ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 621.372.2

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТИПА ЛАНЦОША В ЗАДАЧЕ РАСЧЕТА МОД ВОЛНОВОДА

А.Н.Боголюбов, А.Л.Делицын

(кафедра математики)

Рассматривается применение методов типа Ланцоша для решения обобщенной алгебраической проблемы собственных значений, возникающей при конечно-элементном модовом анализе волноводов. Предложен подход, стабилизирующий вычисление младших собственных значений при наличии нулевого собственного значения высокой кратности. Рассматриваются вычислительные особенности задачи.

В данной работе рассматриваются вопросы применения метода Ланцоша при расчете мод волновода методом смешанных конечных элементов. Мы будем рассматривать задачу в двух постановках. В первой, наиболее часто используемой при применении метода конечных элементов [1,2], в качестве собственного значения (с.з.) выступает параметр k^2:

$$\mathrm{rot}_\beta \varepsilon^{-1} \mathrm{rot}_\beta H = k^2 \mu H, \tag{1}$$

где

$$\mathrm{rot}_\beta H = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta H_y\right) i + \\ + \left(i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) k.$$

Во второй рассматриваемой постановке задача формулируется непосредственно относительно квадрата постоянной распространения β^2. Подобный подход приводит к более полному анализу волновода, поскольку дает возможность исследовать помимо распространяющихся также затухающие и так называемые комплексные волны, не переносящие энергии. При этом может быть использован вариационный функционал:

$$\int \left(\mathrm{rot}_k \tilde{H}^* \tilde{\varepsilon}^{-1} \mathrm{rot}_k \tilde{H} - \beta^2 \tilde{H}^* \tilde{\mu} \tilde{H}\right) ds, \tag{2}$$

где

$$\mathrm{rot}_k \tilde{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} + \tilde{H}_y\right) i + \\ + \left(-\tilde{H}_x + \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) j + \left(-\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y}\right) k,$$

$$\tilde{\varepsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} k^2\mu & 0 & 0 \\ 0 & k^2\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & k^2\mu \end{pmatrix}.$$

Варьируя функционал (2), приходим к векторному уравнению

$$\mathrm{rot}_k \tilde{\varepsilon}^{-1} \mathrm{rot}_k \tilde{H} = \beta^2 \tilde{\mu} \tilde{H}, \tag{3}$$

эквивалентному системе уравнений, полученной авторами в работе [3]. Отметим, что задача (3) представляет собой обобщенную задачу на с.з. для симметричных, но знаконеопределенных операторов.

Рассмотрим вначале применение метода Ланцоша для решения задачи в постановке (1). Для дискретизации будем использовать смешанные прямоугольные конечные элементы первого порядка, применение которых к решению задачи (1) изложено в предыдущей работе авторов [2]. В результате приходим к обобщенной алгебраической задаче на с.з.:

$$AH = k^2 BH. \tag{4}$$

Как известно [2], применение смешанных конечных элементов позволяет точно аппроксимировать нулевое с.з. оператора $\mathrm{rot}\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}$. Отметим, что кратность собственного значения равна числу узлов сетки, отвечающих степеням свободы H_z компоненты.

Для решения задачи (4) рассмотрим применение следующего метода типа метода Ланцоша. Построим векторы x_i по формулам

$$\beta_{i+1} B x_{i+1} = A x_i - \alpha_i B x_i - \beta_i B x_{i-1},$$

исходя из требования

$$(x_j, Bx_k) = \delta_{jk}.$$

При числе итераций m, меньшем порядка матриц A, B, построим матрицу преобразования X, в качестве столбцов которой выберем векторы x_i. Посредством преобразования

$$X^T A X \tilde{H} = k^2 X^T B X \tilde{H}, \quad \text{где} \quad \tilde{H} = X^T H,$$

преобразуем задачу (4) к задаче

$$T\tilde{H} = k^2 \tilde{H}, \tag{5}$$

где матрица T — трехдиагональная. Вычисление коэффициентов матрицы T ведется одновременно с вычислением векторов x_i, и в памяти хранится только несколько итерируемых векторов. Наличие нулевого с.з. высокой кратности приводит к медленной сходимости метода и неустойчивому процессу вычисления даже основного минимального отличного от нуля с.з.

При числе итераций меньше 1/3 порядка матрицы в спектре матриц присутствуют приближения только к нулевому с.з. После того как число итераций превысит 1/3 порядка матриц, начинают появляться приближения к ненулевым с.з. При этом появляются многократные приближения разной точности к каждому с.з. Достаточная точность достигается при числе итераций, приблизительно равном порядку матриц, число же приближений к нулевому с.з. становится небольшим. Например, при порядке задачи 481 число приближений к нулевому с.з. не превышает 10. Для устранения неустойчивого поведения метода в работе [2] был предложен метод исчерпывания, сводящий задачу (4) к задаче меньшей размерности. Однако при этом утрачивалась симметрия первоначальной проблемы собственных значений.

В данной работе для вычисления нескольких младших собственных значений предлагается следующий подход. Выберем в качестве начального вектора метода Ланцоша вектор

$$x_1 = \frac{B^{-1}Ax}{\sqrt{(Ax, B^{-1}x)}}, \tag{6}$$

где x — произвольный вектор. В разложении вектора x_1 по системе собственных векторов задачи (4) отсутствуют компоненты, принадлежащие нулевому подпространству матрицы A. В отсутствие ошибок округления приближения к нулевому с.з. в спектре матриц T должны были бы отсутствовать при любом числе итераций m, однако на практике наличие ошибок приводит к тому, что при достаточно большом количестве итераций появляются приближения к нулевому с.з. Для вычисления нескольких младших с.з. не требуется столь большого количества шагов, при котором ошибки округления играют заметную роль; приближения к с.з. являются однократными и приближения к нулевому с.з. отсутствуют. При введении конечно-элементной сетки 12×12 элементов порядок матриц равен 481. Для вычисления нескольких основных мод достаточным оказывается примерно 70 итераций. В качестве классического теста используется задача о частично заполненном волноводе. Результаты вычислений сравниваются с результатами работы [1], причем различие составляет порядка 0,5—1% (таблица).

№	k^2	
	$\beta = 1$	$\beta = 2$
1	2,885 (2,876)	5,355 (5,336)
2	6,715 (6,715)	8,538 (8,538)
3	8,187 (8,156)	10,03 (10,02)

В скобках приведены результаты работы [1].

Обратимся теперь к рассмотрению задачи в постановке (2). В этом случае применим следующий метод типа Ланцоша. Из последовательности крыловских векторов $x, B^{-1}Ax, \ldots, (B^{-1}A)^m x$ построим векторы x_i, исходя из требования $(x_j, Bx_k) = \pm\delta_{jk}$. Итерационные формулы имеют вид

$$\beta_{i+1}Bx_{i+1} = Ax_i - \alpha_i Bx_i - \gamma Bx_i, \quad \alpha_i = \frac{(Ax_i, x_i)}{(Bx_i, x_i)},$$

$$\beta_{i+1} = \sqrt{|(Bx_{i+1}, x_{i+1})|}, \quad \gamma_i = \beta\frac{(Bx_i, x_i)}{(Bx_{i-1}, x_{i-1})}.$$

После преобразования $X^T AX\tilde{H} = \beta^2 X^T DX\tilde{H}$ приходим к задаче $T\tilde{H} = \beta^2 C\tilde{H}$, где матрица T трехдиагональная, а C диагональная, на диагонали которой стоит +1 или −1. Для расчета собственных значений применим LR-алгоритм к матрице $C^{-1}T$, сохраняющий ее трехдиагональность. Несмотря на то что нулевое собственное значение в данном случае является внутренней точкой спектра, его высокая кратность приводит к медленной сходимости метода. Поэтому выберем начальный вектор подобно тому, как это сделано в предыдущей постановке:

$$x_1 = \frac{B^{-1}Ax}{\sqrt{|(Ax, B^{-1}x)|}}.$$

Скорость сходимости имеет такой же характер в области, далекой от отсечки. В случае приближения к отсечке скорость сходимости уменьшается и, по-видимому, следует использовать явный метод исчерпывания.

Литература

1. *Bermudes A., Pedreira D. G.* // Numer. Math. 1992. **61**. P. 39.

2. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. №1. С. 9 (Moscow University Phys. Bull. 1996. N1).

3. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л.* // Там же. 1995. №2. С. 95 (Ibid. 1995. N2. P. 85).

Поступила в редакцию
31.05.96