АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 533.6.011.72

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ФРОНТА ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПО ФОРМЕ ШЛИРЕН-СИГНАЛА

В.И.Иванов, Г.И.Сингаевская, Е.Н.Фоменко, Ф.В.Шугаев

(кафедра молекулярной физики и физических измерений; кафедра математики)

Разработана шлирен-методика исследования плотности в окрестности плоской ударной волны, учитывающая дифракцию лазерного пучка. Для плотности получено интегральное уравнение типа свертки, которое решается методом регуляризации Тихонова. Предлагаемая методика восстановления плотности применена для обработки данных, полученных в экспериментах с ударными волнами в низкотемпературной плазме, создаваемой ВЧ-разрядом в аргоне.

1. Шлирен-методика, предложенная в 1965 г. [1], использовалась в ряде работ для изучения кинетики в газах. Восстановление плотности в работах [1,2] основано на приближении геометрической оптики и ограничено случаем плавного изменения плотности. В частности, метод [1,2] не годится для исследования профиля плотности в окрестности фронта ударной волны, когда характерная длина много меньше диаметра светового пучка.

В работе [2] получено нелинейное интегральное уравнение для восстановления плотности по отклонению лазерного пучка на произвольной неоднородности. Решение его представляет собой некорректно поставленную задачу и наталкивается на значительные трудности.

В настоящей работе предлагается новый подход к задаче восстановления плотности газа по форме шлирен-сигнала. Для плотности получено линейное интегральное уравнение типа свертки, учитывающее дифракцию лазерного пучка и аппаратную функцию фотодиода. При обработке экспериментальных шлирен-сигналов это уравнение решается численно с помощью метода регуляризации Тихонова [3].

2. Исходим из следующих предположений.

1°. Газ в ударной трубе рассматривается как фазовый экран, причем дополнительный набег фазы $\Delta\varphi$ на неоднородности меньше $\pi/2$.

2°. Плотность газа за ударной волной в системе координат, связанной с волной, не зависит от времени: $\rho=\rho(x_1)$, $x_1=\eta+v_s t$, где v_s – скорость распространения ударной волны.

3°. Лазерный пучок считается гауссовым.

Рассмотрим дифракцию гауссова пучка на фазовом экране (рис. 1). Волновое уравнение в случае скалярного поля имеет вид

$$\Delta E-(1/c^2)(\partial^2 E/\partial t^2)=0,$$

где c – скорость света. Представим поле E в виде

$$E(x, y, z, t)=v(x, y, z)\exp(i\omega t),$$

$$v(x, y, z)=u(x, y, z)\exp(-ikz),\ k=2\pi/\lambda.$$

Используя приближение слабо меняющейся амплитуды ($\partial^2 u/\partial z^2 \ll k\partial u/\partial z$), имеем [4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2ik\frac{\partial u}{\partial z}=0. \qquad (1)$$

Решение этого параболического уравнения может быть записано с помощью функции Грина G:

$$u(x, y, z)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z-z_0, \xi, \eta)u_g(\xi, \eta, z_0)d\xi d\eta,$$

где u_g – значение функции u в плоскости $z=z_0$. В случае гауссова пучка, падающего на фазовый экран, u_g есть значение функции u непосредственно за фазовым экраном:

$$u_g(\xi, \eta, z_0)=-\sqrt{I_0}\,\frac{ip}{z_0-ip}\exp\left(ik\,\frac{\xi^2+\eta^2}{2(z_0-ip)}+i\Delta\varphi(\xi)\right)_{z_0=a},$$

$$p=kw_0^{\,2},$$

где ξ, η – координаты в плоскости фазового экрана, a – расстояние от лазера до ударной трубы (см. рис.1), w_0 – диаметр пучка в области перетяжки, I_0 – интенсивность пучка, $\Delta\varphi$ – набег фазы на фазовом экране. Функция Грина равна

$$G(x, y, z, \xi, \eta)=-\frac{ik}{2\pi z}\exp\{ik((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)/2z\}.$$

Таким образом, решение уравнения (1) в плос-

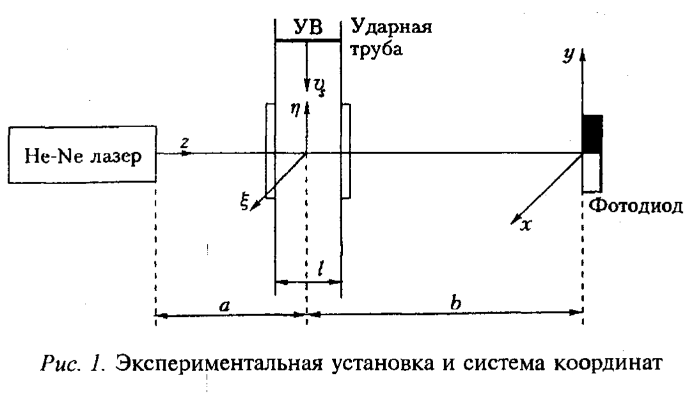


Рис. 1. Экспериментальная установка и система координат

кости фотодиода имеет вид

$$u(x, y, a+b) = -\sqrt{J_0}\,\frac{kp}{2\pi(a-ip)b}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{-A(\xi^2+\eta^2) -$$

$$-B(x-\xi)^2+(y-\eta)^2)+i\Delta\varphi(\eta)\}d\xi d\eta = c(x)\{u(y)+i\varepsilon(y)\},$$

$$c(x) = -\sqrt{J_0}\,\frac{|B|p}{\sqrt{\pi}(a-ip)\sqrt{A+B}}\,\exp[-ABx^2/(A+B)],$$

$$u_0(y) = \sqrt{\pi A_1 B_1/(A_1+B_1)}\,\exp(-y^2/(A_1+B_1)),$$

$$\varepsilon(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\Delta\varphi(\eta)\exp(-A\eta^2-B(y-\eta)^2)d\eta,$$

$$A = -ik/2(a-ip), \quad B = -ik/2b,$$

$$A_1 = 1/A, \quad B_1 = 1/B,$$

Величина b есть расстояние между ударной трубой и приемником (см. рис. 1).

До сих пор мы считали набег фазы $\Delta\varphi$ конечной величиной, меньшей $\pi/2$. Далее для простоты полагаем $|\Delta\varphi| \ll 1$. В этом случае $\exp(i\Delta\varphi)\approx 1+i\Delta\varphi$. В наших экспериментах $\Delta\varphi\cong 0{,}02$. Ошибка, которую мы совершаем, разлагая в ряд и ограничиваясь первым членом разложения, не превышает нескольких процентов.

Поток энергии, падающий на одну из секций фотодиода, равен

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{0}^{\infty}dy\,|c(x)|^2\,|u_0(y)+i\varepsilon(y)|^2.$$

Поток, падающий на другую секцию, равен

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{0}^{\infty}dy\,|c(x)|^2\,|u_0(y)+i\varepsilon(y)|^2.$$

Сигнал, снимаемый с фотодиода, пропорционален разности потоков:

$$V = \mathrm{const}(I_1 - I_2). \tag{2}$$

В нашем случае $|u_0+i\varepsilon|^2 = |u_0|^2 + 2\mathrm{Re}(i\varepsilon u_0^*)$, где u_0^* – комплексно сопряженная величина, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{0}|u_0|^2dy = \int\limits_{0}^{\infty}|u_0|^2dy$$

в силу четности функции u_0. Константа, входящая в выражение (2), находится из калибровочной кривой фотодиода.

Учитывая эти соображения, получаем окончательное выражение для шлирен-сигнала:

$$V(X) = \frac{2kk_{GD}l}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{(a+b)^2+p^2}}{a^2+p^2}\,\frac{dV}{d\zeta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta\rho(s)L(X-s)s, \tag{3}$$

$$L(X-s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}L_{\mathrm{opt}}(X-\tau)L_{\mathrm{ap}}(\tau-s)d\tau,$$

$$L_{\mathrm{opt}} = \mathrm{Im}\,(\exp(-t)^2(A+A^*)\mathrm{cerf}(-tv_s(A_1^*-B_1)/A_1^*B_1))),$$

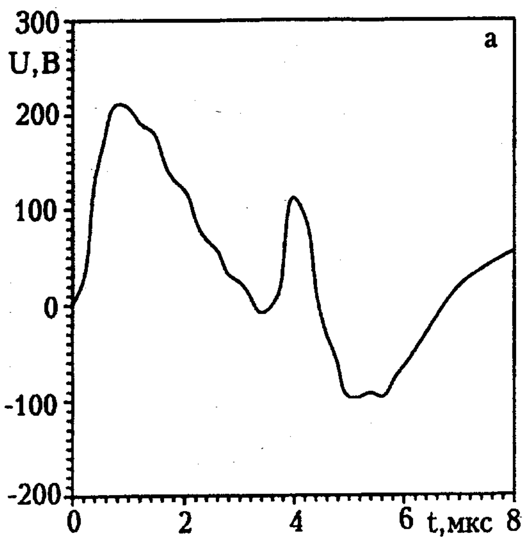
$$X = v_s t,$$

где L_{ap} – аппаратная функция фотодиода, $dV/d\zeta$ – калибровочная постоянная, ζ – величина смещения приемника, k_{GD} – постоянная Гладстона–Дэйла, l – ширина рабочей секции, ρ – плотность, cerf – интеграл ошибок. Аппаратная функция фотодиода была определена экспериментально.

3. Уравнение (3) может быть решено с помощью классического преобразования Фурье. Однако измеряемые величины определяются в эксперименте с некоторой погрешностью, что может значительно изменить решение $\rho(x)$. Более того, может оказаться, что уравнение (3) вообще не имеет решения. Мы имеем дело с некорректно поставленной задачей и для ее численного решения используем метод регуляризирующих функционалов Тихонова [3].

В процессе вычислений применяется преобразование Фурье. Это означает, что следует рассматривать периодические функции. Чтобы избежать искажений решения, мы создавали буферную зону, где значения шлирен-сигнала приравнивали нулю.

При выборе параметра регуляризации α использовались следующие соображения. При малых значениях α решение неустойчиво. При возрастании α решение сглаживается и становится устойчивым в пределах некоторого интервала значений α. Оптимальное значение α лежит внутри этого интервала. Дальнейшее повышение α приводит к сильному сглаживанию и искажению решения. На рис. 2, *а* по-



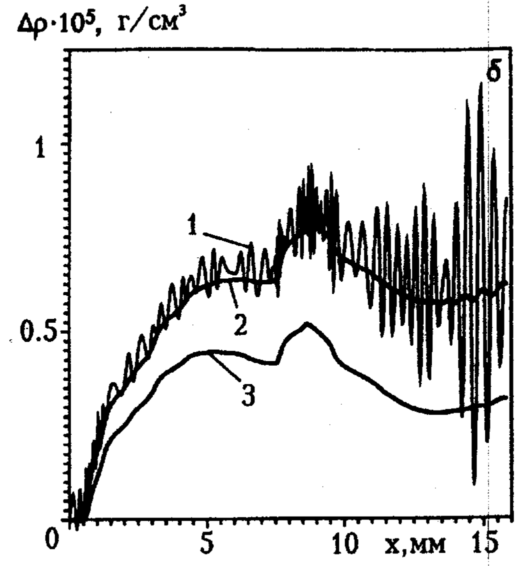


Рис. 2. Типичный шлирен-сигнал (*а*) и восстановленное по нему распределение плотности в окрестности фронта ударной волны (*б*); $\alpha=10^{-8}$ (*1*), $10^{-6}\div10^{-4}$ (*2*) и 10^{-2} (*3*)

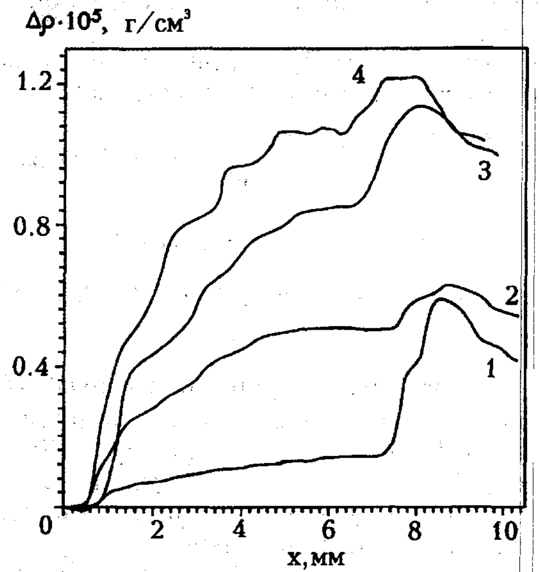


Рис. 3. Распределение плотности в аргоне при различных числах Маха: $M = 2{,}42$ (*1*); 3 (*2*); 3,25 (*3*) и 3,4 (*4*)

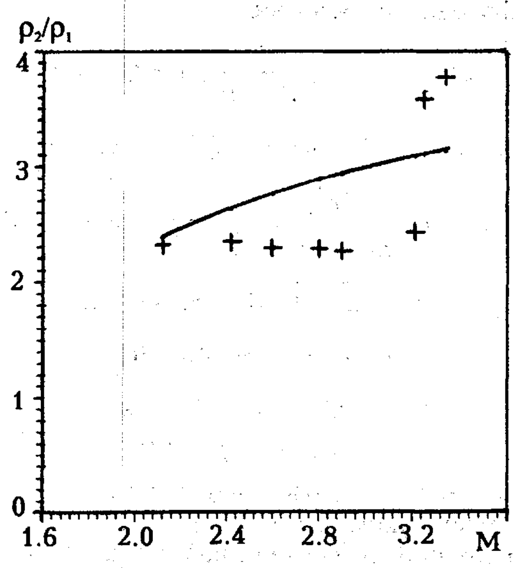


Рис. 4. Отношение плотностей в аргоне при различных числах Маха (сплошная линия – расчет, крестики – эксперимент)

казан типичный шлирен-сигнал, а на рис. 2, *б* – восстановленные значения плотности при разных значениях параметра регуляризации α. При $\alpha = 10^{-8}$ решение обнаруживает хаотические пульсации, при $10^{-6} \leqslant \alpha \leqslant 10^{-4}$ решение устойчиво (именно эти значения использовались при обработке экспериментальных данных). При $\alpha = 10^{-2}$ вид решения искажается.

4. Эксперименты выполнены в однодиафрагменной ударной трубе прямоугольного сечения 40×60 мм с диэлектрической рабочей секцией, снабженной оптическими окнами диаметром 60 мм. Две металлические пластины были смонтированы на верхней и нижней стенках секции. Между пластинами создавался поперечный ВЧ-разряд с помощью ВЧ-генератора ($f = 13{,}6$ МГц). Плотность тока составляла 40 мА/см², длина зоны разряда – 80 мм. Для измерения плотности в окрестности фронта волны и за волной использована лазерная шлиренметодика. Источником света служил гелий-неоновый лазер. Пучок лазера диаметром 1 мм падал на секционированный фотодиод, сигнал с которого поступал на осциллограф типа С9-8. Скорость ударной волны измерялась с помощью пьезодатчиков вне зоны разряда и с помощью шлирен-сигналов внутри нее. Начальная поступательная температура найдена по значениям плотности, измеренным с помощью интерферометра Фабри-Перо.

Для калибровки фотодиода мы перемещали его вдоль прямой, перпендикулярной оси лазерного пучка. Таким образом была получена калибровочная кривая – зависимость напряжения на фотодиоде от расстояния между осью лазерного пучка и центром фотодиода.

На рис. 3 приведено распределение плотности в окрестности фронта ударной волны в низкотемпературной плазме ВЧ-разряда при различных значениях числа Маха. Начальная температура составляла 1100 К, начальное давление – 8 Торр.

Ударная волна в области разряда имеет двухступенчатую структуру, а ширина зоны ударного перехода значительно превышает толщину волны в отсутствие разряда.

На рис. 4 сравниваются экспериментальные значения и расчетная кривая отношения плотностей при переходе через ударную волну. Расчет выполнен по обычным соотношениям для ударной волны без учета выделения энергии за фронтом волны. В качестве экспериментального использовалось максимальное значение плотности за волной. Видно, что эксперимент хорошо согласуется с расчетом. В молекулярном газе (CO_2) такого соответствия не наблюдается [5]: экспериментальные значения оказываются приблизительно в 2 раза ниже расчетных.

Таким образом, разработан метод расчета плотности в окрестности фронта ударной волны по форме шлирен-сигнала. Обработка экспериментальных данных по предложенному методу показала, что ударная волна в низкотемпературной плазме ВЧ-разряда имеет двухступенчатую структуру. Обнаружено, что толщина ударной волны в зоне разряда значительно выше, чем в невозбужденном газе.

Литература

1. *Kiefer J.H., Lutz R.W.* //Phys.Fluids. 1965. **8**. P. 1393.
2. *Kiefer J.H., Hajduk J.C.* //Proc. 12th Int. Symp. on Shock Waves and Tubes. Jerusalem, 1980. P. 97.
3. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М., 1990.
4. *Звелто О.* Принципы лазеров. М., 1981.
5. *Bystrov S.A., Fomenko E.N., Shugaev F.V., Shved G.I.* // Proc. 19th Int. Symp. on Shock Waves. Vol. II. Marseille, 1995. P. 391.

Поступила в редакцию
18.10.96