D=2. При этом выражение (8) конечно и имеет особенно простой вид:

$$I_N(\{q\}) = -\frac{1}{4\pi N}. \qquad (9)$$

В результате N-й член ряда (3) при D=2 имеет вид

$$G_N(x,x) = -\frac{F^N(x)}{4\pi N}. \qquad (10)$$

Таким образом, при $|F(x)| < 1$ ряд суммируется, и мы получаем

$$G_{\text{reg}}(x,x) = \frac{1}{4\pi}\ln(1-F(x)) = -\frac{\Omega(x)}{4\pi}, \qquad (11)$$

что совпадает с результатом работ [2,4].

Мы видим, что при выборе на V_2 конформных координат теория возмущений в сочетании с методом размерной регуляризации приводит к рядам, каждый член которых хорошо определен. При D=2 ряд суммируется при любом виде конформного фактора, и найденное для $G_{\text{reg}}(x,x)$ выражение совпадает с выражением, полученным методом ковариантной раздвижки точек.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-02-180003).

Литература

1. *Биррелл Н.Д., Девис П.С.В.* // Квантованные поля на искривленном пространстве-времени. М.,1984.
2. *Grats Yu., Garcia A.*//Class. Quantum Grav. 1996. **13**. P.189.
3. *Гальцов Д.В., Грац Ю.В., Лаврентьев А.Б.* // Ядерная физика. 1995. **58**, №3. С. 570.
4. *Грац Ю.В., Лаврентьев А.Б.*// Изв. вузов, Физика. 1994. №9. С.99.

Поступила в редакцию
15.01.97

РАДИОФИЗИКА

УДК 621.3.09:621.373.1

НЕПОДВИЖНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С. В. Поляков, А. П. Сухоруков

(кафедра радиофизики)

Получены уравнения для огибающих неподвижных параметрических солитонов на основной и удвоенной частотах в периодически неоднородных средах. Выведены интегралы движения и найдено точное решение, описывающее пространственное распределение колебаний. Проанализированы условия формирования и свойства неподвижных солитонов.

Известно, что благодаря нелинейным эффектам в диспергирующих средах могут распространяться солитоны огибающей [1]. К настоящему времени достаточно хорошо изучены свойства солитонов в кубично-нелинейных средах. При этом особый интерес представляет формирование медленных солитонов на частотах, близких к границам области непропускания периодически неоднородных структур. В частности, распространение колебаний в запрещенной полосе частот возможно благодаря эффекту нелинейного туннелирования медленных солитонов [2,3].

В последние несколько лет все большее внимание привлекают параметрически связанные солитоны в средах с квадратичной нелинейностью. Их существование было предсказано в работах [4,5] и доказано в оптических экспериментах [6-8]. Оптическим параметрическим солитонам посвящено много работ, в том числе и обзоры [8-11]. Однако до сих пор почти не обсуждался вопрос о формировании и свойствах медленных параметрических солитонов в периодических структурах с квадратичной нелинейностью. Такое параметрическое взаимодействие можно реализовать, в частности, если частоты основной и второй гармоник находятся по разные стороны полосы непропускания. Данная работа посвящена анализу этого важного и интересного типа солитонов.

Рассмотрим колебания в цепочке контуров с одинаковыми резонансными частотами ω_0, асимметричными константами линейной связи α_1, α_2 и разными коэффициентами квадратичной нелинейности γ_1,γ_2. Такие колебания описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{2n} + \omega_0^2 x_{2n} + \gamma_2 x_{2n}^2 &= -\alpha_2\omega_0^2(2x_{2n} - x_{2n-1} - x_{2n+1}), \\ \ddot{x}_{2n+1} + \omega_0^2 x_{2n+1} + \gamma_1 x_{2n+1}^2 &= -\alpha_1\omega_0^2(2x_{2n+1} - x_{2n} - x_{2n+2}). \end{aligned} \qquad (1)$$

В линейном приближении можно выписать дисперсионное соотношение

$$(\omega/\omega_0)^2 = 1 + (\alpha_2 + \alpha_1) \pm \sqrt{(\alpha_2 + \alpha_1)^2 - 4\alpha_2\alpha_1\sin^2 ka},$$

связывающее частоту колебаний ω и волновое число k (рис. 1).

На дисперсионной кривой видны области пропускания и непропускания цепочки. В случае $\alpha_1<\alpha_2$

нижняя ветвь расположена в интервале частот $\omega_0<\omega<\omega_c$, где $\omega_c=\omega_0(1+2\alpha_1)^{1/2}$ а верхняя – в области $\omega_b<\omega<\omega_a$, где $\omega_b=\omega_0(1+2\alpha_2)^{1/2}$ и $\omega_a=\omega_0(1+2\alpha_1+2\alpha_2)^{1/2}$.

В параметрическом солитоне связаны первая и вторая гармоники [4–5]. Для возбуждения неподвижного солитона необходимо, чтобы вторая гармоника имела частоту $\omega_2\approx\omega_a$ и волновое число $k_2=0$, а первая гармоника состояла бы из двух встречных волн на частоте $\omega_1=\omega_2/2$ с волновыми векторами $k_{11}=-k_{12}$ (см. рис. 1).

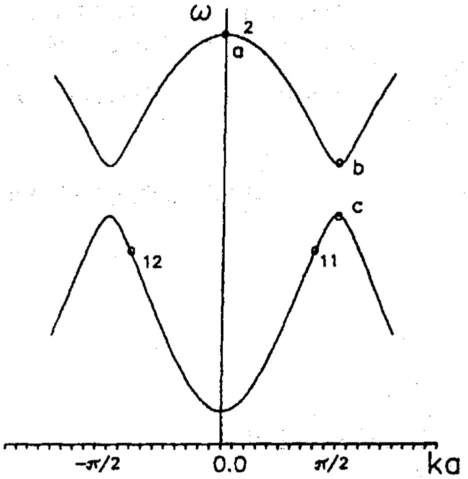

Рис. 1. Дисперсионная кривая для системы чередующихся связанных колебательных систем. Две волны основной частоты 11 и 12 с противоположно направленными волновыми векторами возбуждают неподвижную стоячую волну 2 удвоенной частоты

Перейдем теперь к описанию параметрического взаимодействия волновых пакетов, для чего положим

$$\begin{gathered}x_{2n}=0{,}5[b_{11}\exp(i\omega_1 t-2nik_{11}a)+b_{12}\exp(i\omega_1 t-2nik_{12}a)+\\+b_2\exp(i\omega_2 t)]+\text{к. с.},\\x_{2n+1}=0{,}5[B_{11}\exp(i\omega_1 t-(2n+1)ik_{11}a)+\\+B_{12}\exp(i\omega_1 t-(2n+1)ik_{12}a)+B_2\exp(i\omega_2 t)]+\text{к. с.}\end{gathered}\tag{2}$$

Здесь b, B – шесть медленно меняющихся во времени комплексных амплитуд колебаний на двух частотах в четных и нечетных контурах соответственно. При слабо нелинейных колебаниях можно найти связь между амплитудами B и b в соседних контурах на каждой из частот. Опуская выкладки, приводим конечные соотношения для нелокальной связи амплитуд в линейном приближении на частоте ω_2:

$$\begin{gathered}b_2=-(\alpha_2/\alpha_1)B_2+[\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)]a^2\frac{\partial^2 B_2}{\partial z^2},\\B_2=-(\alpha_1/\alpha_2)b_2+[\alpha_1/(\alpha_1+\alpha_2)]a^2\frac{\partial^2 b_2}{\partial z^2}.\end{gathered}\tag{3}$$

На частоте ω_1 связь амплитуд колебаний в соседних контурах имеет следующий вид:

$$b_1=-\mu_1 B_1+\mu_2\frac{\partial B_1}{\partial z}+\mu_3\frac{\partial^2 B_1}{\partial z^2},$$

$$B_1=-\eta_1 b_1+\eta_2\frac{\partial b_1}{\partial z}+\eta_3\frac{\partial^2 b_1}{\partial z^2},$$

где μ и η – константы, выражающиеся сложным образом через параметры периодической системы.

Подставляя в (1) выражение (2) с учетом соотношений (3), можно получить уравнения для медленно меняющихся амплитуд нераспространяющихся волн на основной и удвоенной частотах:

$$\begin{gathered}\frac{\partial B_2}{\partial t}=iD_2\frac{\partial^2 B_2}{\partial z^2}+i\beta_2 B_{11}B_{12},\\\frac{\partial B_{11}}{\partial t}+u_1\frac{\partial B_{11}}{\partial z}=iD_1\frac{\partial^2 B_{11}}{\partial z^2}+i\beta_1 B_{12}^*B_2,\\\frac{\partial B_{12}}{\partial t}-u_1\frac{\partial B_{12}}{\partial z}=iD_1\frac{\partial^2 B_{12}}{\partial z^2}+i\beta_1 B_{11}^*B_2,\end{gathered}\tag{4}$$

где u_1 – величина групповой скорости на основной частоте ω_1, D – коэффициент дисперсии, β – коэффициент нелинейности.

Аналогичные уравнения были исследованы в [9–12] для случая трехволновых взаимодействий в диспергирующей квадратично-нелинейной среде. Однако в рассматриваемом случае мы имеем дело с пространственной локализацией солитонов. Для (4) существует (см. [9,10]) интеграл движения I_3 в виде

$$\begin{gathered}I_3=\int\Bigg[\frac{D_1}{\beta_1}\left|\frac{\partial B_{11}}{\partial z}\right|^2+\frac{D_1}{\beta_1}\left|\frac{\partial B_{12}}{\partial z}\right|^2+\frac{D_2}{\beta_2}\left|\frac{\partial B_2}{\partial z}\right|^2-\\-B_{11}B_{12}B_2^*-B_{11}^*B_{12}^*B_2+\frac{iu_1}{2\beta_1}\times\\\times\left(B_{11}\frac{\partial B_{11}^*}{\partial z}-B_{11}^*\frac{\partial B_{11}}{\partial z}-B_{12}\frac{\partial B_{12}^*}{\partial z}+B_{12}^*\frac{\partial B_{12}}{\partial z}\right)\Bigg]\,\partial z.\end{gathered}$$

По знаку I_3 можно судить о наличии или отсутствии солитона. Заметим, что для (4) существуют также закон сохранения энергии и интеграл I_2, записываемый в виде

$$I_2=\int\left(B_{11}\frac{\partial B_{11}^*}{\partial z}+B_{11}^*\frac{\partial B_{11}}{\partial z}-B_{12}\frac{\partial B_{12}^*}{\partial z}-B_{12}^*\frac{\partial B_{12}}{\partial z}\right)\partial z.$$

Эти интегралы позволяют контролировать ход численных расчетов.

Ищем локализованное в пространстве решение (4) в виде $B_2=A_2(z)\exp(i\Omega_2 t)$, $B_{11}=A_{11}(z)\exp(i\Omega_{11}t-iq_{11}z)$ и $B_{12}=A_{12}(z)\exp(i\Omega_{12}t+iq_{12}z)$. Подставляя эти выражения в (4), получим уравнения для огибающих параметрически связанных солитонов:

$$\begin{gathered}D_2A_2''=\Omega_2A_2-\beta_2A_{11}A_{12},\\D_1A_{11}''=(\Omega_{11}-u_1q_{11}+D_1q_{11}^2)A_{11}-\beta_1A_2A_{12},\\D_1A_{12}''=(\Omega_{12}-u_1q_{12}+D_1q_{12}^2)A_{12}-\beta_1A_2A_{11}.\end{gathered}\tag{5}$$

Частотные расстройки и волновые числа связаны соотношениями $\Omega_{11}+\Omega_{12}=\Omega_2$ и $q_{11}=q_{12}=u_1/2D_1$. Для (5) существует точное аналитическое решение в виде неподвижных солитонов $A=a\,\mathrm{sech}^2(z/l)$. Подставляя солитонное решение в (5), получим соотношения, связывающие параметры солитона и константы уравнения:

$$a_{11}=a_{12}=(6/l^2)\sqrt{D_1D_2/\beta_1\beta_2},\quad a_2=6D_1/l^2\beta_1,\tag{6}$$

$$\Omega_2=4D_2/l^2,\quad \Omega_{11}=\Omega_{12}=2D_2/l^2,\tag{7}$$

$$l^2=8D_1(2D_1-D_2)/u_1^2.\tag{8}$$

Таким образом, волны основной частоты образую стоячую волну. Видно, что D_1 и D_2 должны быть одного знака (см. (6)). Анализируя (8), получим далее, что в среде с $D_2/D_1=2$ параметрические солитоны рассматриваемого вида могут формироваться при условии $u_1=0$. Пространственная протяженность таких солитонов l зависит от амплитуды согласно (6). Если $D_2/D_1 < 2$, то l^2 принимает фиксированное значение (8), определяемое параметрами D и u_1. Характерное пространственное распределение амплитуд неподвижных солитонов показано на рис. 2. Условие существования солитонов $D_2/D_1 \leqslant 2$ накладывает ограничения на коэффициенты связи α. Например, в случае $u_1=0$ имеем: $2\alpha_1^2(\alpha_2+\alpha_1)=\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)^2$, откуда следует, что $\alpha_2 \approx 2{,}66\alpha_1$. Заметим, что расстройки обеих волн основной частоты (7) и добавки к волновым числам равны между собой. При формировании неоднородной стоячей волны на основной частоте система уравнений (5) сводится к двум уравнениям, для которых были найдены локализованные решения с помощью численного и вариационного методов в широком диапазоне изменения параметров [13].

В заключение сформулируем основные результаты работы. Нами был исследован процесс формирования неподвижных параметрических солитонов в периодических системах при возбуждении второй гармоники двумя встречными волнами. Выведены укороченные уравнения на примере цепочки чередующихся контуров, допускающие солитонное решение. Получены соотношения, связывающие параметры солитона. Выяснены условия, при которых возможно солитонное решение укороченных уравнений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96–2–18592) и программы “Фундаментальное естествознание” (грант 95-0-2.2-79).

Литература

1. *Виноградова М. Б., Рудвнко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. 2-е изд. М., 1990.
2. *Карамзин Ю. Н., Поляков С. В., Сухоруков А. П.*// Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. №5. С. 80 (Moscow University Phys. Bull. 1996. N5.).
3. *Newell A. C.*//J. Math. Phys. 1978. **19**, N 5. P. 1126.
4. *Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.*// Письма в ЖЭТФ. 1974. **20**. С. 339.
5. *Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Филипчук Т. С.*//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1978. №4. С. 91 (Moscow University Phys. Bull. 1978. N4. P. 73).
6. *Schiek R., Baek Y., Stegeman G. I.* // Phys. Rev. 1996. **A53**. P. 1138.
7. *Torruellas W. E., Wang Z., Hagan D. J.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1995. **74**. P. 5036.
8. *Stegeman G. I., Hagan D. J., Torner L.* // J. Opt. and Quant. Electr. 1996. **28**, N12. P. 1691.
9. *Сухоруков А. П.* Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М., 1988.
10. *Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А.* Математическое моделирование в нелинейной оптике. М., 1989.
11. *Сухоруков А. П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. №6. С. 32 (Moscow University Phys. Bull. 1996. N6).
12. *Boris A. Malomed, Dan Anderson, Mietek Lisak* //Opt. Commun. 1996. **126**. P. 251.
13. *Steblina V. V., Kivshar Yu. S., Lisak M., Malomed B. A.*// Opt. Commun. 1995. **118**. P. 345.

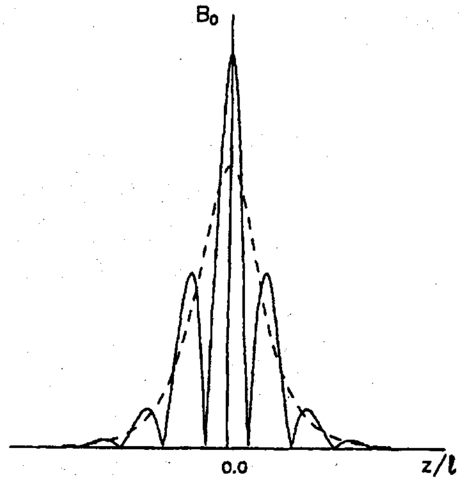

Рис. 2. Пространственное распределение амплитуд для неподвижного параметрического солитона на основной (сплошная линия) и удвоенной (штриховая) частотах

Поступила в редакцию 06.12.96