С другой стороны, задача Коши (3) и соответствующая теоретическая гистограмма могут быть отнесены к узкой окрестности некоторой начальной точки. Формально такая возможность может быть учтена путем решения задачи идентификации на множестве $f(A,c,p) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(A,p_i)$ с неопределенным $c = \{c_1,\ldots,c_n\}$.

При дальнейшей разработке этой проблемы в диагностических целях естественно учесть, что наряду с погрешностями измерений входная информация может содержать и «биологический шум» по отношению к принятой модели. Для повышения качества диагностики следует совершенствовать модель, учитывая, например, многообразие иммунокомпетентных клеток.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В. Ф. Бутузову и В. М. Репину за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. *Бернет Ф.* Целостность организма и иммунитет. М., 1964.
2. *Марчук Г. И.* Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М., 1991.
3. *Марчук Г. И., Поляк Р. Я., Зуев С. М., Каляев Д. В.* // Журн. Всесоюз. хим. о-ва. 1988. **33**, № 5. С. 537.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1979.
5. *Кузнецова Г. П.* // Тез. докл. научн.-техн. конф. по пробл. увеличения эффективн. работы железнодор. транспорта Дальневост. района. Хабаровск, 26–27 окт., 1995. С. 198.
6. *Федосеева В. Н., Порядин Г. В., Ковальчук Л. В.* и др. Руководство по иммунологическим и аллергологическим методам в гигиенических исследованиях. М., 1993.
7. *Fishman M., Perelson A. S.* // J. Theor. Biol. 1995. **173**. P. 241.
8. *Хантов Р. М., Пинегин Б. В., Истамов Х. И.* Экологическая иммунология. М., 1995.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М., 1985.
10. *Гласко В. Б.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
11. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. М., 1980.
12. *Гласко В. Б., Щепетилов А. В.* // ЖВМ и МФ. 1991. **30**, № 12. С. 1826.
13. *Тихонов А. Н.* // ДАН СССР. 1969. **39**. № 5. С. 195.
14. *Гончарский А. В., Ягола А. Г.* // ДАН СССР. 1969. **184**. № 4. С. 771.
15. *Иванов В. К.* // Матем. сб. 1963. **61**. С. 211.
16. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М., 1980.
17. *Тихонов А. Н., Гласко В. Б.* // ЖВМ и МФ. 1965. **5**. № 3. С. 463.

Поступила в редакцию
27.11.96

УДК 533.951

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУРАХ

И. М. Алешин

(кафедра физики Земли)

Рассмотрено влияние периодической неоднородности положительного фона на динамику нелинейных потенциальных волн в холодной плазме в кубическом по амплитуде поля приближении. Показано, что такая неоднородность приводит к расщеплению спектра ленгмюровской волны на две ветви, одна из которых оказывается затухающей. Неоднородность среды приводит также к нелинейному сдвигу частоты.

Рассмотрим систему, состоящую из электронного газа, погруженного в положительно заряженный фон с плотностью заряда $\rho(r) = en_+(r)$:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{r}), \quad \rho_0 = \mathrm{const},$$

— элементарный заряд.

Если длина волны возмущения $\lambda = 2\pi/k$ много больше характерного размера неоднородности :

$$\lambda \gg a, \tag{1}$$

то любую величину, характеризующую свойства системы $z(\mathbf{r},t)$, можно представить в виде суммы быстро и медленно меняющихся слагаемых:

$$z(\mathbf{r},t) = Z(\mathbf{r},t) + \delta z(\mathbf{r},t), \tag{2}$$

$$Z(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Delta} d\xi\, Z(\mathbf{r}+\xi) = \langle z(\mathbf{r},t)\rangle, \qquad \lambda \ll \Delta^{1/3} \ll \lambda. \tag{3}$$

Однородность системы предполагает пренебрежение членами вида

$$\langle \delta z \delta n_0 \rangle, \tag{4}$$

где $\delta n_0(\mathbf{r})$ — отклонение плотности электронов от ее среднего значения N_0. Предполагая, что

$$\delta n_0 \ll N_0, \tag{5}$$

можно использовать хорошо разработанные методы, применяемые в однородных задачах (см., напр., [1, 2]) и с учетом членов вида (4).

Для определения координатной зависимости равновесной электронной плотности необходимо использовать кинетическое уравнение для матрицы плотности [3] или функции распределения [4]. В последнем случае для классической и сильно вырожденной электронной плазмы имеем соответственно (см. приложение)

$$n_0(\mathbf{r}) = N_0 \left\{ \begin{array}{l} A_M \exp\{e\varphi_0(\mathbf{r})/T\}\,, \\ A_F(1-2e\varphi_0(\mathbf{r})/E)^{3/2}\,, \end{array} \right. \qquad (6)$$

где $\varphi_0(\mathbf{r})$ — самосогласованный потенциал поля, создаваемый электронами и положительным фоном, T, E_F — температура и энергия Ферми

Считая выполненными неравенства (5) и (1), будем полагать

$$\delta n_0 \sim \varphi_0\,, \qquad (7)$$

что позволяет заменить формулы (6) линейными по φ_0 выражениями.

Для описания длинноволновых потенциальных*) возмущений ($\omega/ku \ll 1$, ω — частота, u — средняя скорость хаотического движения частиц) воспользуемся уравнениями «холодной» гидродинамики [2]. Для простоты ограничимся рассмотрением одномерного случая: поверхности постоянной плотности положительного заряда (это плоскости, перпендикулярные оси $\mathbf{x}$, совпадающей с направлением распространения волны. После применения к этим уравнениям процедуры усреднения (2)–(3) для медленно и быстро меняющихся величин имеем соответственно

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_t N + \partial_x \left(N_0 V + NV + \langle \delta n_0 \delta v\rangle + \langle \delta n \delta v\rangle\right) = 0\,, \\ \partial_t V + \dfrac{1}{2}\partial_x\left(V^2 + \langle \delta v^2\rangle\right) = -\left(\dfrac{e}{m}\right) E\,, \\ \partial_x E = -4\pi e N\,, \end{array} \right. \qquad (8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \delta n + \partial_x \left(N_0 \delta v + V\delta n_0 + N\delta v + V\delta n\right) = 0\,, \\ \partial_t \delta v + \partial_x V \delta v = -\left(\dfrac{e}{m}\right) E\,, \\ \partial_x \delta E = -4\pi e \delta n\,. \end{array} \right. \qquad (8b)$$

Здесь n, v — концентрация и скорость возмущений, E — напряженность самосогласованного электрического поля.

Периодическую функцию δn_0 можно представить в виде

$$\delta n_0 = N_0 \sum_{s\neq 0} \nu_s \exp(ik_s x)\,, \qquad k_s = sk_a\,.$$

Разложение быстро меняющихся величин по той же системе функций позволяет перейти в (8б) от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям для пространственных гармоник. Далее, преобразованием Фурье по времени и «медленной» координате в (8) задача сводится к решению интегральных уравнений для фурье-образов исходных величин. Для решения полученных таким образом уравнений используем итерационную процедуру разложения по степеням электрического поля [1]. Выражая все величины через фурье-амплитуду электрического поля, в кубическом приближении получаем уравнение

$$\begin{array}{l} \varepsilon(\omega,k)\,E(\omega,k) + \int D(1;2)\widetilde{\kappa}^{(2)}(1;2)\,E(1)\,E(2) + \\ \quad + \int D(1;2;3)\,\widetilde{\kappa}^{(3)}(1;2;3)\,E(1)\,E(2)\,E(3) = 0\,, \end{array} \qquad (9)$$

$$\begin{array}{l} (j) \equiv (\omega_j;k_j)\,, \\ \widetilde{\varepsilon}(\omega,k) = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1+\eta^2\zeta(\omega)\right)\,, \\ \zeta(\omega) = \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2\varepsilon_0(\omega)}\,, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \varepsilon_0(\omega) = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\,, \\ \eta^2 = \sum\limits_{s\neq 0} \nu_s \nu_{-s}\,, \\ D(1;2;\ldots;s) = d\omega_1 dk_1 d\omega_2 dk_2 \ldots d\omega_s dk_s \times \\ \qquad \times\, \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \ldots - \omega_s) \times \\ \qquad \times\, \delta(k - k_1 - k_2 - \ldots - k_s)\,, \\ \widetilde{\kappa}^{(s)}(1;\ldots;s) = \widetilde{\kappa}^{(s)}(1;\ldots;s) + \eta^2\Delta\widetilde{\kappa}^{(s)}(1;\ldots;s)\,, \end{array}$$

$\kappa^{(s)}$ — нелинейные восприимчивости однородной плазмы [1]. Ввиду громоздкости выражений для $\Delta\widetilde{\kappa}^{(s)}$ приведем формулы лишь для тех из них, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$\begin{array}{l} \Delta\widetilde{\kappa}^{(3)}(1;2;3) = \dfrac{1}{3}\Big(\Delta\kappa^{(3)}(1;2;3) + \Delta\kappa^{(3)}(2;3;1) + \\ \qquad\qquad + \Delta\kappa^{(3)}(3;1;2)\Big)\,, \\ \Delta\kappa^{(3)}(1;2;3) \equiv \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e}{m}\right)^2 \dfrac{\omega_p^2}{\omega\omega_1\omega_2\omega_3}\Big(\Delta\kappa_a^{(3)}(1;2;3) + \\ \qquad\qquad + \alpha^2 k_a^2 \Delta\beta^{(3)}(1;2;3)\Big)\,, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha^2 = \sum\limits_{s\neq 0} s^2\nu_s\nu_{-s} \Big/ \sum\limits_{s\neq 0} \nu_s\nu_{-s} \sim O(1)\,, \\ \kappa_\beta^{(3)} = b_{2,3}\left(\dfrac{1+\zeta}{\omega} + \dfrac{1}{\omega_1\zeta_1}\right) + d_{2,3}(\zeta+\zeta_1)\,, \\ b_{i,j} = \left((1+\zeta_{i,j})(\zeta_i+\zeta_j)\right)/\omega_{i,j} + \zeta_{i,j}\left(\dfrac{1}{\omega_i\varepsilon_{0i}} + \dfrac{1}{\omega_j\varepsilon_{0j}}\right)\,, \\ d_{i,j} = \dfrac{1}{\omega_{i,j}\varepsilon_{0i,j}}\left(\dfrac{\zeta_i+\zeta_j}{\omega_{i,j}}\,\dfrac{1}{\omega_i\varepsilon_{0i}} + \dfrac{1}{\omega_j\varepsilon_{0j}}\right)\,, \\ \omega_{i,j} = \omega_i + \omega_j\,, \\ F_{i,j} = F(\omega_{i,j})\,. \end{array}$$

Будем искать решение уравнения (9) в виде нелинейной волны. Для этого положим

$$E(\omega,k) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} E_n \delta(\omega - n\omega_0)\,\delta(k - nk_0)\,. \qquad (10)$$

Подстановка разложения (10) в уравнение (9) преобразует последнее в бесконечную систему алгебраических уравнений для гармоник. Считая $E(n) \sim E(\pm 1)^n$, $E(0) \sim E(\pm 1)^2$, $E(n) \equiv E(n\omega_0, nk_0)$, в кубическом приближении можно ограничиться пятью уравнениями для гармоник с $n = 0, \pm 1, \pm 2$. Разрешая полученную систему

*) В силу анизотропии среды разделение возмущений на продольные и поперечные в общем случае невозможно. Однако можно выделить ветвь колебаний, в которой одна из компонент электрического поля превышает другую в $\sim k_a^2/k^2$ раз.

относительно $E(1) = E(-1) \equiv E_0/2$, с точностью до E_0^3 имеем

$$\widetilde{\varepsilon}(1) + \frac{3}{4}\alpha^2 k_a^2 \eta^2 E^2 \Delta \widetilde{\kappa}_\beta^{(3)}(1;-1;1) = 0\,, \qquad (11)$$

где в силу условия (1) сохранены слагаемые, пропорциональные большой величине k_a^2.

Из уравнения (11) после введения безразмерных величин $\Omega = \omega/\omega_p$, $\sigma = \alpha k_a E/m\omega_p$ получаем нелинейное дисперсионное соотношение

$$\begin{gathered} 1 - \frac{1}{\Omega^2}\left(1+\eta^2\zeta(\Omega)\right) - \frac{3}{4}\frac{(\eta\sigma)^2}{\Omega^4}\times \\ \times\left\{-8\zeta^2(\Omega) + \frac{\zeta(\Omega)}{\Omega^2\varepsilon_0(2\Omega)}\left[\zeta(\Omega)+\frac{2}{\varepsilon_0(\Omega)}\right]\right\} = 0\,. \end{gathered} \qquad (12)$$

В линейном приближении уравнение (12) имеет два решения:

$$\Omega_{1,2}^{(0)} = 1 \pm \eta\,, \qquad (13)$$

т. е. периодическая неоднородность среды приводит к расщеплению спектра плазменных волн на две ветви.

Уравнение (12) преобразуется в уравнение пятой степени относительно квадрата частоты, следовательно, имеет пять корней. Однако физический смысл имеют те из них, которые в пределе $\sigma \to 0$ переходят в (13):

$$\Omega_i \xrightarrow[\sigma\to 0]{} \Omega_i^{(0)}\,. \qquad (14)$$

Чтобы получить приближенные выражения для корней нелинейного дисперсионного уравнения, положим

$$\omega = 1 + \mu\,, \quad \mu \ll 1\,. \qquad (15)$$

Подстановка (15) в (12) приводит к кубическому уравнению для μ:

$$\mu^3 - \eta^2\mu + 3\eta^2\sigma^2 = 0\,.$$

Из анализа этого уравнения следует, что один из его корней, соответствующий меньшему из линейных корней в (13), всегда действителен. Два других корня комплексны, если безразмерная амплитуда поля σ превышает пороговое значение

$$\sigma > \sigma_0 = 3^{-4/5}(2\eta)^{1/2}\,.$$

При этом условию (14) удовлетворяет корень с отрицательной мнимой частью. Таким образом, эта ветвь является затухающей. На рисунках изображены зависимости действительных частей частот (рис. 1) и декремента (рис. 2) от амплитуды поля.

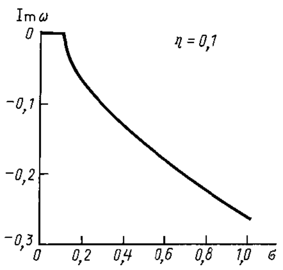

Рис. 1

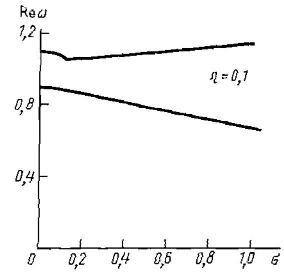

Рис. 2

Приложение

Решение стационарного уравнения Власова

$$\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{v}) + \frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\varphi_0(\mathbf{r})\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{r},\mathbf{v}) = 0$$

есть произвольная функция его характеристики

$$f(\mathbf{r}, v) = f_0\left(\frac{mv^2}{2} - e\varphi(\mathbf{r})\right)\,.$$

Пусть

$$F_0(v^2) \equiv \langle f_0\rangle = \frac{1}{\Delta}\int\limits_\Delta d\mathbf{r} f_0(\mathbf{r}+\xi,\, v)\,,$$

где $F_0(v^2)$ — заданная функция. Тогда

$$f_0(\mathbf{r}, v) = \frac{1}{A} F_0\left(\frac{mv^2}{2} - e\varphi(\mathbf{r})\right)\,, \qquad (A1)$$

где константа A определяется из условия квазинейтральности

$$\frac{1}{\Delta}\int\limits_\Delta n_0(\xi)\,d\xi = N_0\,. \qquad (A2)$$

Интегрируя (A1) по $d\mathbf{v}$, с учетом (A2) и явного вида $F_0(v^2)$ получаем формулы (6).

Литература

1. Электродинамика плазмы / Под ред. А. И. Ахиезера. М., 1974.
2. *Ситенко А. Г.* Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме. Киев, 1973.
3. *Власов А. А.* // ЖЭТФ. 1938. **8**, № 2. С. 291.
4. *Климонтович Ю. Л., Силин В. П.* // УФН. 1960. **70**. С. 247.

Поступила в редакцию
13.11.96