).

Работа выполнена при поддержке Межрегионального центра фундаментальных исследований.

Литература

1. Cisneros R.// Astrophys. Space Sci. 1971. 10. P. 87.
2. Волошин М.Б., Высоцкий М.И., Окунь Л.Б.// ЖЭТФ. 1986. 91. С. 754.
3. Akhmedov E., Petcov S., Smirnov A.// Phys. Rev.1993. D48. P. 216.
4. Smirnov A.Yu.// Nucl. Phys. 1993. B31. P. 17.
5. Шапиро С.Л., Тьюкольски С.А. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. М., 1982.
6. Липунов В.М. Астрофизика нейтронных звезд. М., 1987.
7. Landstreet J.// Phys. Rev. 1967. 153. P. 1372.
8. Ruderman R.// Neutron Stars: Theory and Observation. Dordrecht, 1991.

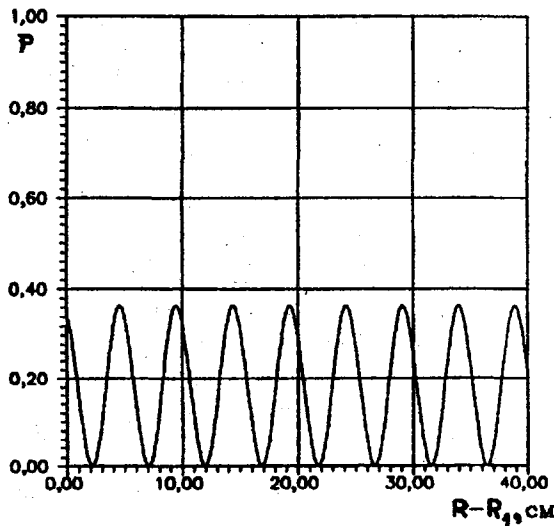


Рис.4

Для отдельных нейтрино, первоначально являющихся ν_{eL} , вероятность $P = P(\nu_{eL} \rightarrow \bar{\nu}_{\mu R})$, определяющая осцилляции нейтрино с расстоянием r , осциллирует около среднего значения $\bar{P}(\nu_{eL} \rightarrow \bar{\nu}_{\mu R})$ с амплитудой, которая зависит от соотношения $B(r)/B_{cr}(r)$. На рис. 4 и 5 показаны в более крупном масштабе осцилляции вероятности для двух характерных областей А и В (см. рис.3).

Исследование осцилляций нейтрино в глубине нейтронной звезды показывает, что вследствие более быстрого возрастания критического магнитного поля по сравнению с реальным магнитным полем, замороженным

9. Лизачев Г.Г., Студеникин А.И.// ЖЭТФ. 1995. 108. С. 769.
10. Likhachev G.G., Studenikin A.I.// Hadronic Journ. 1995. 18. P.1.
11. Egorov A.M., Likhachev G.G., Studenikin A.I.//Proc. of conf. "Recontres de Physique de la Valee d'Aoste" //Ed. M. Greco. Frascaty, Italy, 1995. P. 55.
12. Likhachev G.G., Studenikin A.I.// Grav.& Cosm. 1995. 22. P. 1.
13. Likhachev G.G., Studenikin A.I.// Phenomenology of Unification from Present to Future / Ed. G.Diambrini-Palazzi, L.Zanello, G.Martinelli. Singapore, 1994. P. 67; Likhachev G.G., Studenikin A.I. Prepr.ICTP. IC/94/170. Trieste, Italy.
14. Friedman B., Pandharipande V.// Nucl. Phys. 1981. A361. P. 502.
15. Волошин М.Б.// Письма в ЖЭТФ. 1988. 47. С. 421.
16. Lim C.-S., Marciano W.// Phys.Rev. 1988. D37. P. 1368.
17. Shi X., Sigl G.// Phys. Lett. 1994. B323. P. 360.
18. Fuller G., Mayle R., Meyer B., Wilson J.// Astrophis. J. 1992. 389. P. 517.
19. Smirnov A., Spergel D., Bahcall J.// Phys. Rev. 1988. D49. P. 1389.
20. Raffelt G., Sigl G.// Astropart. Phys. 1993. 1. P. 165.
21. Peltoniemi J.// Astron. Astrophys. 1994. 254. P. 121.
22. Kusenko A., Segre G. Prepr. UPR-705-T, Pensilvania, USA, 1996.
23. Baym J., Pethick C., Sutherland P.// Astrophys.J. 1971. 170. P. 299.
24. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., 1978.
25. Pal B.P.// Int. J.Mod.Phys. 1992. A7. P. 5387.

Поступила в редакцию
10.06.96

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫХ ПОТЕРЬ ОТКРЫТЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

А.А.Усанкин

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

Разработан численный алгоритм расчета излучательных потерь и собственных частот открытых диэлектрических резонаторов, имеющих форму тела вращения с произвольной образующей. Показано, что данный алгоритм применим для изучения мод типа "шепчущей галереи" при высоких значениях азимутального индекса.

Введение

В настоящее время для решения ряда задач необходимо знать предельно достижимую излучательную добротность и зависимость потерь от формы и размеров открытых диэлектрических резонаторов (ОДР) или системы резонаторов СВЧ или оптического диапазона [1,2].

Особый интерес представляет теоретическое исследование мод типа "шепчущей галереи" (ШГ). Для ШГ-мод характерна концентрация поля в малой тороидальной области вблизи поверхности резонатора и их высокая добротность (экспериментально достигнуты значения добротности $Q \geq 10^{11}$ для сапфировых резонаторов в СВЧ-диапазоне и $Q \geq 10^9$ для оптических квар-

цевых микрорезонаторов). Это позволяет использовать ОДР в установках для исследования квантовых эффектов, а также в высокочувствительных датчиках перемещения. Используемые в таких исследованиях ОДР должны иметь как можно большую добротность. Теоретические оценки показывают, что при уменьшении размеров резонаторов (а это диктуется требованиями ряда экспериментов) существенный вклад в потери ОДР оказывает их излучение. Поэтому практически важен точный расчет зависимости излучательных потерь и резонансных частот от формы и размеров ОДР, особенно для ШГ-мод.

Напомним, что электромагнитные колебания в ОДР возможны только при дискретных значениях собственной комплексной частоты, зависящих от формы ОДР.