УДК 530.145

К ВОПРОСУ О ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОНА В ИМПУЛЬСНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

А.Е.Лобанов

(кафедра теоретической физики)

Проведено исследование уравнения Дирака–Паули для электрона в плосковолновом поле. Получены точные решения этого уравнения для полей специального вида.

В современной физике высоких энергий особый интерес представляет исследование влияния аномального магнитного момента (АММ) фермичастиц на процессы их взаимодействия. При этом важно точно учесть воздействие внешнего поля, что дает возможность предсказывать нетривиальные физические явления. Необходимым этапом в таком подходе является построение решений уравнения Дирака–Паули для полей различной конфигурации.

Одной из наиболее интересных задач является исследование квантовых процессов в плосковолновых полях, чему посвящено достаточно много работ. Соответствующие решения уравнения Дирака–Паули, в котором феноменологически учитывается наличие у частиц АММ, известны давно [1, 2]. Однако в работах [1, 2] рассматривались волновые функции частиц в монохроматической плоской волне, и лишь в статьях [3, 4] изучались поля, являющиеся произвольной функцией фазы. В настоящей работе получены решения уравнения Дирака–Паули для более широкого класса таких полей.

Выберем потенциал плосковолнового поля в виде

$$A^\mu = a_1^\mu A_1(\varphi) + a_2^\mu A_2(\varphi), \qquad \varphi = (nx). \tag{1}$$

В базисных векторах $n^\mu = (1, \mathbf{n})$, $a_i^\mu = (0, \mathbf{a}_i)$, $\mathbf{n}$ – волновой вектор, а $\mathbf{a}_i$ – орты поперечной поляризации. При таком выборе потенциала уравнение Дирака–Паули записывается следующим образом:

$$(\hat{p} - e\hat{A} - i\mu\hat{n}\hat{A} - m)\Psi(x) = 0. \tag{2}$$

Здесь μ – АММ, $p^\mu = i\,\partial/\partial x_\mu$, $\dot{A}^\mu \equiv dA^\mu/d\varphi$ ($\hbar = c = 1$).

Как показано в работе [3], ковариантная форма решения данного уравнения имеет вид

$$\Psi(x) = \left(1 + e\frac{\hat{n}\hat{A}(\varphi)}{2(pn)}\right) T(p;\varphi,\varphi_0) \times$$

$$\times \exp\left\{-i\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \left[e\frac{(pA)}{(pn)} - e^2\frac{A^2}{2(pn)}\right]\right\} \cdot \Psi_0(x), \tag{3}$$

где $\Psi_0(x)$ – любое решение уравнения $(\hat{p} - m)\Psi_0(x) = 0$. Оператор

$$T(p;\varphi,\varphi_0) = Y_+F_- + Y_-F_+ - Z_+F_-F_+ - Z_-F_+F_-,$$

в котором

$$F_\pm = \frac{1}{4(pn)}(\hat{p}\hat{n}\hat{a}_\pm + \hat{n}\hat{a}_\pm\hat{p}), \quad a_\pm = a_1 \pm ia_2,$$

а функции $Y_\pm \equiv Y_\pm(\varphi,\varphi_0)$, $Z_\pm \equiv Z_\pm(\varphi,\varphi_0)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{Y}_\pm = \mu\dot{A}_\pm Z_\mp, \\ \dot{Z}_\pm = -\mu\dot{A}_\pm Y_\mp \end{cases} \tag{4}$$

$$(A_\pm = A_1(\varphi) \pm iA_2(\varphi)),$$

и соотношениям

$$Y_\pm(\varphi_0,\varphi_0) = 0, \qquad Z_\pm(\varphi_0,\varphi_0) = 1, \tag{5}$$

описывает прецессию спина частицы, обусловленную наличием АММ. Таким образом, задача построения решения уравнения (2) сводится к решению системы уравнений (4).

Данная система уравнений обладает очевидным свойством: если $Y_\pm(\varphi)$, $Z_\pm(\varphi)$ – решения системы (4) при $A_\pm = A_\pm(\varphi)$, то $Y_\pm(f(\varphi))$, $Z_\pm(f(\varphi))$ – решения системы при $A_\pm = A_\pm(f(\varphi))$, где $f(\varphi)$ – произвольная дифференцируемая функция. Отметим, что если $f(\varphi)$ – действительная функция, то $Z_- = Z_+^*$, $Y_- = Y_+^*$ вследствие вещественности начальных условий (5).

Выберем калибровку потенциала $A^\mu(\varphi_0) = 0$, т.е.

$$A_\pm = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \dot{A}_\pm\, d\varphi,$$

и введем переменные $x_\pm = \mu A_\pm + \xi_\pm$, где $\xi_\pm$ – комплексные параметры, выбор которых ясен из дальнейшего. В этих переменных система уравнений (5) может быть приведена к двум уравнениям второго порядка в комплексной области

$$\frac{d^2}{dx_\pm^2}L_\pm + \frac{\dot{x}_\mp}{\dot{x}_\pm}L_\pm = 0, \tag{6}$$

в которых отношение $\dot{x}_\mp/\dot{x}_\pm$ необходимо рассматривать как функцию x_+(или x_-). Решения уравнений (6):

$$L_\pm(x_\pm,\xi_\pm) = Y_\pm, \quad \text{если } L_\pm(\xi_\pm,\xi_\pm) = 0,$$

$$L_\pm(x_\pm,\xi_\pm) = Z_\pm, \quad \text{если } L_\pm(\xi_\pm,\xi_\pm) = 1.$$

Обозначим по традиции $\dot{x}_-/\dot{x}_+ = I(x_+)$. Считая $I(x_+)$ аналитической функцией, получим важное ограничение на ее вид. Поскольку $(x_-/x_+)^* = x_+/x_- = (x_-/x_+)^{-1}$, то

$$I(x_+)\, I^*(x_-) = 1. \tag{7}$$

По определению $\dot{x}_- = I(x_+)\,\dot{x}_+$.

Отсюда

$$x_- = \int_{\xi_+}^{x_+} I(x_+)\, dx_+ + \xi_- \equiv R(x_+).$$

Из (7) имеем $I(x_+)\, I^*(R(x_+)) = 1$.

Так как $I(x_+) = \dfrac{dR}{dx_+}$, то $\dfrac{dR}{dx_+} I^*(R(x_+)) = 1$.

Следовательно,

$$\int_{R(\xi_+)}^{R(x_+)} I^*(R)\, dR = x_+ - \xi_+ .$$

Таким образом, инвариант уравнения (6) является производной от функции, обратной себе самой (с точностью до комплексного сопряжения):

$$R^*(R(x_+)) = x_+. \tag{8}$$

Естественно, данным свойством обладают инварианты уравнений, которые получаются при исследовании случаев линейной и циркулярной поляризации поля (см. [3]). Для линейной поляризации

$$R(x_+) = s^i x_+, \tag{9}$$

а для циркулярной

$$R(x_+) = (s\, x_+)^{-1}, \tag{10}$$

где $s > 0$ – действительное число.

Однако решения уравнений (6) можно получить и в более общем случае. Действительно, свойством (8) обладает функция

$$R_0(x_+) = s^{\exp\{i(\theta+\pi)/2\}}\, x_+^{\exp\{i\theta\}}, \tag{11}$$

причем при $\theta = 0$ она переходит в (9), а при $\theta = \pi$ – в (10).

Решение уравнения (6) с инвариантом

$$I(x_+) = \frac{dR_0}{dx_+} = \exp\{i\theta\} \cdot s^{\exp\{i(\theta+\pi)/2\}}\, x_+^{\exp\{i\theta\}-1}$$

выражается (см. [5]) через цилиндрические функции аргумента

$$x_0 = 2\nu \exp\{i\theta/2\}\, s^{(1/2)\exp\{i(\theta+\pi)/2\}}\, x_+^{1/2\nu}, \tag{12}$$

где $\nu = (1/2)\,(1 - i\,\mathrm{tg}\,(\theta/2))$.

В силу соотношения (11) $x_0 = \dfrac{(x_+ R_0(x_+))^{1/2}}{\cos\theta/2}$ – действительная функция.

Учитывая начальные условия (5), получаем

$$\begin{aligned}
Y_+ &= N(x_+\xi_+)^{1/2}\{J_\nu(x_0)J_{-\nu}(\xi_0) - J_{-\nu}(x_0)J_\nu(\xi_0)\},\\
Z_+ &= N(x_+/\xi_+)^{1/2}(\xi_0/2\nu)\{J_{-\nu}(x_0)J_{\nu-1}(\xi_0) + J_\nu(x_0)J_{1-\nu}(\xi_0)\},\\
Y_- &= N(x_+\xi_+)^{-1/2}(x_0/2\nu)(\xi_0/2\nu)\{J_{1-\nu}(x_0)J_{\nu-1}(\xi_0) -\\
&\quad - J_{\nu-1}(x_0)J_{1-\nu}(\xi_0)\},\\
Z_- &= N(x_+/\xi_+)^{-1/2}(x_0/2\nu)\{J_{\nu-1}(x_0)J_{-\nu}(\xi_0) + J_{1-\nu}(x_0)J_\nu(\xi_0)\}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь J_ν – функции Бесселя, а $N = \dfrac{\pi\nu}{\sin(\pi\nu)}$.

Заметим, что если $\xi_0=0$, то в формулах (13) вторые слагаемые обращаются в нуль.

В предельных случаях (13) переходят в известные решения. При $\theta = 0$

$$Y_\pm = s^{\mp i/2}\sin(x_0-\xi_0), \qquad Z_\pm = \cos(x_0-\xi_0), \tag{14}$$

а при $\theta = \pi$

$$\begin{aligned}
Y_+ &= (1/2\delta)\,(x_+\xi_+)^{1/2}\{(x_+/\xi_+)^\delta - (\xi_+/x_+)^\delta\},\\
Z_+ &= (1/2\delta)\,(x_+/\xi_+)^{1/2}\{(\delta+1/2)\,(\xi_+/x_+)^\delta + (\delta-1/2)(x_+/\xi_+)^\delta\},\\
Y_- &= (1/2\delta)\,(s^2 x_+\xi_+)^{-1/2}\{(\xi_+/x_+)^\delta - (x_+/\xi_+)^\delta\},\\
Z_- &= (1/2\delta)(x_+/\xi_+)^{-1/2}\{(\delta+1/2)(x_+/\xi_+)^\delta + (\delta-1/2)(\xi_+/x_+)^\delta\},
\end{aligned} \tag{15}$$

где $\delta = (1/s + 1/4)^{1/2}$.

Эти выражения совпадают с формулами работы [3] после соответствующих переобозначений.

Литература

1. *Тернов И.М., Багров В.Г., Жуковский В.Ч.*// Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1966. №1. С.120 (Moscow University Phys. Bull. 1966. N1. P.21).
2. *Тернов И.М., Багров В.Г., Бордовицын В.А., Маркин Ю.А.* // ЖЭТФ. 1967. **52**. С.1584.
3. *Лобанов А.Е.* Препринт физ. ф-та МГУ №24. М., 1988.
4. *Вшивцев А.С., Жуковский В.Ч., Лобанов А.Е., Потапов Р.А.* // Ядерная физика. 1994. **57**. С.758.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976.

Поступила в редакцию
28.10.96