КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12:531.51

ФИНСЛЕРОВЫ СЛЕДСТВИЯ СПЕЦИАЛЬНО-РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПОДХОДА

Г.С. Асанов

(кафедра теоретической физики)

Две новые теоремы определяют инвариантные свойства финслеровых кинематических преобразований и финслерова метрического тензора.

Продолжая предыдущие работы [1–4] и используя принятые в [1, 2] обозначения, мы рассмотрим обобщенное кинематическое преобразование

$$t = a(v)T + e(v)x, \quad x=b(v)(X - vT), \tag{1}$$

удовлетворяющее финслерову условию инвариантности

$$F(T,X) = F(t,x), \tag{2}$$

и введем низкоскоростное разложение

$$a(v) = 1 + \alpha_1 v^2 + \alpha^* |v|^3 + \alpha_2 v^4 + O(v^5) \tag{3}$$

для ключевого кинематического коэффициента.

В работе [1] были доказаны следующие утверждения. Финслерова метрическая функция F_{SR}, удовлетворяющая условию (2), содержит один характеристический параметр g и один дополнительный параметр $j > 0$, так что обращение в нуль $g = 0$ свело бы функцию $F_{SR}(T, X)$ к псевдоевклидову случаю $(T^2 - jX^2)^{1/2}$. Обращение в нуль $[d^3a^2(v)/dv^3]|_{v=0}=0$ влечет за собой $g=0$. Равенство

$$a(v)=F_{SR}(T,vT)/T = F_{SR}(1,v) \tag{4}$$

и транспортная синхронизация

$$e(v)=[b(v)]^{-1}da(v)/dv \tag{5}$$

частного типа

$$e(v)=-jv \tag{6}$$

являются прямыми следствиями условия (2). Из этих утверждений нетрудно сделать вывод, что справедлива следующая

Финслерова низкоскоростная теорема. *При справедливости условия инвариантности* (2) *обращение в нуль* $\alpha^*=0$ *немедленно повлекло бы за собой* $g = 0$ *и, следовательно, свело бы кинематические коэффициенты* $a(v)$ *и* $b(v)$ *к их псевдоевклидову случаю* $a(v)=(1-jv^2)^{1/2}$ *и* $b(v)=1/a(v)$.

Замечание 1. При финслеровом кинематическом подходе нельзя основываться на (v^2)-разложении

$$a(v)=1+\alpha_1 v^2 + \alpha_2 v^4 + o(v^4) \tag{7}$$

ключевого кинематического коэффициента $a(v)$. Хотя предположение справедливости разложения такого типа внешне выглядит удобным с практической точки зрения проведения конкретных релятивистских нелоренцевых оценок, разложение (7) немедленно вступает в противоречие с финслеровым условием инвариантности (2) в силу теоремы, сформулированной выше. В работе [5] авторы выдвигали предложение интерпретировать формулы (1), дополненные (v^2)-разложением (7), как удобные представления преобразований, принадлежащих группе инвариантности некоторой финслеровой метрической функции. Такое предложение нереализуемо. Нет ни одной финслеровой метрической функции (за исключением собственно псевдоевклидовой метрической), которая была бы инвариантна относительно преобразований (1) и (7), принадлежащих типу преобразований Мансоури–Сексла (изученных в [6]).

Следуя [1,2], мы рассматриваем (1) как кинематическое преобразование из выделенной системы отсчета S_0 в инерциальную систему S, движущуюся относительно S_0 со скоростью v вдоль общего направления осей x и X. Через $X^P = [X^0 = T, X^1 = X]$ и $X'^P=[X'^0 = t, X'^1 = x]$ мы обозначим соответствующие координаты систем отсчета S_0 и S. Переписывая (1) в тензорном виде

$$X'^P=K^P_Q(v)X^Q, \tag{8}$$

получим

$$K^0_0(v) = a(v) - ve(v)b(v), \quad K^1_0(v) = -vb(v), \tag{9}$$

$$K^0_1(v) = e(v)b(v), \qquad K^1_1(v) = b(v). \tag{10}$$

Индексы P, Q, R, S будут пробегать значения от 0 до 1. В соответствии с общим правилом, принятым в финслеровой геометрии [3,4], введем метрический тензор

$$g_{PQ}(X) = (1/2)\, \partial^2 F^2(X)/\partial X^P \delta X^Q. \tag{11}$$

Предполагая справедливым условие инвариантности (2) и вставляя (8) в (2), получим тождество $F(X^P)=F(K^P_Q(v)X^Q)$. Применяя оператор второй производной $\partial^2/\partial X^P \partial X^Q$ к квадрату этого тождества, получим

$$g_{PQ}(X) = g_{RS}(X')K^R_P(v)K^S_Q(v). \qquad (12)$$

В случае $X'^1=0$ из (1) имеем $X^1/X^0=v$. Полагая $X'^1=0$ в (12), имеем

$$g_{PQ}(v) = g_{RS}(0)K^R_P(v)K^S_Q(v). \qquad (13)$$

Следовательно, справедлива следующая

Финслерова кинематическая теорема. *Если условие инвариантности* (2) *выполняется, то ассоциируемый финслеров метрический тензор* (11) *инвариантен относительно кинематических преобразований* (1), *т.е. справедливо тождество инвариантности* (12). *Это тождество влечет за собой представление* (13), *которое, будучи взятым совместно с формулами* (9)–(10), *дает явное и простое выражение финслерова метрического тензора через ключевые кинематические функции* $a(v)$, $b(v)$ *и* $e(v)$.

Замечание 2. Следует иметь в виду, что использование в правой части соотношения (12) обратных коэффициентов K^{*P}_Q (определяемых согласно правилу $K^{*P}_Q\, K^Q_R = \delta^P_R$) вместо самих коэффициентов K^P_Q привело бы к неправильному представлению для финслерова метрического тензора, а вовсе не к альтернативному финслерову подходу (как это могло бы показаться с первого взгляда). Подобное смешение встречалось в работе [5], поэтому окончательные представления (12) и (13) в [5] ошибочны и сделанные в [5] выводы не согласуются с доказанными нами выше двумя теоремами.

Литература

1. *Асанов Г.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. №1. С.18 (Moscow University Phys. Bull. 1996. №1. P.15).
2. *Асанов Г.С.*// Там же. 1996. № 3. С.8 (Ibid. № 3. P.1).
3. *Asanov G.S.*// Reports on Math. Phys. 1997. **39**. №1. P.69.
4. *Asanov G.S.* Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories. Dordrecht, 1985.
5. *Golestanian R., Khajehpour M.R.H., Mansouri R.* // Class. Quantum Grav. 1995. **12**. P.273.
6. *Mansouri R., Sexl R.*// Gen. Rel. Grav. 1977. **8**. P.496, 515, 809.

Поступила в редакцию
13.09.96

УДК 517.9

РАСЧЕТ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНАХ ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Г.Н.Медведев, Б.И.Моргунов

(кафедра математики)

Рассматриваются тепловые и механические процессы, возникающие при локальных тепловых воздействиях на пластины из материала, который может быть как однородным, так и неоднородным. В последнем случае свойства материала существенно меняются по координате, соответствующей толщине пластины. Внешние тепловые возмущения сосредоточены в малой области и имеют значительную величину. Для определения температуры и вектора перемещений применяется асимптотическая методика.

Система уравнений, описывающая тепловые и механические процессы в неоднородном материале, берется в виде [1]:

$$k\Delta_r T + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial z}\right) = c\,\frac{\partial T}{\partial t} - q + \theta b\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(ru) + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\,\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\,\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\lambda}{r}\,u - bT\right) +$$

$$+\frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\,u\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\,\frac{\partial u}{\partial z} + \mu\,\frac{\partial w}{\partial r}\right) = \gamma\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

$$\mu\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\,\frac{\partial u}{\partial r} + \nu\,\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\lambda}{r}\,u - bT\right) = \gamma\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Здесь T – температура, u и w – компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}=\{u,0,w\}$ (задача, по предположению, аксиально-симметричная).

Коэффициент теплопроводности k, теплоемкость c, коэффициент температурных напряжений b, коэффициенты Ламе λ и μ ($\nu=\lambda+2\mu$) и плотность γ существенно изменяются в направлении оси Oz (зависят от $\zeta=z/\varepsilon$). Плотность внешних источников тепла $q=(1/\varepsilon)f(\rho,z,t)$, где $\rho=r/\sqrt{\varepsilon}$, $\Delta_r\equiv(1/r)(\partial/\partial r)(r(\partial/\partial r))$ – радиальная часть оператора Лапласа. Таким образом, малый параметр ε характеризует "малую" площадь области "сильного" теплового воздействия, и этим же параметром ε описывается "сильная" неоднородность материала вдоль координаты $\zeta=z/\varepsilon$.

В таких предположениях строятся асимптотические выражения для температуры T и компонент u и w вектора перемещений.

Выполним в (1) асимптотическое преобразование [2,3], удерживая члены до порядка ε включительно:

$$T \approx \overline{T}_0(\rho, z, t) + \varepsilon T_2(\rho, z,\zeta, t),$$
$$u \approx \sqrt{\varepsilon}\,\overline{u}_1(\rho, z, t), \qquad (2)$$
$$w \approx \overline{w}_0(z, t) + \sqrt{\varepsilon}\,\overline{w}_1(z, t) + \varepsilon w_2(\rho, z,\zeta, t).$$