где введены обозначения

$$A=\sqrt{\left(1-\frac{q_3}{E_\nu}\right)\left(1+\zeta_\nu\frac{m_\nu}{E_\nu^\perp}\right)},$$

$$B=\sqrt{\left(1+\frac{q_3}{E_\nu}\right)\left(1-\zeta_\nu\frac{m_\nu}{E_\nu^\perp}\right)},$$

$-e$ – заряд электрона, $(E_\nu, \mathbf{q})$ – 4-импульс нейтрино, а $\zeta_\nu=\pm1$ определяет ориентацию спина нейтрино вдоль и против направления поля соответственно.

Пусть ультрарелятивистское нейтрино движется перпендикулярно к направлению магнитного поля напряженности $H\ll M_W^2/e\cong10^{24}$ Гс. Рассмотрим два предельных случая, интересных для астрофизических приложений:

$$\mu=0,\ \sqrt{eH}\ll T\ll M_W\ll E_\nu\ll M_W^2/T \tag{3}$$

– случай горячей электронно-позитронной плазмы в слабом магнитном поле, который не рассматривался в [5], и

$$T\to0,\ \sqrt{eH}\ll\mu\ll M_W\ll E_\nu\ll M_W^2/\mu \tag{3}$$

– случай полностью вырожденного электронного газа в неквантующем магнитном поле, тогда химический потенциал $\mu\cong\sqrt{m_e^2+(3\pi^2n_e)^{2/3}}$, где n_e – концентрация электронов.

Общее выражение (2) для вклада в радиационный сдвиг энергии нейтрино за счет эффектов конечных значений температуры и плотности среды в указанных двух случаях имеет следующие асимптотики:

$$\Delta E_\nu(T,H)=-\frac{7}{30}\frac{\pi^2}{\sqrt2}G_F\frac{T^4}{M_W^2}E_\nu-\zeta_\nu H\Delta\mu_\nu(T)$$

при выполнении условий (3) и

$$\Delta E_\nu(n_e,H)=\sqrt2\,n_eG_F-\zeta_\nu H\Delta\mu_\nu(n_e),$$

когда выполнены условия (4). Здесь $\Delta\mu_\nu(T)$ и $\Delta\mu_\nu(n_e)$ – поправки к величине магнитного момента нейтрино, вносимые средой:

$$\Delta\mu_\nu(T)=\frac{8}{9}\frac{T^2}{M_W^2}\mu_\nu^{(0)}, \tag{5}$$

$$\Delta\mu_\nu(n_e)=-\frac{16}{3}\frac{(3\pi^2n_e)^{1/3}}{E_\nu}\mu_\nu^{(0)}. \tag{6}$$

Заметим, что в работах [5,7] индуцированный магнитный момент нейтрино определяется для покоящегося нейтрино, т. е. согласно формуле

$$\mathrm{Re}\,\Delta E_\nu(\zeta,H,\Delta\mu_\nu)=-\frac{m_\nu}{E_\nu}\zeta H\Delta\mu_\nu.$$

В этом случае в (6) следует положить $E_\nu=m_\nu$, тогда соответствующий вклад в магнитный момент оказывается значительным [5,7]. Для релятивистского нейтрино численные оценки (5) и (6) показывают, что поправка к величине магнитного момента нейтрино за счет его взаимодействия с частицами среды мала по сравнению с (1) (это следует из неравенств (3) и (4) соответственно) и имеет разные знаки в рассмотренных нами предельных случаях.

Авторы выражают глубокую благодарность В.Ч.Жуковскому и А.В.Борисову за обсуждение результатов работы.

Литература

1. *Бом Ф., Фогель П.* Физика массивных нейтрино. М., 1990.
2. *Волошин М.Б., Высоцкий М.И., Окунь Л.Б.* // ЖЭТФ. 1986. **91**, №3. С. 754.
3. Partical Data Group: Barnett R. M. et al. // Phys. Rev. 1996. **54**, N1 (part 1). P. 1.
4. *Fukugita M., Yanagida T.*//Phys. Rev. Lett. 1987. **58**. P. 1807.
5. *Жуковский В.Ч., Шония Т.Л., Эминов П.А.* // ЖЭТФ. 1993. **104**. С. 3269.
6. *Борисов А.В., Жуковский В.Ч., Курилин А.В., Тернов А.И.* // Ядерная физика. 1985. **41**, №3. С. 743.
7. *Ораевский В.Н., Семикоз В.Б., Смородинский Я.А.*// ЭЧАЯ. 1994. **25**, вып. 2. С. 313; *Семикоз В.Б.* // Ядерная физика. 1987. **46**, N5. С. 1592.

Поступила в редакцию
04.11.96

УДК 523.11

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА ПРОСТРАНСТВЕ $E_{D-2}\times V_2$

Ю.В. Грац, А.Б. Лаврентьев

(кафедра теоретической физики)

Исследуется возможность приближенного вычисления функции Грина уравнения Пуассона на пространстве $E_{D-2}\times V_2$, а также ее регуляризированного значения в пределе совпадающих точек.

В теории поля вычисление локальных наблюдаемых связано с вычислением функции Грина и ее производных в пределе совпадающих точек. Как известно, уже в пространстве Минковского соответствующие величины расходятся, и это приводит к необходимости использования той или иной процедуры регуляризации. Картина еще более усложняется при работе на искривленном пространственновременном фоне, поскольку отличие от нуля локальной кривизны приводит к появлению дополнительных ультрафиолетовых расходимостей [1].

В случае пространств с коническими особенностями ситуация становится еще более сложной, так как существование δ-образных особенностей у R делает невозможным использование разложения де Витта–Швингера. В случае локально-плоского пространства с одной конической особенностью задача все же может быть решена точно [2,3], поскольку наличие четырех векторов Киллинга позволяет провести разделение переменных в волновом уравнении. Однако введение дополнительных особенностей и, как следствие, потеря осевой симметрии меняют ситуацию коренным образом.

Выход, по всей видимости, заключается в использовании методов теории возмущений, и некоторые предварительные результаты рассмотрения нелокальных эффектов на мультиконических пространствах уже были получены нами ранее [3,4]. Однако остается открытым вопрос о поведении ряда теории возмущений в высших порядках и, в частности, о его сходимости.

Рассмотрим риманово пространство $E_{D-2}\times V_2$, которое представляет собой произведение $(D-2)$-мерного евклидова пространства на двумерную риманову поверхность. Интервал длины такого пространства может быть представлен в виде

$$ds^2 = \sum_{\mu=3}^{D} dx_\mu^2 + e^{-\Omega(x_c)}\,\delta_{ab}\,dx_a\,dx_b \quad (a,b,c\ldots=1,2). \quad (1)$$

Здесь мы воспользовались тем, что двумерная риманова поверхность локально-конформна евклидовой плоскости. При нашем выборе координат уравнение Пуассона для функции Грина на пространстве (1) имеет вид

$$(\Delta_D + \hat{V})\,G_E = -\delta^{(D)}(x-x'), \quad (2)$$

где Δ_D – оператор Лапласа, $\Delta_D = \sum_{\mu=3}^{D} \partial_\mu^{\,2}$ а

$$\hat{V}(x) = -F(x_c)\sum_{\mu=3}^{D}\partial_\mu^2, \qquad F(x_c) = 1 - e^{-\Omega(x_c)}.$$

Рассмотрим N-й член формального ряда теории возмущений для решения уравнения (2):

$$G = G_0 + G_0\hat{V}G_0 + \ldots + G_0\hat{V}G_0\ldots\hat{V}G_0 + \ldots, \quad (3)$$

где G_0 – функция Грина на евклидовом D-мерном пространстве. Записывая G_0 в виде интеграла Фурье, получим

$$G_N(x,x') =$$

$$= \int\frac{d^2q_1}{(2\pi)^2}\,e^{iq_1x'}F(q_1)\ldots\int\frac{d^2q_N}{(2\pi)^2}\,e^{iq_Nx'}F(q_N)\,I_N^D(\{q\};x,x'), \quad (4)$$

где

$$I_N^D(\{q\};x,x') \equiv \int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\,\frac{e^{ik(x-x')}(k_\parallel^2)^N}{k^2(k+Q_1)^2\cdot\ldots\cdot(k+Q_N)^2}, \quad (5)$$

$k_\parallel^2 = \sum_{\mu=3}^{D} k_\mu^2$, $\mathbf{Q}_i = \sum_{j=1}^{i}\mathbf{q}_j$, $\mathbf{q}_j = (q_{1j}, q_{2j})$, а $F(q_i)$ - фурье-образ $F(x)$.

Заметим, что при D=2 следует положить $k_\parallel$ равным нулю. Это означает, что все члены ряда (3), начиная со второго, обращаются в нуль, и при выборе конформных координат функция Грина на V_2 по виду совпадает с функцией Грина на евклидовой плоскости (см. также [2,4]).

В нашем подходе вычисление регуляризованного значения $G_{\rm reg}(x,x)$ сводится к нахождению регуляризованного значения интеграла $I_N^D(\{q\};x,x) = I_N^D(\{q\})$. Вводя интегрирование по феймановским параметрам, представим $I_N^D(\{q\})$ в виде

$$I_N^D(\{q\}) = N!\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\,(k_\parallel^2)^N\times$$

$$\times\int_0^1 d\{z_n\}\,\frac{1}{[k^2z_0 + (k+Q_1)^2z_1 + \ldots + (k+Q_N)^2z_n]^{N+1}}, \quad (6)$$

где $d\{z_n\} = dz_0\ldots dz_N\cdot\delta(1-\sum_{i=0}^{N} z_i)$. Произведя в (6) замену переменных $k\to k-\sum_{i=0}^{N} z_i\,Q_i$ и интегрируя по угловым переменным, преобразуем выражение (6) к виду

$$I_N^D(\{q\}) = \int_0^\infty\frac{dk_\perp k_\perp}{2\pi}\times\int_0^\infty\frac{(k_\parallel^2)^{D/2-2+N}\,d(k_\parallel^2)}{\Gamma(D/2-1)(4\pi)^{D/2-1}}\times$$

$$\times N!\int_0^1 dz_1\int_0^{1-z_1} dz_2\ldots\int_0^{1-z_1-\ldots-z_{N-1}} dz_N\,\frac{1}{[k^2+A_N]^{N+1}}, \quad (7)$$

где

$$k_\perp = (k_1^2+k_2^2)^{1/2}, \quad A_N = \sum_{i=1}^{N} z_i(\mathbf{Q}_i)^2 - (\sum_{i=1}^{N} z_i\mathbf{Q}_i)^2.$$

Далее интегрирование удобно проводить в новых переменных k, θ:

$$k^2 = k_\perp^2 + k_\parallel^2, \quad k\sin\theta = k_\perp, \quad k\cos\theta = k_\parallel.$$

Тогда после вычисления интеграла по θ выражение (7) приобретает вид

$$I_N^D(\{q\}) = \frac{N!}{(2\pi)(4\pi)^{D/2-1}\Gamma(D/2-1)(D-2+2N)}\times$$

$$\times\int_0^1 dz_1\ldots\int_0^{1-z_1-\ldots-z_{N-1}} dz_N\int_0^\infty d(k^2)\,\frac{(k^2)^{D/2-1+N}}{(k^2+A_N)^{N+1}}.$$

После того как интеграл I_N^D записан в таком виде, для его вычисления можно использовать метод размерной регуляризации. Действительно, при $D<2$ он сходится и может быть преобразован к виду

$$I_N^D(\{q\}) = -\frac{\Gamma(2-D/2)\Gamma(D/2-1+N)}{(4\pi)^{D/2}\,\Gamma(D/2)}\times$$

$$\times\int_0^1 dz_1\int_0^{1-z_1} dz_2\ldots\int_0^{1-z_1-\ldots-z_{N-1}} dz_N\,A_N^{D/2-1}. \quad (8)$$

Полученное выражение допускает аналитическое продолжение в область $D\geqslant 2$. При этом при D=4,6,... возникает расходимость из-за наличия полюсов у $\Gamma(2-D/2)$. Таким образом, сингулярная часть интеграла (8) принимает вид полюса $(D-2k)^{-1}$, k=2,3,..., и выделение конечного вклада может осуществляться обычным для метода размерной регуляризации способом. Отдельно рассмотрим случай

D=2. При этом выражение (8) конечно и имеет особенно простой вид:

$$I_N(\{q\}) = -\frac{1}{4\pi N}. \qquad (9)$$

В результате N-й член ряда (3) при D=2 имеет вид

$$G_N(x,x) = -\frac{F^N(x)}{4\pi N}. \qquad (10)$$

Таким образом, при $|F(x)| < 1$ ряд суммируется, и мы получаем

$$G_{\text{reg}}(x,x) = \frac{1}{4\pi}\ln(1-F(x)) = -\frac{\Omega(x)}{4\pi}, \qquad (11)$$

что совпадает с результатом работ [2,4].

Мы видим, что при выборе на V_2 конформных координат теория возмущений в сочетании с методом размерной регуляризации приводит к рядам, каждый член которых хорошо определен. При D=2 ряд суммируется при любом виде конформного фактора, и найденное для $G_{\text{reg}}(x,x)$ выражение совпадает с выражением, полученным методом ковариантной раздвижки точек.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-02-180003).

Литература

1. *Биррелл Н.Д., Девис П.С.В.* // Квантованные поля на искривленном пространстве-времени. М.,1984.
2. *Grats Yu., Garcia A.*//Class. Quantum Grav. 1996. **13**. P.189.
3. *Гальцов Д.В., Грац Ю.В., Лаврентьев А.Б.* // Ядерная физика. 1995. **58**, №3. С. 570.
4. *Грац Ю.В., Лаврентьев А.Б.*// Изв. вузов, Физика. 1994. №9. С.99.

Поступила в редакцию 15.01.97

РАДИОФИЗИКА

УДК 621.3.09:621.373.1

НЕПОДВИЖНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С. В. Поляков, А. П. Сухоруков

(кафедра радиофизики)

Получены уравнения для огибающих неподвижных параметрических солитонов на основной и удвоенной частотах в периодически неоднородных средах. Выведены интегралы движения и найдено точное решение, описывающее пространственное распределение колебаний. Проанализированы условия формирования и свойства неподвижных солитонов.

Известно, что благодаря нелинейным эффектам в диспергирующих средах могут распространяться солитоны огибающей [1]. К настоящему времени достаточно хорошо изучены свойства солитонов в кубично-нелинейных средах. При этом особый интерес представляет формирование медленных солитонов на частотах, близких к границам области непропускания периодически неоднородных структур. В частности, распространение колебаний в запрещенной полосе частот возможно благодаря эффекту нелинейного туннелирования медленных солитонов [2,3].

В последние несколько лет все большее внимание привлекают параметрически связанные солитоны в средах с квадратичной нелинейностью. Их существование было предсказано в работах [4,5] и доказано в оптических экспериментах [6–8]. Оптическим параметрическим солитонам посвящено много работ, в том числе и обзоры [8–11]. Однако до сих пор почти не обсуждался вопрос о формировании и свойствах медленных параметрических солитонов в периодических структурах с квадратичной нелинейностью. Такое параметрическое взаимодействие можно реализовать, в частности, если частоты основной и второй гармоник находятся по разные стороны полосы непропускания. Данная работа посвящена анализу этого важного и интересного типа солитонов.

Рассмотрим колебания в цепочке контуров с одинаковыми резонансными частотами ω_0, асимметричными константами линейной связи α_1, α_2 и разными коэффициентами квадратичной нелинейности γ_1,γ_2. Такие колебания описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{2n} + \omega_0^2 x_{2n} + \gamma_2 x_{2n}^2 &= -\alpha_2\omega_0^2(2x_{2n} - x_{2n-1} - x_{2n+1}), \\ \ddot{x}_{2n+1} + \omega_0^2 x_{2n+1} + \gamma_1 x_{2n+1}^2 &= -\alpha_1\omega_0^2(2x_{2n+1} - x_{2n} - x_{2n+2}). \end{aligned} \qquad (1)$$

В линейном приближении можно выписать дисперсионное соотношение

$$(\omega/\omega_0)^2 = 1 + (\alpha_2+\alpha_1) \pm \sqrt{(\alpha_2+\alpha_1)^2 - 4\alpha_2\alpha_1\sin^2 ka},$$

связывающее частоту колебаний ω и волновое число k (рис. 1).

На дисперсионной кривой видны области пропускания и непропускания цепочки. В случае $\alpha_1<\alpha_2$