лучим

$$g_{PQ}(X) = g_{RS}(X')K^R_P(v)K^S_Q(v). \qquad (12)$$

В случае $X'^1=0$ из (1) имеем $X^1/X^0=v$. Полагая $X'^1=0$ в (12), имеем

$$g_{PQ}(v) = g_{RS}(0)K^R_P(v)K^S_Q(v). \qquad (13)$$

Следовательно, справедлива следующая

Финслерова кинематическая теорема. *Если условие инвариантности* (2) *выполняется, то ассоциируемый финслеров метрический тензор* (11) *инвариантен относительно кинематических преобразований* (1), *т.е. справедливо тождество инвариантности* (12). *Это тождество влечет за собой представление* (13), *которое, будучи взятым совместно с формулами* (9)-(10), *дает явное и простое выражение финслерова метрического тензора через ключевые кинематические функции* $a(v)$, $b(v)$ и $e(v)$.

Замечание 2. Следует иметь в виду, что использование в правой части соотношения (12) обратных коэффициентов K^{*P}_Q (определяемых согласно правилу $K^{*P}_Q K^Q_R = \delta^P_R$) вместо самих коэффициентов K^P_Q привело бы к неправильному представлению для финслерова метрического тензора, а вовсе не к альтернативному финслерову подходу (как это могло бы показаться с первого взгляда). Подобное смешение встречалось в работе [5], поэтому окончательные представления (12) и (13) в [5] ошибочны и сделанные в [5] выводы не согласуются с доказанными нами выше двумя теоремами.

Литература

1. *Асанов Г.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. №1. С.18 (Moscow University Phys. Bull. 1996. №1. P.15).
2. *Асанов Г.С.*// Там же. 1996. № 3. С.8 (Ibid. № 3. P.1).
3. *Asanov G.S.*// Reports on Math. Phys. 1997. **39**. №1. P.69.
4. *Asanov G.S.* Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories. Dordrecht, 1985.
5. *Golestanian R., Khajehpour M.R.H., Mansouri R.* // Class. Quantum Grav. 1995. **12**. P.273.
6. *Mansouri R., Sexl R.*// Gen. Rel. Grav. 1977. **8**. P.496, 515, 809.

Поступила в редакцию 13.09.96

УДК 517.9

РАСЧЕТ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНАХ ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Г.Н.Медведев, Б.И.Моргунов

(кафедра математики)

Рассматриваются тепловые и механические процессы, возникающие при локальных тепловых воздействиях на пластины из материала, который может быть как однородным, так и неоднородным. В последнем случае свойства материала существенно меняются по координате, соответствующей толщине пластины. Внешние тепловые возмущения сосредоточены в малой области и имеют значительную величину. Для определения температуры и вектора перемещений применяется асимптотическая методика.

Система уравнений, описывающая тепловые и механические процессы в неоднородном материале, берется в виде [1]:

$$k\Delta_r T + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) = c\frac{\partial T}{\partial t} - q + \theta b\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\lambda}{r}u - bT\right) +$$

$$+\frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}u\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z} + \mu\frac{\partial w}{\partial r}\right) = \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial r} + \nu\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\lambda}{r}u - bT\right) = \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Здесь T - температура, u и w - компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}=\{u,0,w\}$ (задача, по предположению, аксиально-симметричная).

Коэффициент теплопроводности k, теплоемкость c, коэффициент температурных напряжений b, коэффициенты Ламе λ и μ ($\nu=\lambda+2\mu$) и плотность γ существенно изменяются в направлении оси Oz (зависят от $\zeta=z/\varepsilon$). Плотность внешних источников тепла $q=(1/\varepsilon)f(\rho,z,t)$, где $\rho=r/\sqrt{\varepsilon}$, $\Delta_r\equiv(1/r)(\partial/\partial r)(r(\partial/\partial r))$ - радиальная часть оператора Лапласа. Таким образом, малый параметр ε характеризует "малую" площадь области "сильного" теплового воздействия, и этим же параметром ε описывается "сильная" неоднородность материала вдоль координаты $\zeta=z/\varepsilon$.

В таких предположениях строятся асимптотические выражения для температуры T и компонент u и w вектора перемещений.

Выполним в (1) асимптотическое преобразование [2,3], удерживая члены до порядка ε включительно:

$$\begin{aligned} &T \approx \bar{T}_0(\rho, z, t) + \varepsilon T_2(\rho, z,\zeta, t),\\ &u \approx \sqrt{\varepsilon}\,\bar{u}_1(\rho, z, t), \qquad (2)\\ &w \approx \bar{w}_0(z, t) + \sqrt{\varepsilon}\,\bar{w}_1(z, t) + \varepsilon w_2(\rho, z,\zeta, t).\end{aligned}$$

Функции $\overline{T}_0$, $\overline{w}_k$ (k =0;1) удовлетворяют уравнениям:

$$\langle k\rangle\, \Delta_\rho \overline{T}_0 = -f,$$

$$\hat{\nu}\, \frac{\partial^2 \overline{w}_k}{\partial z^2} = \langle\gamma\rangle \frac{\partial^2 \overline{w}_k}{\partial t^2}, \quad k=0;\ 1. \tag{3}$$

В (3) и далее $\langle\varphi\rangle$ означает осреднение φ по ζ, а $\hat{\varphi} = \langle\varphi^{-1}\rangle^{-1}$.

Для функции $\overline{u}_1$ получается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\left(\langle\nu\rangle + \hat{\nu}\left\langle\frac{\lambda}{\nu}\right\rangle^2 - \left\langle\frac{\lambda^2}{\nu}\right\rangle\right)\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho\overline{u}_1}{\partial\rho} - \left(\langle b\rangle + \hat{\nu}\left\langle\frac{\lambda}{\nu}\right\rangle\left\langle\frac{b}{\nu}\right\rangle - \left\langle\frac{b\lambda}{\nu}\right\rangle\right)\overline{T}_0\right] = 0. \tag{4}$$

Функция T_2 имеет вид

$$T_2(\rho, z, \zeta, t) = \overline{T}_2(\rho, z, t) + \Theta_2(\rho, z, \zeta, t),$$

где $\overline{T}_2$ удовлетворяет уравнению

$$\langle k\rangle\, \Delta_\rho \overline{T}_2 = -F_1, \tag{5}$$

$$F_1 = \left(\hat{k} - \langle k\rangle + \hat{k}\left\langle\frac{\{k\}}{k}\right\rangle\right)\Delta_\rho \frac{\partial \overline{T}_0}{\partial z} + \left\langle k\left\{\frac{\hat{k}}{k}\left\langle\frac{\{k\}}{k}\right\rangle - \frac{\{k\}}{k}\right\}\right\rangle \Delta^2_\rho \overline{T}_0 + \hat{k}\,\frac{\partial^2 \overline{T}_0}{\partial z^2} -$$
$$-\langle c\rangle\,\frac{\partial \overline{T}_0}{\partial t} - \theta\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\langle b\rangle + \hat{\nu}\left\langle\frac{b}{\nu}\right\rangle\left\langle\frac{\lambda}{\nu}\right\rangle - \left\langle\frac{b\lambda}{\nu}\right\rangle\right)\frac{\partial\rho\overline{u}_1}{\partial\rho} + \right. \tag{6}$$
$$\left. + \hat{\nu}\left\langle\frac{b}{\nu}\right\rangle\frac{\partial \overline{w}_0}{\partial z} + \left(\hat{\nu}\left\langle\frac{b}{\nu}\right\rangle^2 - \left\langle\frac{b^2}{\nu}\right\rangle\right)\overline{T}_0\right]$$

и

$$\Theta_2 = \left\{\frac{\hat{k}}{k} - 1\right\}\frac{\partial \overline{T}_0}{\partial z} + \left\{\frac{\hat{k}}{k}\left\langle\frac{\{k\}}{k}\right\rangle - \frac{\{k\}}{k}\right\}\Delta_\rho \overline{T}_0. \tag{7}$$

В (6),(7) и далее $\{\varphi\} = \int\tilde{\varphi}\, d\zeta - \langle\int\tilde{\varphi}\, d\zeta\rangle$, $\tilde{\varphi} = \varphi - \langle\varphi\rangle$.
Аналогично w_2 имеет вид

$$w_2(\rho, z, \zeta, t) = \overline{w}_2(\rho, z, t) + W_2(\rho, z, \zeta, t),$$

где $\overline{w}_2$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\mu}\,\Delta_\rho \overline{w}_2 = -F_2, \tag{8}$$

$$F_2 = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\left(\hat{\mu}\,\frac{\partial\overline{u}_1}{\partial z} + \langle\mu\,(C(\zeta) + \{A(\zeta)\})\rangle\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho\overline{u}_1}{\partial\rho}\right) - \langle\mu\,(D(\zeta) + \{B(\zeta)\})\rangle\,\frac{\partial\overline{T}_0}{\partial\rho}\right)\right] -$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[\langle\lambda + \nu A(\zeta)\rangle\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho\overline{u}_1}{\partial\rho} + \langle b + \nu B(\zeta)\rangle\,\overline{T}_0\right],$$

$$A(\zeta) = \frac{\hat{\nu}}{\nu}\left\langle\frac{\lambda}{\nu}\right\rangle - \frac{\lambda}{\nu}, \qquad B(\zeta) = \frac{\hat{\nu}}{\nu}\left\langle\frac{b}{\nu}\right\rangle - \frac{b}{\nu},$$

$$C(\zeta) = -\left\{\frac{\hat{\nu}}{\nu}\left\langle\frac{\lambda}{\nu}\right\rangle - \frac{\lambda}{\nu}\right\} + \frac{\hat{\mu}}{\mu}\left\langle\frac{1}{\mu}\left\{\hat{\nu}\,\frac{\lambda}{\nu}\left\langle\frac{\lambda}{\nu}\right\rangle - \frac{\lambda^2}{\nu}\right\}\right\rangle -$$
$$-\frac{1}{\mu}\left\{\hat{\nu}\,\frac{\lambda}{\nu}\left\langle\frac{\lambda}{\nu}\right\rangle - \frac{\lambda^2}{\nu}\right\} + \frac{\hat{\mu}}{\mu}\left\langle\frac{1}{\mu}\{\tilde{\nu}\}\right\rangle - \frac{1}{\mu}\{\tilde{\nu}\},$$

$$D(\zeta) = -\left\{\frac{\hat{\nu}}{\nu}\left\langle\frac{b}{\nu}\right\rangle - \frac{b}{\nu}\right\} + \frac{\hat{\mu}}{\mu}\left\langle\frac{1}{\mu}\left\{\hat{\nu}\,\frac{\lambda}{\nu}\left\langle\frac{b}{\nu}\right\rangle - \frac{b\lambda}{\nu}\right\}\right\rangle +$$
$$+\frac{1}{\mu}\left\{\hat{\nu}\,\frac{\lambda}{\nu}\left\langle\frac{b}{\nu}\right\rangle - \frac{b\lambda}{\nu}\right\} + \frac{\hat{\mu}}{\mu}\left\langle\frac{1}{\mu}\{\tilde{b}\}\right\rangle - \frac{1}{\mu}\{\tilde{b}\},$$

и

$$W_2 = -\left\{\frac{\hat{\nu}}{\nu} - 1\right\}\frac{\partial\overline{w}_0}{\partial z} + \{A(\zeta)\}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho\overline{u}_1}{\partial\rho} - \{B(\zeta)\}\overline{T}_0.$$

В заключение заметим, что осредненные уравнения (3), (5), (8) и уравнение (4) интегрируются в квадратурах. Вид конкретных решений этих уравнений определяется граничными условиями соответствующих задач.

Литература

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М., 1971.
2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.
3. *Медведев Г.Н., Моргунов Б.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. №2. С.89 (Moscow University Phys. Bull. 1966. №2).

Поступила в редакцию
18.10.96