РАДИОФИЗИКА

УДК 550.388.2

ДИФФУЗИЯ ЛУЧЕЙ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В.Д.Гусев, О.К.Власова

(кафедра физики атмосферы)

Получены динамические уравнения, описывающие диффузию луча в приближении слабых флуктуаций для любой анизотропной среды. Предложен метод перехода от лучевых уравнений в анизотропной среде со случайными неоднородностями показателя преломления к уравнениям Эйнштейна—Фоккера. В качестве примера решается задача рассеяния света в одноосном кристалле. Полученное выражение для вероятности перехода состояния луча свидетельствует об анизотропии рассеяния даже при изотропной функции корреляции рассеивающих неоднородностей.

Применение уравнения диффузии (уравнения Эйнштейна-Фоккера) к решению задач рассеяния волн в средах со случайными неоднородностями оказалось, как известно, исключительно плодотворным. В работе [1] показано, как и при каких условиях возможно перейти от динамических уравнений, которые в интересующем нас случае являются уравнениями луча, к уравнению Эйнштейна-Фоккера. Однако в этой работе исследуется диффузия луча лишь в среде в среднем изотропной. Ряд конкретных задач требует рассмотреть случай анизотропных сред. Примером распространения волн в анизотропной среде может служить рассеяние радиоволн в ионосфере или света в кристалле.

Начнем с уравнений луча в анизотропной среде. Традиционный или даже классический вывод уравнений луча в анизотропной среде представлен в работах [2, 3]:

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{\mu\mathbf{S} + \nabla_{\mathbf{S}}\mu - \mathbf{S}(\mathbf{S}\nabla_{\mathbf{S}}\mu)\right\} = \nabla_r\mu(\mathbf{r},\mathbf{S}), \tag{1}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \mathbf{S}, \tag{2}$$

где $\mu(\mathbf{r},\mathbf{S})$ - показатель преломления вдоль луча, σ - длина дуги вдоль луча, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор точки в пространстве, $\mathbf{S}$ в соответствии с (2) – единичный вектор касательной к траектории луча.

В работе [1] указано, почему от уравнений луча в форме (1) - (2) нельзя перейти к уравнению Эйнштейна-Фоккера. Дело в том, что одним из необходимых условий возможности перехода от динамических уравнений к уравнению Эйнштейна-Фоккера является δ - корреляция случайной силы по времени (в настоящей задаче роль времени играет длина пути σ). Как видно из (1), (2), флуктуации направления луча определяются случайным поведением показателя преломления $\mu(\mathbf{r},\mathbf{S})$, который не зависит от длины дуги σ, и формально можно считать, что функция корреляции случайной силы будет иметь бесконечный радиус корреляции по переменной σ.

В связи с этим обстоятельством авторы работы [1] предложили перейти от σ к координате z, вдоль которой первоначально направлен луч и от которой зависит показатель преломления $\mu(\mathbf{r},\mathbf{S})$.

Принимая эту идею за основу и в случае анизотропной среды, мы вынуждены обратиться к самому выводу уравнений луча, поскольку в этом случае непосредственно из уравнений (1), (2) нельзя получить не зависящие от производных по $\mathbf{S}_z$ уравнения для поперечных к оси z координат $\mathbf{r}_\perp(z) = \{x, y\}$ и $\mathbf{S}_\perp(z) = \{\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y\}$.

Итак, уравнения луча в анизотропной среде следуют из принципа Ферма, утверждающего, что значение интеграла

$$J = \int\limits_{P_1}^{P_2} \mu(\mathbf{r},\mathbf{S})d\sigma$$

экстремально. Перейдем в J от σ к новому параметру $t = z$:

$$J = \int \mu(x,y,z,x',y')\sqrt{1+x'^2+y'^2}dz, \tag{3}$$

$$x' = \frac{dx}{dz}, y' = \frac{dy}{dz}.$$

Соответствующие вариационной задаче (3) уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\partial\mu}{\partial x_i'}\sqrt{1+x'^2+y'^2} + \mu x_i'\sqrt{1+x'^2+y'^2}\right\} =$$

$$= \frac{\partial\mu}{\partial x_i}\sqrt{1+x'^2+y'^2}, \tag{4}$$

где $i = 1, 2, x_1 = x, x_2 = y$.

Перейдем от x', y' к переменным $S_x = x'/\sqrt{1+x'^2+y'^2}$, $S_y = y'/\sqrt{1+x'^2+y'^2}$, тогда (4) можно записать в векторной форме:

$$\frac{d}{dz}\left\{\nabla_{\mathbf{S}_\perp}\mu - \mathbf{S}_\perp\left(\mathbf{S}_\perp\nabla_{\mathbf{S}_\perp}\mu\right) + \mu\mathbf{S}_\perp\right\} = \nabla r_\perp\mu. \tag{5}$$

Вместо уравнения (2), очевидно, будет

$$\sqrt{1-\mathbf{S}_\perp^2}\frac{dr_\perp}{dz} = \mathbf{S}_\perp. \tag{6}$$

Чтобы перейти от уравнений (5), (6) к уравнениям типа уравнения Ланжевена

$$\frac{d\xi_i(s)}{ds} = \nu_i(\xi, s) + f_i(\xi, s),$$

где ξ – реализация исследуемого процесса, ν_i – детерминированные функции, f_i – случайные функции, рассмотрим случай малых случайных воздействий, а именно будем предполагать, например, что рассеяние радиоволн в ионосфере вызвано малыми флуктуациями электронной концентрации:

$$K = K_0 + \alpha K_\alpha(\mathbf{r}),$$

где $\alpha \ll 1$, а рассеяние света в одноосном кристалле есть результат малых флуктуаций диэлектрических проницаемостей вдоль и поперек оптической оси:

$$\varepsilon_\parallel = \varepsilon_{\parallel 0} + \alpha\varepsilon_{\parallel\alpha}(\mathbf{r}), \quad \varepsilon_\perp = \varepsilon_{\perp 0} + \alpha\varepsilon_{\perp\alpha}(\mathbf{r}).$$

В связи с этим ищем решение системы (5), (6) в виде следующих рядов:

$$\mathbf{r}_\perp(z) = \mathbf{r}_{\perp 0}(z) + \alpha\mathbf{r}_{\perp\alpha}(z) + O(\alpha^2), \tag{7}$$

$$\mathbf{S}_\perp(z) = \mathbf{S}_{\perp 0}(z) + \alpha\mathbf{S}_{\perp\alpha}(z) + O(\alpha^2). \tag{8}$$

Тогда $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{S})$ в анизотропной среде можно записать таким образом:

$$\mu = \mu\left[\mathbf{r}_\perp(z,\alpha), z, \mathbf{S}_\perp(z,\alpha), K(\mathbf{r},\alpha)\right],$$

$$\text{или}\ \mu = \mu\left[\mathbf{r}_\perp(z,\alpha), z, \mathbf{S}_\perp(z,\alpha), \varepsilon_\perp(\mathbf{r},\alpha)\varepsilon_\parallel(\mathbf{r},\alpha)\right]. \tag{9}$$

Подставляя (7), (8) в (5), (6) и полагая $\alpha = 0$, получим для среды в среднем однородной при начальных условиях

$$\mathbf{r}_{\perp 0}(0) = \mathbf{S}_{\perp 0}(0) = 0$$

решение, которое легко проверить подстановкой:

$$\mathbf{r}_{\perp 0}(z) = \mathbf{S}_{\perp 0}(z) = 0. \tag{10}$$

Уравнения для $\mathbf{r}_{\perp\alpha}, \mathbf{S}_{\perp\alpha}$ получим, дифференцируя (5), (6) по α и полагая затем $\alpha = 0$. Так, первое приближение для уравнения (6) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}_{\perp\alpha}}{dz} = \mathbf{S}_{\perp\alpha}. \tag{11}$$

Дифференцирование (5) приводит к выражению

$$\left\{\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{\partial\mu}{\partial z}S_i + \mu\frac{d}{dz}\frac{\partial\mu}{\partial S_i} - \frac{dS_i}{dz}\left(\mathbf{S}_\perp\nabla_\perp\mu\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{d}{dz}\left(\mathbf{S}_\perp\nabla_\perp\mu\right)S_i\right]\right\}_{\alpha=0} =$$

$$= \left[\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right)\right]_{\alpha=0}.$$

Дифференцируя μ в соответствии с выражением (9), принимая во внимание (10), получим для среды в среднем однородной:

$$\sum_{k=1}^{2} a_{ik}\frac{dS_{i\alpha}}{dz} = \left[\frac{\partial\mu}{\partial K}\frac{\partial K_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial^2\mu}{\partial K\partial S_{x_i}}\frac{\partial K_\alpha}{\partial z}\right]_{\alpha=0}, \tag{12}$$

где a_{ik} — компоненты матрицы

$$A = \left\| \begin{matrix} \mu + \frac{\partial^2\mu}{\partial\mathbf{S}_x^2} & \frac{\partial^2\mu}{\partial\mathbf{S}_x\partial\mathbf{S}_y} \\ \frac{\partial^2\mu}{\partial\mathbf{S}_x\partial\mathbf{S}_y} & \frac{\partial^2\mu}{\partial\mathbf{S}_x^2} \end{matrix} \right\|_{\alpha=0}. \tag{13}$$

Объединяя (10), (11) и (12), получим динамические уравнения, описывающие диффузию луча в анизотропной среде с точностью до $O(\alpha^2)$:

$$\frac{dx_i}{dz} = S_i, \tag{14}$$

$$\frac{dS_i}{dz} = \alpha\sum_{k=2}^{2} a_{ik}{}^{-1}\left(\frac{\partial\mu}{\partial K}\frac{\partial K_\alpha}{\partial x_k} - \frac{\partial^2\mu}{\partial K\partial S_i}\frac{\partial K_\alpha}{\partial z}\right)_{\alpha=0}, \tag{15}$$

где $a_{ik}{}^{-1}$ — компоненты матрицы, обратной матрице A (13).

Рассмотрим теперь конкретную задачу рассеяния света в одноосном кристалле. Известно выражение для показателя преломления в такой среде:

$$\mu = \sqrt{\varepsilon_\perp\gamma^2 + \varepsilon_\parallel(1-\gamma^2)},$$

где $\gamma = (\mathbf{Sa})$ — косинус угла между лучом и оптической осью, заданной направлением $\mathbf{a}$.

Систему координат выбираем в соответствии со сказанным выше следующим образом: невозмущенное направление луча $\mathbf{S}_0$ совпадает с осью z, единичный вектор $\mathbf{a}$ лежит в плоскости (z, y) и составляет с осью z угол θ_0. Тогда, записав следующим образом γ:

$$\gamma = S_y S_0 + \sqrt{1 - S_x^2 - S_y^2}\,C_0,$$

где $S_0 = \sin\theta_0$, $C_0 = \cos\theta_0$, получим выражение для μ в виде (9).

Найдем теперь компоненты a_{ik} матрицы (13), учитывая, что $\mu_0 = \mu(\alpha = 0) = \sqrt{\varepsilon_{\perp 0}C_0^2 + \varepsilon_{\parallel 0}S_0^2}$:

$$a_{11} = \frac{\varepsilon_{\parallel 0}}{\mu_0}, a_{22} = \frac{\varepsilon_{\parallel 0}\varepsilon_{\perp 0}}{\mu_0^3}, a_{12} = a_{21} = 0.$$

Очевидно, что в уравнениях (15) вместо производных по K следует находить сумму производных по $\varepsilon_\parallel, \varepsilon_\perp$, а именно

$$\frac{\partial\mu}{\partial K} \to \frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon_\perp} + \frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon_\parallel}.$$

В итоге после длительных, но простых вычислений получим уравнения луча в одноосном кристалле с точностью до $O(\alpha^2)$:

$$\frac{d\mathbf{r}_\perp}{dz} = \mathbf{S}_\perp, \tag{16}$$

$$\frac{dS_x}{dz} = \frac{\alpha}{2\varepsilon_{\|0}}\left[S_0^2\frac{\partial\varepsilon_{\|\alpha}}{\partial x} + C_0^2\frac{\partial\varepsilon_{\perp\alpha}}{\partial x}\right], \tag{17}$$

$$\frac{dS_y}{dz} = \frac{\alpha\mu_0^2}{2\varepsilon_{\|0}\varepsilon_{\perp 0}}\left[S_0^2\frac{\partial\varepsilon_{\|\alpha}}{\partial y} + C_0^2\frac{\partial\varepsilon_{\perp\alpha}}{\partial y}\right] -$$
$$-\frac{\alpha C_0 S_0\mu_0^2}{2\varepsilon_{\|0}\varepsilon_{\perp 0}}\left[\left(1+\frac{\varepsilon_{\|0}}{\mu_0^2}\right)\frac{\partial\varepsilon_{\perp\alpha}}{\partial z} - \left(1+\frac{\varepsilon_{\perp 0}}{\mu_0^2}\right)\frac{\partial\varepsilon_{\|\alpha}}{\partial z}\right]. \tag{18}$$

Уравнение Эйнштейна—Фоккера, соответствующее динамическим уравнениям (16)-(18), приобретает вид

$$\frac{\partial P_z(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{S}_\perp)}{\partial z} + \mathbf{S}_\perp\nabla_{\mathbf{r}_\perp}P_z -$$
$$-D\left[\frac{1}{\varepsilon_{\|0}^2}\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_x^2} + \frac{\mu_0^4}{\varepsilon_{\|0}^2\varepsilon_{\perp 0}^2}\frac{\partial^2 P_z}{\partial S_y^2}\right] = 0,$$

где $D = \frac{\overline{\varepsilon_{\|\alpha}^2}}{4r_0^2}\left(\mathbf{S}_0^2 + C_0^2 q_z\right)^2$, $\overline{\varepsilon_{\|\alpha}^2}$ — дисперсия флуктуаций соответствующей электронной концентрации, $r_0 = \int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{d\rho}{dr}dr$, $\rho(r)$ — нормированный коэффициент корреляции изомерных флуктуаций той же диэлектрической проницаемости, кроме того, предполагаем, что $\varepsilon_{\perp\alpha} = q_z\varepsilon_{\|\alpha}$, $q_z = \text{const}$.

Решением этого уравнения при начальном условии

$$P_z(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{S}_\perp, z=0) = \delta(\mathbf{r}_\perp)\,\delta(\mathbf{S}_\perp)$$

является следующее распределение:

$$P_z(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{S}_\perp, z) = \frac{3\Delta}{4\pi D z^4}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\varepsilon_{\|0}^2}{Dz\mu_0^2}\left[\left(S_x^2 + S_y^2\frac{\varepsilon_{\perp 0}^2}{\mu_0^4}\right) + \frac{3}{z^2}\left(x^2 + y^2\frac{\varepsilon_{\perp 0}^2}{\mu_0^4}\right)\right]\right\}, \tag{19}$$

где $\Delta = a_{11}a_{22}$.

Из решения (19) следует, что рассеяние в одноосном кристалле будет анизотропным даже при изотропии функции корреляции рассеивающих неоднородностей.

Очевидно, что линиями равной вероятности распределения направляющих косинусов луча будет семейство эллипсов:

$$S_x^2 + S_y^2\frac{\varepsilon_{\perp 0}^2}{\mu_0^4} = \text{const}. \tag{20}$$

Несомненный интерес представляет закон распределения направления единичного вектора нормали к фронту волны $\mathbf{N}$. Однако получение из распределения (19) распределения для $\mathbf{N}$ затруднено тем, что само выражение (19) получено в приближении малых флуктуаций направления вектора $\mathbf{S}$ относительно невозмущенного луча. Кроме того, известное соотношение

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{N}\varepsilon_\perp - \mathbf{a}(\varepsilon_\perp - \varepsilon_\|)q}{\sqrt{\varepsilon_\perp^2(1-q^2) + \varepsilon_\|^2 q^2}} \tag{21}$$

является нелинейным, поскольку $q = (\mathbf{Na})$.

В связи со сказанным предположим, что распределение направляющих косинусов нормали в приближении малых флуктуаций направления нормали относительно невозмущенного $\mathbf{N}_0$ подчиняется, как и соответствующее распределение луча, нормальному эллипсоидальному закону, т.е. вид выражения (20) сохраняется для флуктуаций нормали. Запишем выражение (20) через компоненты вектора $\mathbf{N}$, воспользовавшись (21), и перейдем к новой штрихованной системе координат, полученной в результате вращения старой системы вокруг оси x на некоторый угол ψ_0. Предположим теперь, что в новой системе координат флуктуации N'_x, N'_y порядка a, тогда компонента N'_z будет порядка $1 - O(\alpha^2)$. Приравнивая нулю коэффициенты при N'_{z0}, получим, что

$$\text{tg}\psi_0 = -\frac{S_0 C_0\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_{\|0}S_0^2 + \varepsilon_{\perp 0}C_0^2}, \quad \Delta\varepsilon_0 = \varepsilon_{\|0}S_0^2 - \varepsilon_{\perp 0}C_0^2.$$

Очевидно, что угол ψ_0 совпадает с углом между лучом и нормалью в соответствующей среде без флуктуаций.

В результате в выбранном приближении получим индикатрису рассеяния нормали к фронту волны в виде

$$N_x'^2 + \frac{N_y'^2}{\cos^2\psi_0} = \text{const}. \tag{22}$$

Последнее выражение представляет больший интерес в практике ионосферного распространения радиоволн, чем в оптических экспериментах. Подробное обсуждение зависимости (22) и ее сопоставление с данными ионосферного зондирования проведено в работе [4]. Однако решение задачи рассеяния радиоволн в ионосфере предложенным здесь методом содержит ряд трудностей.

Итак, основным содержанием настоящей работы является получение системы динамических уравнений, позволяющих перейти к уравнению Эйнштейна—Фоккера и решить задачу рассеяния луча в анизотропной среде со случайными неоднородностями. Трудность заключалась в том, что в отличие от среды в среднем изотропной, где динамические уравнения легко получить из уравнений луча, для анизотропной среды пришлось обратиться к самому выводу уравнений луча. Таким образом, с использованием замены переменной, предложенной в работе [1], получены динамические уравнения, описывающие диффузию луча в анизотропной среде и позволяющие перейти от них к уравнению Эйнштейна—Фоккера, что и сделано в работе на примере рассеяния света в одноосном кристалле.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-16840).

Литература

1. *Кляцкин В.И., Татарский В.И.* //Изв. вузов, Радиофизика. 1971. **14**. С. 706.

2. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч.2. М.; Л., 1937. С. 15-20.
3. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М., 1980. С.7-26.
4. *Гусев В.Д., Власова О.К.* // Геомагнетизм и аэрономия. 1969. **9**, №5. С. 828.

Поступила в редакцию
22.01.96

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 621.371:551.510

ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ СТРУКТУРНЫХ СОСТОЯНИЙ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ НА ПРИЗЕМНЫХ ТРАССАХ

Т.И.Арсеньян, Л.С.Корниенко, П.В.Короленко, Е.А.Кулягина, Г.В.Петрова, Н.Н.Федотов

(кафедра оптики и спектроскопии; кафедра радиофизики)

Рассмотрено явление перемежаемости структурных состояний лазерных пучков — квазипериодических скачкообразных переходов между двумя структурными состояниями пучка: бездислокационным и стохастическим. Экспериментально исследованы условия возникновения и особенности проявления структурной перемежаемости на приземных наклонной и горизонтальной трассах. Обсуждается связь изучаемых оптических эффектов с изменениями турбулентных свойств атмосферы.

В настоящее время в литературе (см., напр., [1-3]) содержится обширный теоретический и экспериментальный материал по исследованию как слабых, так и сильных флуктуаций лазерного излучения на атмосферных оптических трассах. Вместе с тем отчетливо проявляется дефицит сведений об устойчивости отдельных режимов флуктуаций и условиях их сменяемости. В данной работе приведены результаты исследования малоизученного явления перемежаемости структурных состояний лазерного пучка на приземных атмосферных трассах [4,5] — квазипериодической скачкообразной сменяемости двух состояний пучка. Одно из состояний характеризуется малыми и, как правило, плавными возмущениями профиля распределения интенсивности и бездислокационной структурой волнового фронта. Второе состояние имеет ярко выраженный стохастический спеклоподобный характер амплитудно-фазового распределения с многочисленными случайно расположенными на волновом фронте винтовыми дислокациями, что характерно для режима сильных флуктуаций.

Экспериментальный стенд, на котором проводились исследования, включал комплекс приемо-передающей и измерительной аппаратуры, а также две приземные трассы, работающие в локационном режиме. Одна из них была горизонтальной, другая — наклонной. Приемо-передающие устройства располагались на высоте 25 м. В качестве излучателя использовался одномодовый гелий-неоновый лазер на длине волны 0,63 мкм. Его выходной пучок, пройдя светоделительную пластину и формирующие телескопы, направлялся на атмосферные трассы. Длина горизонтальной трассы в одном направлении (от выходной апертуры до поворотного плоского зеркала) составляла 285 м, соответствующая длина наклонной трассы с углом наклона 30° — 320 м. Для того, чтобы избежать проявления эффектов усиления флуктуаций излучения, входная и выходная апертуры на каждой из трасс были разведены на 0,5 м.

Регистрация фазовых характеристик лазерного пучка, прошедшего трассу, проводилась с помощью интерферометра сдвига, построенного по схеме Маха-Цендера [6]. Сформированная в нем интерференционная картина фиксировалась либо (при короткой экспозиции) на неподвижную, либо (при длительной экспозиции) на движущуюся фотопленку. В последнем случае на выходе интерферометра перпендикулярно интерференционным полосам устанавливалась узкая щель. Таким образом, фиксируемая интерферометрическая картина позволяла определять как пространственные, так и пространственно-временные возмущения фазового распределения. Была предусмотрена также возможность