9. *Лихачев Г.Г., Студеникин А.И.*// ЖЭТФ. 1995. **108**. С. 769.
10. *Likhachev G.G., Studenikin A.I.*// Hadronic Journ. 1995. **18**. P.1.
11. *Egorov A.M., Likhachev G.G., Studenikin A.I.*//Proc. of conf. "Recontres de Physique de la Valee d'Aoste" //Ed. M. Greco. Frascaty, Italy, 1995. P. 55.
12. *Likhachev G.G., Studenikin A.I.*// Grav.& Cosm. 1995. **22**. P. 1.
13. *Likhachev G.G., Studenikin A.I.*// Phenomenology of Unification from Present to Future / Ed. G.Diambrini-Palazzi, L.Zanello, G.Martinelli. Singapore, 1994. P. 67; *Likhachev G.G., Studenikin A.I.* Prepr.ICTP. IC/94/170. Trieste, Italy.
14. *Friedman B., Pandharipande V.*// Nucl. Phys. 1981. **A361**. P. 502.
15. *Волошин М.Б.*// Письма в ЖЭТФ. 1988. **47**. С. 421.
16. *Lim C.-S., Marciano W.*// Phys.Rev. 1988. **D37**. P. 1368.
17. *Shi X., Sigl G.*// Phys. Lett. 1994. **B323**. P. 360.
18. *Fuller G., Mayle R., Meyer B., Wilson J.*// Astrophis. J. 1992. **389**. P. 517.
19. *Smirnov A., Spergel D., Bahcall J.*// Phys. Rev. 1988. **D49**. P. 1389.
20. *Raffelt G., Sigl G.*// Astropart. Phys. 1993. **1**. P. 165.
21. *Peltoniemi J.*// Astron. Astrophys. 1994. **254**. P. 121.
22. *Kusenko A., Segre G.* Prepr. UPR-705-T, Pensilvania, USA, 1996.
23. *Baym J., Pethick C., Sutherland P.*// Astrophys.J. 1971. **170**. P. 299.
24. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М., 1978.
25. *Pal B.P.*// Int. J.Mod.Phys. 1992. **A7**. P. 5387.

Поступила в редакцию
10.06.96

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

# РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫХ ПОТЕРЬ ОТКРЫТЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

**А.А.Усанкин**

*(кафедра молекулярной физики и физических измерений)*

**Разработан численный алгоритм расчета излучательных потерь и собственных частот открытых диэлектрических резонаторов, имеющих форму тела вращения с произвольной образующей. Показано, что данный алгоритм применим для изучения мод типа "шепчущей галереи" при высоких значениях азимутального индекса.**

## Введение

В настоящее время для решения ряда задач необходимо знать предельно достижимую излучательную добротность и зависимость потерь от формы и размеров открытых диэлектрических резонаторов (ОДР) или системы резонаторов СВЧ или оптического диапазона [1,2].

Особый интерес представляет теоретическое исследование мод типа "шепчущей галереи" (ШГ). Для ШГ-мод характерна концентрация поля в малой тороидальной области вблизи поверхности резонатора и их высокая добротность (экспериментально достигнуты значения добротности $Q \geq 10^{11}$ для сапфировых резонаторов в СВЧ-диапазоне и $Q \geq 10^9$ для оптических кварцевых микрорезонаторов). Это позволяет использовать ОДР в установках для исследования квантовых эффектов, а также в высокочувствительных датчиках перемещения. Используемые в таких исследованиях ОДР должны иметь как можно большую добротность. Теоретические оценки показывают, что при уменьшении размеров резонаторов (а это диктуется требованиями ряда экспериментов) существенный вклад в потери ОДР оказывает их излучение. Поэтому практически важен точный расчет зависимости излучательных потерь и резонансных частот от формы и размеров ОДР, особенно для ШГ-мод.

Напомним, что электромагнитные колебания в ОДР возможны только при дискретных значениях собственной комплексной частоты, зависящих от формы ОДР.

Каждой моде соответствуют три индекса: $m$ — азимутальный (количество длин волн, укладывающихся вдоль "экватора" резонатора); $n$ - радиальный (количество колебаний вдоль радиуса); $l$ — меридиональный ($(m-l+1)$ — количество колебаний вдоль образующей резонатора). ШГ-модам соответствуют колебания с $m-l=0;1$ при $n=1;2$. Нахождение собственных частот, распределения полей и излучательных потерь ОДР является в общем случае нетривиальной задачей. Решение этой задачи аналитическими методами математической физики возможно только для резонаторов, поверхность которых является эллипсоидом вращения (бесконечный цилиндр, шар) [3,4]. В остальных случаях возможно приближенное численное решение.

Различные способы численного решения указанной задачи были предложены авторами работ [5-9]. Так, например, в работе [5] применен метод аппроксимации второго порядка. Данный метод применим только для дисковых резонаторов и при выполнении условий $\varepsilon \gg 1$ и $E_n = E_z \approx 0$ (поле на торцевой стенке резонатора). В работе [6] авторами был предложен метод неполной магнитной стенки. В случае основной моды ($m=0, n=1$) для резонансной частоты получено соответствие с экспериментом лучше 1%. Такое же соответствие с экспериментом было получено в работе [7]. Здесь метод магнитной стенки использовался вместе с вариационным. Указанные методы применимы только для мод с низким радиальным индексом ($n=0;1;2$), причем отношение высоты к диаметру должно быть порядка единицы и больше. Кроме того, в работах [5-7] не указывается способ расчета излучательных потерь, и методики [5-7] нельзя использовать для расчета ШГ-мод высоких азимутальных порядков ($m>10$).

В работах [8,9] предложен метод расчета собственных частот и излучательных потерь в диэлектрических резонаторах формы тела вращения. Способ расчета основан на численном решении задачи о колебаниях в ОДР методом интегральных уравнений (методом моментов). Авторами [9] решена задача применительно к дисковым резонаторам для ряда мод низкого азимутального порядка ($m=1,\dots,5$). Различие рассчитанных и экспериментальных значений добротности и частоты составляет величину порядка 1% для различных мод, в том числе и для ШГ-мод.

Вопрос об излучательных потерях ШГ-мод высоких порядков ($m>10$) в ОДР формы тела вращения с образующей произвольной формы, насколько нам известно, до сих пор не исследовался. В настоящей работе предпринята такая попытка. Для нахождения собственных частот и излучательных потерь был использован метод моментов (ММ) [8-10]; была определена область применимости ММ. Для этого методом моментов решалась задача о свободных колебаниях в сферическом резонаторе, для которой уже существует точное решение [3]. Было выяснено, что с помощью ММ можно находить собственные частоты для ШГ-мод вплоть до 30-40-го порядка с точностью до 0,1 % и распределения полей с точностью до 1%. Однако для вычисления излучательных потерь мод высокого азимутального порядка ($m>10$) ММ неприменим. Это связано с тем, что при $m>10$ ШГ-моды имеют очень большую излучательную добротность ($Q=\omega''/(2\omega') \gg 10^3$, $\omega=\omega'+i\omega''$) и малые комплексные добавки к частоте незначительно влияют на величину определителя матрицы импедансов в ММ. Метод моментов позволяет вычислить излучательные потери с погрешностью менее 10% лишь для мод, добротность которых не превышает $10^3$. Для мод, обладающих большей добротностью, вычисление излучательных потерь в ММ требует разбиения образующей на большее число частей, что ведет к увеличению времени вычислений. Уже для числа разбиений образующей в ММ $N=30$ время вычислений на машине DX4-100 достигает нескольких часов. В настоящей работе предложен способ расчета излучательных потерь для ШГ-мод высоких порядков с погрешностью менее 20% . Излучательные потери вычислялись в два этапа. Сначала с помощью ММ находились резонансная частота и распределение полей на границе резонатора, затем на этой основе находилось пространственное распределение электромагнитного поля, которое позволяет найти поток энергии, уносимый из резонатора, и рассчитать излучательную добротность. Путем сравнения с точным решением для шарового ОДР была проверена применимость ММ для расчета собственных частот (с погрешностью до 0,1% ), полей (1% ) и излучательных потерь (20% ). Таких же значений погрешности в определении этих величин можно ожидать и для резонаторов более сложной формы. ММ был применен для исследования излучательных потерь в дисковых ОДР. Получена зависимость излучательных потерь дискового ОДР от его высоты для ШГ-моды с $m=15$.

## Постановка задачи. Метод моментов

Можно показать [11], что электромагнитное поле в ОДР удовлетворяет следующим интегральным уравнениям:

$$\mathbf{n}\times\int_S\Big\{i\omega\mu\mathbf{J}_s(\varphi_1+\varphi_2)+\mathbf{K}_s\times\nabla'\cdot(\varphi_1+\varphi_2)- -\frac{i}{\omega\varepsilon_1}\mathrm{Div}\mathbf{J}_s\nabla'\cdot\left(\varphi_1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\varphi_2\right)\Big\}ds'=0, \tag{1}$$

$$\mathbf{n}\times\int\limits_S\Big\{i\omega\varepsilon_1\mathbf{K}_s\left(\varphi_1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\varphi_2\right)- -\mathbf{J}_s\times\nabla'\cdot(\varphi_1+\varphi_2)-\frac{i}{\omega\mu}\mathrm{Div}\mathbf{K}_s\nabla'\cdot(\varphi_1+\varphi_2)\Big\}ds'=0. \tag{2}$$

Интегрирование ведется по координатам поверхности резонатора $\mathbf{x}'$. Индекс "1" соответствует значениям электродинамических величин вне резонатора, индекс "2" — внутри него; $\varphi_i=\exp\{-ik_i|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\}/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$,

Таблица 1

| $m$ | $(k'r_0)_{ex}$ | $Q_{ex}$ | $N$ | $(k'r_0)_{MM}$ | $Q_{MM}$ | $\delta_\omega$ | $\delta_Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3,007 | 5,07 | 10 | 3,07 | 6,18 | 0,02 | 0,18 |
| | | | 20 | 3,03 | 5,26 | 0,01 | 0,04 |
| | | | 30 | 3,00 | 5,09 | 0,002 | 0,004 |
| 10 | 7,246 | $8{,}38\cdot10^2$ | 10 | 7,30 | $9{,}2\cdot10^2$ | 0,007 | 0,09 |
| | | | 20 | 7,28 | $8{,}47\cdot10^2$ | 0,005 | 0,01 |
| | | | 30 | 7,25 | $8{,}34\cdot10^2$ | 0,001 | 0,005 |
| 20 | 12,772 | $1{,}98\cdot10^6$ | 10 | 12,75 | $3\cdot10^3$ | 0,002 | 400 |
| | | | 20 | 12,76 | $1\cdot10^3$ | 0,001 | 200 |
| | | | 30 | 12,77 | $5\cdot10^4$ | 0,0002 | 40 |
| 30 | 18,164 | $6{,}67\cdot10^9$ | 10 | 18,12 | $2\cdot10^5$ | 0,002 | 17500 |
| | | | 20 | 18,14 | $3\cdot10^4$ | 0,001 | 8750 |
| | | | 30 | 18,15 | $1\cdot10^5$ | 0,0008 | 7000 |

$k_i = \omega\sqrt{\varepsilon_i\mu}$; $\mathbf{J_s} = \mathbf{n}\times\mathbf{H}$, $\mathbf{K_s} = -\mathbf{n}\times\mathbf{E}$; $\mathbf{n}$ - вектор нормали к поверхности резонатора; Div - оператор поверхностной дивергенции, $\mathrm{Div}\mathbf{J} = \frac{\partial(\rho J_t)}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial J_\varphi}{\partial\varphi}$. Систему (1)-(2) можно однозначно разрешить относительно $\mathbf{J_s}$, $\mathbf{K_s}$ и $\omega$.

Решать задачу удобнее всего в цилиндрических координатах. Для каждой моды $m$ поля $\mathbf{J_s}$, $\mathbf{K_s}$ представимы в виде разложения вдоль образующей резонатора (рис.1):

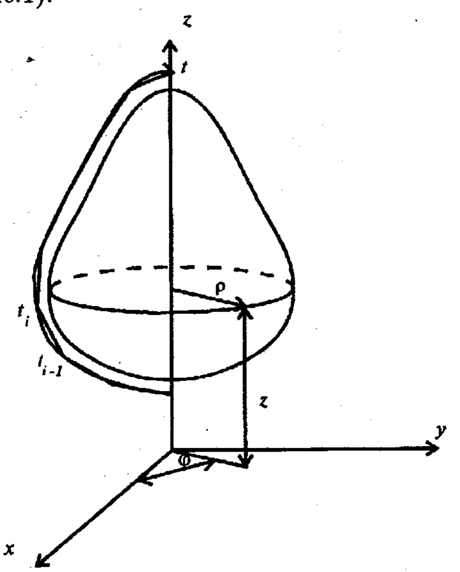


Рис.1. Геометрия и разбиение образующей ОДР формы тела вращения

$$\mathbf{J}_s^m(t) = \left(\mathbf{t}\sum_{i=1}^{N} E_t^i\Pi^i(t) + \boldsymbol{\varphi}\sum_{i=1}^{N} E_\varphi^i\Pi^i(t)\right)e^{im\varphi},$$

$$\mathbf{K}_s^m(t) = \left(\mathbf{t}\sum_{i=1}^{N} H_t^i\Pi^i(t) + \boldsymbol{\varphi}\sum_{i=1}^{N} H_\varphi^i\Pi^i(t)\right)e^{im\varphi},$$

$$\Pi^i(t) = \begin{cases} 1, t\in[t_i,t_{i+1}], \\ 0, t\notin[t_i,t_{i+1}]. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{J}_s^m(t) = \{E_t(t)\mathbf{t} + E_\varphi(t)\boldsymbol{\varphi}\}$, $\mathbf{K}_s^m(t) = \{H_t(t)\mathbf{t} + H_\varphi(t)\boldsymbol{\varphi}\}$ ($\mathbf{t}$, $\boldsymbol{\varphi}$ — единичные векторы), $\Pi^i(t)$ — базовая функция, $E_t^i, E_\varphi^i, H_t^i, H_\varphi^i$ — средние значения составляющих поля на интервале $[t_i, t_{i+1}]$. Таким образом, получим из (1), (2) систему $4N$ линейных однородных уравнений относительно неизвестных $E_t^i, E_\varphi^i, H_t^i, H_\varphi^i, i = 1,...,N$:

$$\left[\hat{\mathbf{Z}}_{ik}^m(\omega_{ms})\right]\begin{bmatrix}[E_t^i]\\ [E_\varphi^i]\\ [H_t^i]\\ [H_\varphi^i]\end{bmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Условием существования нетривиального решения системы (3) является равенство нулю определителя

$$\det\left[\hat{\mathbf{Z}}_{ik}^m(\omega_{ms})\right] = 0.$$

Из этого условия можно получить комплексные собственные частоты $\omega_{mn} = \omega' + i\omega''$ свободных колебаний резонатора.

Результаты проверки ММ шарового ОДР с $\varepsilon = 4$ для ШГ-мод ($m = l$, $n = 1$) приведены в табл. 1, где представлены значения частот и добротностей для моды $TH$ типа моды ШГ. В табл. 1 $(k'r_0)_{ex}$ — безразмерная частота, где $k'$ — волновое число, соответствующее точной резонансной частоте, $r_0$ — радиус шарового резонатора, $Q_{ex}$ — точное значение добротности, $N$ - число разбиений образующей резонатора в методе моментов, $(k'r_0)_{MM}$ и $Q_{MM}$ — соответственно безразмерная частота и добротность, полученные методом моментов, $\delta_\omega$ и $\delta_Q$ — относительные погрешности вычисления собственной частоты и добротности. Таблица 1 иллюстрирует отмеченный во введении факт неприменимости ММ для вычисления излучательных потерь ШГ-мод для порядков $m > 10$. Для $m > 10$ излучательные потери вычислялись с помощью соотношения

$$\omega'' = \frac{\mathrm{Re}\left\{\oint\limits_S[\mathbf{E},\mathbf{H}^*]ds\right\}}{\frac{1}{2}\int\limits_V\varepsilon\mathbf{E}\mathbf{E}^*dV + \frac{1}{2}\int\limits_V\mu\mathbf{H}\mathbf{H}^*dV}. \qquad (4)$$

Физический смысл (4) следующий: числитель — поток энергии, излучаемой резонатором, знаменатель — энергия, запасенная в резонаторе. Данный алгоритм протестирован на известной задаче о колебаниях в диэлектрическом шаре. Результаты проверки (табл. 2)

Таблица 2

| $m$ | $1/(2Q_{ex})$ | $N$ | $1/(2Q_{MM})$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| 20($TE$) | 1,84·10$^{-7}$ | 10 | 1,1 ·10$^{-8}$ | 0,67 |
| | | 20 | 1,6 ·10$^{-7}$ | 0,15 |
| | | 30 | 2,05 ·10$^{-7}$ | 0,11 |
| 20($TH$) | 2,5·10$^{-7}$ | 10 | 2,9 ·10$^{-8}$ | 0,98 |
| | | 20 | 3,5 ·10$^{-7}$ | 0,29 |
| | | 30 | 3,1 ·10$^{-7}$ | 0,19 |
| 30($TH$) | 6,07·10$^{-11}$ | 10 | 1,36 ·10$^{-10}$ | 0,59 |
| | | 20 | 1,4 ·10$^{-10}$ | 0,57 |
| | | 30 | 8,9 ·10$^{-11}$ | 0,32 |
| | | 40 | 6,8 ·10$^{-11}$ | 0,12 |

показали, что численное решение сходится к точному при увеличении $N$. Формула (4) применима для вычисления добротностей мод до 30-го порядка, и точность

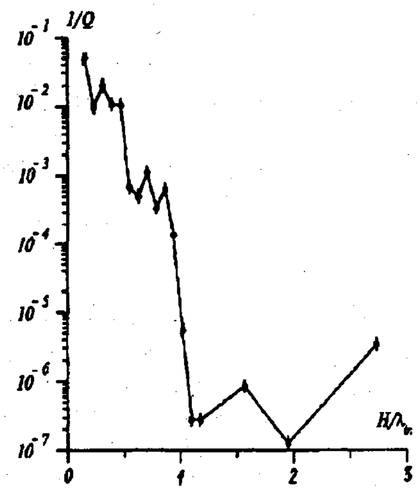


Рис.2.

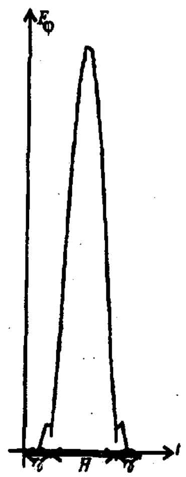


Рис.3.

Рис.2.Зависимость излучательных потерь дискового ОДР от отношения его высоты к длине волны в резонаторе

Рис.3. Распределение компоненты напряженности электрического поля вдоль образующей дискового ОДР

вычисления добротности по этой формуле существенно зависит от точности вычисления поля в пространстве вокруг резонатора.

В качестве примера использования описанного алгоритма приведем зависимость излучательных потерь диэлектрического дискового резонатора от отношения высоты диска к длине волны в резонаторе (рис.2). На рис.2 показаны данные, соответствующие ШГ-моде (распределение одной из компонент поля вдоль образующей на границе резонатора показано на рис.3) с $m = 15$, $\varepsilon = 4,0$. На графике четко прослеживается резкое уменьшение излучательной добротности, когда высота резонатора становится порядка длины волны.

Автор благодарен С.П.Вятчанину и И.А.Биленко за постановку задачи и внимание к работе.

## Литература

1. *Брагинский В.Б., Вятчанин С.П.* // ДАН. 1991. **309**, №10. С. 570.
2. *Ilchenko V.S., Gorodetsky M.L., Vyatchanin S.P.* // Opt. Commun. 1994. **107**. P. 41.
3. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. М.; Л., 1948.
4. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М., 1980.
5. *Cohn S.B.* // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1968. **16**. P. 218.
6. *Garault J., Guilton P.* // Electron. Lett. 1976. **12**. P. 475.
7. *Konishi Y., Hoshino N., Utsumi Y.* // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1976. **24**. P. 112.
8. *Glisson A.W., Wilton D.R.* // IEEE Trans. Antennas Propag. 1980. **28**. P. 5.
9. *Glisson A.W., Kajfez D., James J.* // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1983. **31**. P. 12.
10. *Harrington R.F.* Field Computation by Moment Method. N.Y., 1968.
11. *Поджио А., Миллер Е.* // Вычислительные методы в электродинамике. М., 1977. С. 128.

Поступила в редакцию
13.06.96