ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.2:534

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ. МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

## 2. Мера необходимости: определение, свойства, интегрирование по возможности и по необходимости

**Ю. П. Пытьев**

*(кафедра компьютерных методов физики)*

**Рассмотрены понятия возможности и необходимости события, в том числе нечеткого, понятия интегралов по возможности и по необходимости.**

### Введение

В 1965 г. Л. Заде предложил новый подход к формализации нечеткости, основанный на понятии нечеткого множества [1]. Как известно, любое подмножество $A$ множества $X$ можно задать с помощью его характеристической функции (х.ф.) $\chi_A(\cdot) : X \to \{0, 1\}$, определив $\chi_A(x) = 1$ для $x \in A$ и $\chi_A(x) = 0$ для $x \in X \backslash A$, $x \in X$. Нечеткое (под)множество $A$ также определяется его х. ф. $\mu_A(\cdot) \; : \; X \; \to \; [0,1]$, значение которой $\mu_A(x) \in [0,1]$ интерпретируется как «степень включения» $x \in X$ в $A$. Тот факт, что любой элемент $x \in X$ может принадлежать нечеткому множеству $A$ лишь «отчасти», позволяет моделировать сложные объекты в терминах характеристик, значения которых свойственны им лишь «до некоторой степени», «частично».

Теоретико-множественные операции над нечеткими множествами определяются согласно следующим правилам:

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } A = B: \; \mu_A(x) = \mu_B(x), \\ \text{б) } A \subset B: \; \mu_A(x) \le \mu_B(x), \\ \text{в) } \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \, \mu_B(x)), \\ \text{г) } \mu_{\bigcup\limits_\alpha A_\alpha}(x) = \sup\limits_\alpha \mu_{A_\alpha}(x), \\ \text{д) } \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \, \mu_B(x)), \\ \text{е) } \mu_{\bigcap\limits_\alpha A_\alpha}(x) = \inf\limits_\alpha \mu_{A_\alpha}(x). \end{array}\right. \quad x \in X. \qquad (1)$$

Здесь $A$, $B$ — нечеткие (под)множества $X$, и обозначения теоретико-множественных операций, введенные в левом столбце, расшифровываются в правом. Заметим, что, заменив в определениях (1) $\mu(\cdot)$ на «обычную» х. ф. $\chi(\cdot)$, получим соответствующие операции над «обычными», «четкими», множествами, согласно которым $\max(\chi_A, \, \chi_B)$ и $\min(\chi_A, \, \chi_B)$ — х. ф. объединения $A \cup B$ и пересечения $A \cap B$ соответственно, условие $\chi_A \le \chi_B$ эквивалентно включению $A \subset B$ и т. д.

Нечеткость может быть охарактеризована в терминах возможности, если значение $\mu_A(x)$ интерпретировать как величину «возможности включения» элемента $x \in X$ в $A$. Другая точка зрения на нечеткость, также позволяющая охарактеризовать ее в терминах возможности, опирается на понятие нечеткого элемента, аналогичное понятию случайного элемента в теории вероятностей. Нечеткий элемент $\xi$, принимающий значения в $X$, может быть задан распределением возможностей (его значений) — функцией $\mu^\xi(\cdot) : X \to [0, 1]$, значение $\mu^\xi(x)$ которой для каждого $x \in X$ определяет возможность равенства $\xi = x$.

Обе эти точки зрения можно согласованно представить в теории возможностей. Если $A$ — «четкое» подмножество $X$, $\chi_A(\cdot)$ — его х. ф., то возможность включения $\xi \in A$ определяется величиной $\sup\limits_{x \in A} \mu^\xi(x) = \sup\limits_{x \in X} \min(\mu^\xi(x), \chi_A(x))$. Соответственно значение $\sup\limits_{x \in X} \min(\mu^\xi(x), \mu_A(x))$ определит возможность включения $\xi$ в нечеткое подмножество $A \subset X$ (значение $\min$ равно возможности того, что $\xi = x$ и $x \in A$, величина $\sup$ определяет возможность включения $\xi \in A$). Если, однако, нечеткий элемент $\xi$ таков, что $y \in X$ — единственное «возможное» его значение, т. е. если $\mu^\xi(x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \ne y, \end{cases}$ $x \in X$, то $\xi$, по существу, «четкий» элемент $y \in X$, и возможность его включения в $A$, равная $\sup\limits_{x \in X} \min(\mu^\xi(x), \mu_A(x)) = \mu_A(y)$, совпадает с возможностью включения элемента $y \in X$ в нечеткое множество $A$.

На связь теории нечетких множеств с теорией возможностей впервые указал Л. Заде в работе [2].

В настоящей работе рассмотрены понятия возможности и необходимости события, в том числе и нечеткого, а также понятия интеграла по возможности и по необходимости. При ссылках на работу [3] используется двойная нумерация: (3.1) — формула (1) из [3], теорема 3.1 — теорема 1 из [3] и т. д.

### О возможности нечеткого события

Свойства возможности нечетких событий (см. определение 3.2) по существу отражены в теореме 3.1. Следует лишь оформить их в терминах операций над нечеткими событиями, определяемых ниже (ср. с (1)).

Пусть $f(\cdot)$, $g(\cdot)\in\mathcal{L}(X)$ — х. ф. нечетких событий. Их объединение и пересечение задаются х. ф. $(f \,{+\!\!\!\!+}\, g)(\cdot)$ и $(f\bullet g)(\cdot)$ соответственно *). При этом для возможности объединения и пересечения получим

$$\begin{aligned} p((f \,{+\!\!\!\!+}\, g)(\cdot)) &= \max(p(f(\cdot)), p(g(\cdot))) \\ &= p(f(\cdot)) \,{+\!\!\!\!+}\, p(g(\cdot)), \\ p((f\bullet g)(\cdot)) &\le \min(p(f(\cdot)), p(g(\cdot))) \\ &= p(f(\cdot))\bullet p(g(\cdot)) . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Если $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $\ldots$ — последовательность х.ф., отвечающая последовательности нечетких событий, то последняя называется сходящейся, если сходится последовательность $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $\ldots$; ее предел $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\limits_N \inf\limits_{n\ge N} f_n(x) = \inf\limits_N \sup\limits_{n\ge N} f_n(x)$, $x\in X$, называется х. ф. предела последовательности нечетких событий. При этом согласно теореме 3.1 $p(f(\cdot)) \le \liminf\limits_{n\to\infty} p(f_n(\cdot)) \le \limsup\limits_{n\to\infty} p(f_n(\cdot))$. Для любой последовательности нечетких событий с х. ф. $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $\ldots$ $\liminf\limits_{n\to\infty} p(f_n(\cdot)) \ge p(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(\cdot))$, $\limsup\limits_{n\to\infty} p(f_n(\cdot)) \ge p(\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(\cdot))$, но $p(\sup\limits_n f_n(\cdot)) = \sup\limits_n p(f_n(\cdot))$. Если же $f_1(\cdot) \le f_2(\cdot) \le \ldots$, и $f(\cdot) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\cdot)$, то $p(f(\cdot)) = \lim\limits_{n\to\infty} p(f_n(\cdot))$.

Отметим, наконец, что если $f_n(x) \to 1 \equiv 1(x)$, $n\to\infty$, $x\in X$, то $\lim\limits_{n\to\infty} p(f_n(\cdot))$ существует и равен $p(1(\cdot))=1$, в то время как из сходимости $f_n(x)\to 0\equiv 0(x)$, $n\to\infty$, $x\in X$, следует лишь, что $p(0(\cdot)) \le \liminf\limits_{n\to\infty} p(f_n(\cdot))$, и вообще $p(0(\cdot)) \le p(f(\cdot))$, $f(\cdot)\in\mathcal{L}(X)$; если не оговорено противное, считается, что $p(0(\cdot))=0$.

Далее будет показано, что возможность любого нечеткого события, заданного х. ф. $f(\cdot)\in\mathcal{L}(X)$, может быть определена формулой (3.12) $p(f(\cdot)) = p_\varphi(f(\cdot)) = \sup\limits_{x\in X}\min(f(x),\varphi(x))$, в которой $\varphi(\cdot)\in\mathcal{L}(X)$ — распределение возможности $P(\cdot)$.

### Мера необходимости: определение и свойства

Рассмотрим полукольцо $\mathcal{R}_{(n)}$, двойственное $\mathcal{R}_{(p)}$, с операцией сложения «$+\!\!\!\!+$», определенной как «min», и операцией умножения «$\bullet$», определенной как «max», с нейтральными элементами $\mathbf{0}=1$ и $\mathbf{1}=0$ и порядком (согласованным с операциями «$+\!\!\!\!+$» и «$\bullet$»), обратным естественному (ибо иначе $\mathbf{0} > \mathbf{1}$). При таком определении выполнены как все свойства операций «$+\!\!\!\!+$» и «$\bullet$» и нейтральных элементов (3.1), (3.2), (3.3), так и условия (3.4). Класс $\mathcal{M}(X)$ функций на $X$ со значениями в $\mathcal{R}_{(n)}$ определим аналогично тому, как в [3] определен класс $\mathcal{L}(X)$, но, сохраняя обозначения $\max$, $\min$, $\sup$ и $\inf$, отвечающие естественному порядку на [0,1], вместо условий (3.5) будем считать, что $(f \,{+\!\!\!\!+}\, g)(x) = f(x) \,{+\!\!\!\!+}\, g(x) = \min(f(x), g(x))$; $(f\bullet g)(x) = f(x)\bullet g(x) = \max(f(x), g(x))$, $x\in X$, и соответственно вместо (3.6) $\mathop{+\!\!\!\!+}\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \inf\limits_n f_n(x) \in \in\mathcal{M}(X)$, $\mathop{\bullet}\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sup\limits_n f_n(x) \in \mathcal{M}(X)$, $x\in X$, если $\{f_n(\cdot)\}\subset\mathcal{M}(X)$.

Определение 1. Определим меру $n(\cdot)$ как линейную счетно-аддитивную функцию на $\mathcal{M}(X)$, принимающую значения в $R_{(n)}$, т. е. такую, что

$$\begin{gathered} \forall a,\, b\in R_{(n)},\ \forall f(\cdot),\, g(\cdot)\in\mathcal{M}(X) \\ n((a\bullet f(\cdot)) + (b\bullet g(\cdot))) = (a\bullet n(f(\cdot))) + (b\bullet n(g(\cdot)))\,, \\ \forall \{f_n(\cdot)\}\subset\mathcal{M}(X) \\ n\big(\inf_n f_n(\cdot)\big) = n\big(\big(\mathop{+\!\!\!\!+}_{n=1}^{\infty} f_n\big)(\cdot)\big) = \\ = \mathop{+\!\!\!\!+}_{n=1}^{\infty} n(f(\cdot)) = \inf_n n(f_n(\cdot))\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Значение $N(A) = n(\chi_A(\cdot))$ назовем мерой необходимости события $A\in\mathcal{A}$, или, короче, необходимостью $A$; в общем случае $n(f(\cdot))$ назовем необходимостью нечеткого события с х. ф. $f(\cdot)\in\mathcal{M}(X)$.

Теорема 1. *Мера* $n(\cdot)$:

1. *монотонно не убывает на* $\mathcal{M}(X)$: *если***) $f(\cdot)\ge g(\cdot)$, *то* $n(f(\cdot))\ge n(g(\cdot))$;
2. *непрерывна относительно сходимости монотонно невозрастающей последовательности:* $f_{t+1}(\cdot)\le f_t(\cdot)$, $t=1,2,\ldots \Rightarrow n(\lim\limits_{t\to\infty} f_t(\cdot)) = \lim\limits_{t\to\infty} n(f_t(\cdot))$;
3. *полунепрерывна сверху:* $n(\lim\limits_{t\to\infty} f_t(\cdot)) \ge \limsup\limits_{t\to\infty} n(f_t(\cdot))$.

Доказательство следует из определения 1 и теоремы 3.1. ■

Теорема 2. *Имеют место следующие свойства* $N(\cdot)$.

1. $N(A\cap B) = \min(N(A), N(B))$,
$N(A\cup B) \ge \max(N(A), N(B))$;
$A\subset B \Rightarrow N(A)\le N(B)$, $A, B\in\mathcal{A}$;
$N(X) = N((X\backslash A)\cup A) \ge \max(N(X\backslash A), N(A))$.
2. *Необходимость* $N(\cdot)$ *счетно аддитивна:* $N(\mathop{+\!\!\!\!+}\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = N(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \inf\limits_n N(A_n) = \mathop{+\!\!\!\!+}\limits_{n=1}^{\infty} N(A_n)$.
*Если* $A_1\supset A_2\supset\ldots$ *и* $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, *то из счетной аддитивности и монотонности* $N(\cdot)$ *следует непрерывность* $N(\cdot)$ *относительно такой сходимости:* $N(A) = \inf\limits_n N(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} N(A_n)$.
3. *В общем случае, если* $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, *то*
$$N(A) \ge \inf_N \sup_{n\ge N} N(A_n) = \limsup_{n\to\infty} N(A_n), \tag{3}$$
*т. е.* $N(\cdot)$ — *полунепрерывна сверху. Поэтому значение* $N(X)$ *можно определить любым числом из* $[\sup\limits_{A\in\mathcal{A}} N(A), 1]$.

---

*) Определение операций «$+\!\!\!\!+$» и «$\bullet$» и класса $\mathcal{L}(X)$ см. в работе [3].

**) Неравенство $\ge$ здесь и далее понимается как отвечающее естественному порядку на [0,1], условие $f(\cdot)\ge g(\cdot)$ означает, что $f(x)\ge g(x)$, $x\in X$.

Доказательство следует из определения 1 и теоремы 3.2. ■

В то же время, если $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$, то, с одной стороны, согласно (3) $N(\emptyset) \geq \limsup_{n\to\infty} N(A_n)$, а с другой, $N(\emptyset) \leq N(A_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ и тем самым $N(\emptyset) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} N(A_n)$. Следовательно, если $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} N(A_n) = N(\emptyset)$. Естественно определить $N(\emptyset) = 0$. (Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} N(A_n)$ не зависит от последовательности $A_1, A_2, \cdots \to \emptyset$.)

Заметим, что мера $n(\cdot)$, определенная как двойственная $p(\cdot)$, $n(f(\cdot)) = \neg p(\neg f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$, удовлетворяет условиям (2), если $p(\cdot)$ удовлетворяет условиям (3.7), (3.8). Соответственно $N(A) = \neg P(X\backslash A)$ — необходимость $A$, если $P(A)$ — возможность $A \in \mathcal{A}$. Эти замечания позволяют рассматривать теоремы 1 и 2 как двойственные теоремам 3.1 и 3.2 соответственно.

Следующие соображения логического характера лежат в основе определения меры необходимости. Если $P(A)$ оценивает возможность того, что $A \in \mathcal{A}$ истинно, то «остаток» $D(A) = 1 - P(A)$ естественно считать мерой сомнения в истинности $A$, а меру сомнения в истинности $X\backslash A$ — мерой необходимости $A$: $N(A) = D(X\backslash A) = \neg P(X\backslash A)$.

П р и м е р 1. Мера $n(f) = n_\psi(f(\cdot)) = \inf\limits_{x\in X} \max(f(x), \psi(x))$, где $\psi(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$ — фиксированная функция, удовлетворяет условиям определения 1. ■

Если, в частности, $p(f(\cdot)) = p_\varphi(f(\cdot)) = \sup\limits_{x\in X} \min(f(x), \varphi(x))$, то

$$n(f(\cdot)) = n_{\neg\varphi}(f(\cdot)) = \inf_{x\in X} \max(f(x), \neg\varphi(x)), \tag{4}$$

причем, если $\sup\limits_{x\in X} \varphi(x) = 1$, то $n_{\neg\varphi}(f(\cdot)) = \neg p_\varphi(\neg f(\cdot)) \leq p_\varphi(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$. Действительно, так как

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in X} \min(f(x), \varphi(x)) + \sup_{x\in X} \min(\neg f(x), \varphi(x)) \geq \\
&\geq \sup_{x\in X}(\min(f(x), \varphi(x)) + \min(\neg f(x), \varphi(x))) \geq \\
&\geq \sup_{x\in X} \min(f(x) + \neg f(x), \varphi(x)) = \sup_{x\in X} \varphi(x),
\end{aligned}$$

то для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ $p_\varphi(f(\cdot)) + p_\varphi(\neg f(\cdot)) \geq 1$, если $\sup\limits_{x\in X} \varphi(x) = 1$ (здесь «+» — символ «обычного» сложения). ■

Если $P(A) = P_\varphi(A) = \sup\limits_{x\in A} \varphi(x)$, то $N(A) = N_{\neg\varphi}(A) = \inf\limits_{x\in X\backslash A} \neg\varphi(x)$.

Далее возможность и необходимость, если не оговорено противное, предполагаются связанными условиями двойственности*)

$$n(f(\cdot)) = \neg p(\neg f(\cdot)), \quad f(\cdot) \in \mathcal{M}(X) = \mathcal{L}(X),$$

$$N(A) = \neg P(X\backslash A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Отметим, что поскольку

$$\max(P(A), P(X\backslash A)) = P(X) = 1, \; A \in \mathcal{A}, \tag{5}$$

то сумма ($P(A)$ и $P(X\backslash A)) \geq 1$. Следовательно, $N(A) = \neg P(X\backslash A) \leq P(A)$, $A \in \mathcal{A}$. Кроме того, $\min(N(A), N(X\backslash A) = \min(\neg P(X\backslash A), \neg P(A)) = \neg\max(P(X\backslash A), P(A)) = 0$.

Заметим, наконец, что поскольку согласно условию (5) сумма ($N(A)$ и $P(X\backslash A)$) равна единице, $A \in \mathcal{A}$, то, учитывая (5), для любого $A \in \mathcal{A}$ найдем: $N(A) > 0 \Leftrightarrow P(X\backslash A) < 1 \Rightarrow P(A) = 1$; $P(A) < 1 \Rightarrow P(X\backslash A) = 1 \Leftrightarrow N(A) = 0$.

**Интегрирование по возможности и по необходимости**

Выражение (3.12) $p_\varphi(f(\cdot)) = \sup\limits_{x\in X} \min(f(x), \varphi(x))$ можно понимать как «интеграл» функции $f(\cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ по возможности $P(\cdot)$, заданной распределением $\varphi(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$. Понятие интеграла по возможности $P(\cdot)$ можно ввести и в общем случае, причем в полной аналогии с понятием интеграла Лебега. Для этого заметим, что согласно равенствам (3.14) для $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$: $\mathop{\dotplus}\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k^{(n)} \bullet \chi_{A_k^{(n)}}(x)) = \underline{f}_n(x) \leq f(x) \leq \overline{f}_n(x) = \mathop{\dotplus}\limits_{k=1}^{n}(\alpha_{k-1}^{(n)} \bullet \chi_{A_k^{(n)}}(x))$, $x \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и вследствие линейности $p(\cdot)$

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leq k\leq n} \min(\alpha_k^{(n)}, \; P(A_k^{(n)})) = \\
&= p(\underline{f}_n(\cdot)) \leq p(f(\cdot)) \leq p(\overline{f}_n(\cdot)) = \\
&= \max_{1\leq k\leq n} \min(\alpha_{k-1}^{(n)}, P(A_k^{(n)})), \qquad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{6}$$

О п р е д е л е н и е 2. Функцию $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ назовем *интегрируемой по возможности* $P(\cdot)$ ($P$-интегрируемой), если для любой последовательности разбиений $[0,1]$ $1 = \alpha_0^{(n)} \geq \alpha_1^{(n)} \geq \ldots \geq \alpha_n^{(n)} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\varepsilon^{(n)} = \max\limits_{1\leq k\leq n}(\alpha_{k-1}^{(n)} - \alpha_k^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$, левая и правая части (6) стремятся к одному пределу. Этот предел назовем интегралом $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ по возможности $P(\cdot)$ ($P$-интегралом), последний, разумеется, равен $p(f(\cdot))$.

Интеграл $p_Q(f(\cdot))$ ($P$-интеграл) по подмножеству $Q \subset X$, $Q \in \mathcal{A}$, определим равенством $p_Q(f(\cdot)) = p(\chi_Q \bullet f(\cdot))$. Если $Q$ — нечеткое (под)множество $X$, $\varphi_Q(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ — его х.ф., то $p_Q(f(\cdot)) = p(\varphi_Q \bullet f(\cdot))$ — интеграл $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ ($P$-интеграл) по нечеткому множеству $Q$.

Т е о р е м а 3. *Любая функция* $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ *$P$-интегрируема.*

*) Имеет место тождество $\neg(\neg f \dotplus \neg g)(\cdot) = (f \bullet g)(\cdot)$, верное при определении операций $\dotplus$ и $\bullet$ как max и min или как min и max соответственно, т. е. как в $\mathcal{R}_{(p)}$, так и в $\mathcal{R}_{(n)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 \le \max_{1\le k\le n} \min(\alpha_{k-1}^{(n)}, P(A_k^{(n)}))- \\ - \max_{1\le k\le n} \min(\alpha_{k}^{(n)}, P(A_k^{(n)})) \le \\ \le \max_{1\le k\le n} \min(\alpha_{k-1}^{(n)} - \alpha_k^{(n)}, P(A_k^{(n)})) \le \\ \le \max_{1\le k\le n} (\alpha_{k-1}^{(n)} - \alpha_k^{(n)}) = \varepsilon^{(n)} \to 0 \end{aligned} \tag{7}$$

при $n \to \infty$. Дело в том, что для любых $x, y, z \in [0,1]$ $\min(x+y, z) \le \min(x,z) + \min(y,z)$, поэтому $\min(\alpha_{k-1}^{(n)}, P(A_k^{(n)})) \le \min(\alpha_k^{(n)}, P(A_k^{(n)})) + \min(\alpha_{k-1}^{(n)} - \alpha_k^{(n)}, P(A_k^{(n)}))$ и тем более $\max\limits_{1\le k\le n} \min(\alpha_{k-1}^{(n)}, P(A_k^{(n)})) \le \max\limits_{1\le k\le n} \min(\alpha_k^{(n)}, P(A_k^{(n)})) + \max\limits_{1\le k\le n} \min(\alpha_{k-1}^{(n)} - \alpha_k^{(n)}, P(A_k^{(n)}))$, что и записано в (7); в формулах, следующих за (7), «+» и «−» символизируют «обычные» операции сложения и вычитания. ■

Таким образом, между $p(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, и $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$, установлено взаимно однозначное соответствие: $p(f(\cdot))$ есть интеграл $f(\cdot)$ по $P(\cdot)$, $P(A) = p(\chi_A(\cdot))$, $\chi_A(\cdot)$ — х. ф. $A \in \mathcal{A}$.

Что касается свойств интеграла $p(f(\cdot))$, то они наследуются как свойства меры $p(\cdot)$. Это линейность:

$$p((a \bullet f(\cdot)) \,\dot{+}\, (b \bullet g(\cdot))) = (a \bullet p(f(\cdot))) \,\dot{+}\, (b \bullet p(g(\cdot))), \quad a,\, b \in [0,1], \;\; f(\cdot),\, g(\cdot) \in \mathcal{L}(X),$$

и счетная аддитивность:

$$p\Big(\mathop{\dot{+}}_{n=1}^{\infty} f_n(\cdot)\Big) = \mathop{\dot{+}}_{n=1}^{\infty} p(f_n(\cdot)), \quad f_n(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \; n = 1, 2, \ldots$$

(см. определение 3.1). Отметим также, что $\forall f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ интеграл $p_Q(f(\cdot))$ есть счетно-аддитивная функция множества $Q \in \mathcal{A}$:

$$p_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n}(f(\cdot)) = \mathop{\dot{+}}_{n=1}^{\infty} p_{Q_n}(f(\cdot)).$$

Действительно,

$$p_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n}(f(\cdot)) = p\Big(\Big(\mathop{\dot{+}}_{n=1}^{\infty} \chi_n\Big) \bullet f(\cdot)\Big) = \\ = p\Big(\mathop{\dot{+}}_{n=1}^{\infty} (\chi_n \bullet f)(\cdot)\Big) = \mathop{\dot{+}}_{n=1}^{\infty} p((\chi_n \bullet f)(\cdot)) = \mathop{\dot{+}}_{n=1}^{\infty} p_{Q_n}(f(\cdot)),$$

где $\chi_n(\cdot)$ — х. ф. множества $Q_n$, $n = 1, 2 \ldots$. Очевидно, счетная аддитивность $p_Q(f(\cdot))$ сохраняется и для нечеткого множества $Q$. Для доказательства достаточно $\chi_n(\cdot)$ заменить на х. ф. $\varphi_n(\cdot)$ нечеткого множества $Q_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Согласно теореме 3.1 и свойству (3.7) линейности $p(\cdot)$ для любых $f(\cdot), g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ можно определить их скалярное произведение $(f, g)$ как интеграл $(f \bullet g)(\cdot)$: $(f, g) = p((f \bullet g)(\cdot))$. При этом, естественно, $\|f\| = \|f\| \bullet \|f\| = (f, f) = p((f \bullet f)(\cdot)) = p(f(\cdot))$ и аналогично $\|g\| = p(g(\cdot))$. Поэтому имеет место аналог неравенства Коши–Буняковского $(f, g) \bullet (f, g) = (f, g) = p((f \bullet g)(\cdot)) \le p(f(\cdot)) \bullet p(g(\cdot)) = \|f\| \bullet \|g\|$.

Другое понятие интеграла введено и исследовано в работах [4, 5].

Определим теперь понятие интеграла по необходимости $N(\cdot)$, двойственное понятию интеграла по возможности. Для любой функции $g(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$ последовательности

$$\underline{g}_n(x) = \mathop{\dot{+}}_{k=1}^{n} (\beta_{k-1}^{(n)} \bullet \chi_{B_k^{(n)}}(x)) = \min_{1\le k\le n} \max(\beta_{k-1}^{(n)}, \chi_{B_k^{(n)}}(x)),$$
$$\overline{g}_n(x) = \mathop{\dot{+}}_{k=1}^{n} (\beta_{k}^{(n)} \bullet \chi_{B_k^{(n)}}(x)) = \min_{1\le k\le n} \max(\beta_{k}^{(n)}, \chi_{B_k^{(n)}}(x)),$$
$$x \in X, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

в которых $0 = \beta_0^{(n)} \le \beta_1^{(n)} \le \ldots \le \beta_{n-1}^{(n)} \le \beta_n^{(n)} = 1$, $B_k^{(n)} = \{x \in X,\; g(x) \le \beta_{k-1}^{(n)}\} \cup \{x \in X, g(x) > \beta_k^{(n)}\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условию $\underline{g}_n(x) \le g(x) \le \overline{g}_n(x)$, $x \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и при $n \to \infty$ равномерно сходятся к $g(\cdot)$, монотонно возрастая и соответственно монотонно убывая, если $\max\limits_{1\ge k\ge n} (\beta_k^{(n)} - \beta_{k-1}^{(n)}) = \varepsilon^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$. Определение интеграла по необходимости $N(\cdot)$ основано на соотношениях

$$\mathop{\dot{+}}_{k=1}^{n} (\beta_{k-1}^{(n)} \bullet N(B_k^{(n)})) = n(\underline{g}_n(\cdot)) \le n(g(\cdot)) \le n(\overline{g}_n(\cdot)) = \\ = \mathop{\dot{+}}_{k=1}^{n} (\beta_{k}^{(n)} \bullet N(B_k^{(n)})), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

вытекающих из свойств необходимости $n(\cdot)$, отмеченных в теореме 1.

О п р е д е л е н и е 2$'$. Функцию $g(\cdot) \in \mathcal{M}(x)$ назовем интегрируемой по необходимости $N(\cdot)$ ($N$-интегрируемой), если для любой последовательности разбиений $[0, 1]$ $0 = \beta_0^{(n)} \le \beta^{(n)_1} \le \ldots \le \beta_{n-1}^{(n)} \le \beta_n^{(n)} = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\varepsilon^{(n)} = \max\limits_{1\le k\le n} (\beta_k^{(n)} - \beta_{k-1}^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$, левая и правая части (8) стремятся к одному пределу. Этот предел, равный, очевидно, $n(g(\cdot))$, назовем интегралом $g(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$ по необходимости $N(\cdot)$ ($N$-интегралом).

Интегралом $g(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$ по подмножеству $Q \subset X$, $Q \in \mathcal{A}$ назовем $n_Q(g(\cdot)) = n(\chi_{X\setminus Q} \bullet g(\cdot))$. Если $Q$ — нечеткое подмножество $X$, $\varphi_Q(\cdot)$ — его х. ф., то $n_Q(g(\cdot)) = n(\neg\varphi_Q \bullet g(\cdot))$ — интеграл по нечеткому множеству $Q$.

Т е о р е м а 3$'$. *Любая функция $g(\cdot) \in \mathcal{M}(X)$ $N$-интегрируема.*

Доказательство этой теоремы, двойственной теореме 3, сводится к доказательству последней путем следующих переобозначений: $g(\cdot) = \neg f(\cdot)$, $\beta_k^{(n)} = \neg\alpha_k^{(n)}$, $B_k^{(n)} = X \setminus A_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, $n(g(\cdot)) = \neg p(\neg f(\cdot))$.

З а м е ч а н и е. В рассматриваемой теории в силу определения операций сложения «$\dot{+}$» как max(min) и умножения «$\bullet$» как min(max) конкретные значения $x, y \in \mathcal{R}_{(p)}$ $(\mathcal{R}_{(n)})$ не важны. В частности, при сравнении

$x$ и $y$ имеют смысл лишь отношения порядка $>$, $=$ или $<$. Иначе говоря, *все конструкции рассматриваемой теории возможностей должны быть инвариантны относительно любого сохраняющего порядок отображения* $[0,1] \to [0,1]$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке и технологии (отдел В. В. Бойко).

**Литература**

1. *Zadeh L. A.* // Information and Control. 1965. **8.** P. 335.
2. *Zadeh L. A.* // Fuzzy Sets and Systems. 1978. **1.** P. 3.
3. *Пытьев Ю. П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 3. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. N 3).
4. *Sugeno M.* // Trans. S.I.C.E. 1972. **8,** N 2. P. 95.
5. *Sugeno M.* // Trans. S.I.C.E. 1975. **11,** N 1. P. 32.

Поступила в редакцию
16.10.96

УДК 519.6:616

# ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИММУНОЛОГИИ

**О. С. Васильев, В. Б. Гласко, Ю. В. Гласко, В. М. Земсков, С. В. Родионов**

*(кафедра математики)*

**Предложена математическая модель для процесса активации иммунокомпетентных клеток. Поставлена обратная задача идентификации модели с объектом на основе показаний проточного цитометра и установлена ее корректность. Проведен математический эксперимент.**

1. Современная качественная теория защитной реакции организма на проникновение чужеродных микроэлементов (антигенов), учитывающая сложные взаимодействия формируемых организмом «иммунокомпетентных» клеток и молекул (антител) разработана в работе [1].

В работах [2–3] на этой основе развита возможная математическая модель механизма иммунной защиты, описываемая задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящей от 10 числовых параметров. Сформулирована обратная задача идентификации модели по указанным параметрам с состоянием конкретного организма. Численные эксперименты по решению такой задачи с учетом ее математической некорректности [4] выполнены в работе [2] и в более общей постановке — в [5]. Показано, что идентификация позволяет изучать с помощью ЭВМ влияние на ход болезни различных химических препаратов.

Однако для решения этой задачи идентификации требуется экспериментальная информация о кинетике концентрации по крайней мере четырех агентов иммунного отклика, которая не всегда доступна в клинических условиях. В этой связи представляет интерес извлечение максимально возможной информации из данных, получаемых на действующих приборах.

О состоянии системы иммунной защиты организма можно судить, в частности, анализируя начальную стадию иммунной реакции — фазу «активации»: появление на мембране иммунокомпетентных клеток (например, $T$-лимфоцитов) синтезируемых клеткой молекул («экспрессия»). Анализ распределения $T$-клеток по уровню активации — количеству экспрессированных молекул на мембране клетки — дает информацию об изменении состояния иммунной системы пациента [6] по отношению к нормальному. Этим путем может быть решена и более общая задача профилактики, обозначенная в работе [2]: определение «иммунного статуса» населения конкретного региона.

Первичные сведения такого рода могут быть получены путем экспериментального анализа состава крови с помощью «проточного цитометра» (ПЦ). Если соответствующие клетки крови «пометить» некоторым химическим способом, то ПЦ, управляющий лазерным лучом, подсчитывает число клеток, соответствующих некоторому заданному диапазону активации. Эти данные отражаются в «гистограммах» — графиках ступенчатых функций.

На рис. 1 представлен полученный по ПЦ фрагмент гистограммы, соответствующей нормальному состоянию организма. Для этого состояния, как и для начальной стадии заболевания, характерно монотонное убывание числа активированных клеток с возрастанием активности. Видимые колебания естественно отнести на счет погрешности эксперимента.

Погрешность гистограмм, не позволяющая раскрыть тонкую структуру детерминированного распределения $T$-клеток, и дороговизна эксперимента делают актуальной разработку биологически адекватной модели активации.

В настоящей работе делается первая попытка создания простейшей модели такого рода и ее идентификации с показаниями проточного цитометра.

2. Ввиду однородности состава крови в организме пациента отнесем наши рассуждения к произвольному элементарному ее объему и процесс активации, развивающийся во времени, будем характеризовать двумя величинами: $A = A(t)$ — количеством молекул активации на мембране клетки, и $n = n(A(t), t)$ — количеством иммунокомпетентных клеток, активированных на уровне А.