

УДК 550.343

РЕЗОНАНСНЫЕ ТРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЕЙСМОВОЛН В ВЯЗКОУПРУГИХ ГЕОСРЕДАХ

С. А. Арсеньев, Н. К. Шелковников

(кафедра физики моря и вод суши)

Теоретически смоделированы нелинейные параметрические взаимодействия сейсмических волн, наблюдаемые в реальных геосредах. Получены формулы для конкретных расчетов.

Недавние экспериментальные исследования особенностей нелинейных взаимодействий сейсмических волн в геосредах показали, что возможны их трехволновые взаимодействия, обусловленные нелинейностью [1–3], в частности наблюдается эффект распадной неустойчивости высокочастотной волны, позволяющий уверенно выделять сигналы на низких частотах за счет снижения уровня высокочастотных сейсмических шумов [4] и увеличения мощности низкочастотного сигнала. Подобный эффект позволяет реализовать идею создания параметрических приемников низкочастотных сейсмических волн и расширить арсенал вибровоздействий на нефтегазоносные пласты [5]. Представляется важным поэтому изучить проблему параметрических взаимодействий теоретически, используя достаточно реалистичную модель геосреды.

В настоящей работе мы будем использовать нелинейную модель вязкоупругой геосреды, предложенную нами ранее в работах [6, 7], где было получено следующее нелинейное эволюционное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 u^2}{\partial x \partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_* \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

описывающее процесс распространения сейсмических волн вдоль определенного направления x . В (1) обозначено: $\beta = 1/2$, $c^2 = \mu/\rho$ — скорость сейсмических волн, μ — модуль сдвига, $\omega_* = \mu/\eta_2 = 1/\vartheta$ (время релаксации), u — скорость деформаций геосреды [6, 7].

Будем искать решение уравнения (1) в виде суперпозиции трех взаимодействующих волн:

$$u = A_1(x) \cos \xi_1 + A_2(x) \cos \xi_2 + A_3(x) \cos \xi_3. \quad (2)$$

Здесь

$$A_i(x) = a_i(x) \exp(-k_i x), \quad (3)$$

$$\xi_i(x, t) = \omega_i t - k_i x + \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

$$\omega_i = 2c^2 k_i / (\omega_*^2 + 4c^2 k_i^2)^{1/2}. \quad (5)$$

Частоты резонансно взаимодействующих волн удовлетворяют условию синхронизма: $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, а волновые векторы — условию $k_3 = k_1 + k_2 + \Delta$, где Δ — расстройка, определяемая с помощью дисперсионного соотношения (5).

Подставим (2) в (1). Используя метод медленно меняющихся амплитуд [8], получим

$$A'_1 - \sigma_1 A_2 A_3 \sin \Phi + \delta_1 A_1 = 0, \quad (6)$$

$$A'_2 - \sigma_2 A_1 A_3 \sin \Phi + \delta_2 A_2 = 0, \quad (7)$$

$$A'_3 - \sigma_3 A_1 A_2 \sin \Phi + \delta_3 A_3 = 0. \quad (8)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x и

$$\sigma_1 = \beta k_1 (k_3 - k_2) / 2\omega_1, \quad \delta_1 = \omega_* k_1 / 2\omega_1, \quad (9)$$

$$\sigma_2 = \beta k_2 (k_3 - k_1) / 2\omega_2, \quad \delta_2 = \omega_* k_2 / 2\omega_2, \quad (10)$$

$$\sigma_3 = \beta k_3 (k_1 + k_2) / 2\omega_3, \quad \delta_3 = \omega_* k_3 / 2\omega_3, \quad (11)$$

$$\Phi' - \Delta - [(\sigma_1 A_2 A_3 / A_1) + (\sigma_2 A_1 A_3 / A_2) - \sigma_3 A_1 A_2 / A_3] \cos \Phi = 0. \quad (12)$$

При отсутствии трения ($\omega_* = 0$) уравнения (6)–(12) дают соотношения Мэнли–Роу [8], устанавливающие закон сохранения волнового действия (энергии, деленной на частоту):

$$c_1^2 (A_1^2 - E_1^2) / \omega_1 = c_2^2 (A_2^2 - E_2^2) / \omega_2 = c_3^2 (A_3^2 - E_3^2) / \omega_3. \quad (13)$$

Здесь E_i — амплитуды волн, возбуждающихся в источнике при $x = 0$. Из (13) видно, что если амплитуда и энергия имеющейся в геосреде высокочастотной волны ω_3 уменьшаются, то энергия переходит одновременно в низкочастотные волны ω_1 и ω_2 и их амплитуды A_1 и A_2 возрастают. Верно и обратное. Но возникновение волн с частотами, жестко связанными с частотой внешнего воздействия, есть по определению параметрическое возбуждение волн [8]. Оно всегда возникает в нелинейной среде с дисперсией при наличии интенсивной волны накачки.

Рассмотрим подробнее случай низкочастотной накачки, когда в геосреде имеется мощная волна с частотой ω_2 . Пусть $A_2 \equiv A_p = \text{const}$ и $\varphi_2 = \text{const}$. Тогда при $\Delta = 0$, $\Phi = -\pi/2$ уравнения (6)–(12) дают

$$A'_1 = -\sigma_1 A_3 A_p, \quad A'_3 = \sigma_3 A_1 A_p. \quad (14)$$

Система уравнений (14) имеет решение

$$A_1 = A_{10} \cos(|\Gamma|x), \quad (15)$$

$$A_3 = (k_3/k_1)^{1/2} A_{10} \sin(|\Gamma|x), \quad (16)$$

в котором

$$\Gamma = \frac{\beta}{2} \frac{A_p}{c^2} (\omega_1 \omega_3)^{1/2} = \frac{A_p}{4} \left[\frac{\rho^2}{\mu^2} \omega_1 (\omega_1 + \omega_p) \right]^{1/2}. \quad (17)$$

Решение (15), (16) при $x = 0$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} A_1(0) &= A_{10}, & A_3(0) &= 0, \\ A'_1(0) &= 0, & A'_3(0) &= \sigma_3 A_{10} A_p. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение (15), (16) означает, что взаимодействие волн в геосреде проявляется в виде пространственных биений с периодом $\pi/|\Gamma|$, который уменьшается с увеличением амплитуды волны накачки A_p и плотности геосреды ρ и уменьшением модуля сдвига μ . Из (16) легко найти соотношение между максимальными амплитудами взаимодействующих волн:

$$(A_3^2)_{\max} / (A_1^2)_{\max} = k_3/k_1 = \omega_3/\omega_1, \quad (19)$$

которое соответствует соотношениям Мэнли–Роу (13). Поскольку максимальная частота высокочастотного сигнала ω_3 превышает частоту ω_1 ($\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 > \omega_1$), из (19) следует, что мощность сигнала ω_3 превышает мощность сигнала ω_1 : $(A_3^2)_{\max} > (A_1^2)_{\max}$. Подобное преобразование энергии можно использовать для создания параметрического усилителя с одновременным преобразованием частоты. На его вход подаются сигналы ω_2 и ω_1 . На выходе, на определенном расстоянии от источника волн, равном

$$x_0 = (2n + 1)\pi/2|\Gamma|, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

получается усиленный сигнал частоты ω_3 . Максимальный коэффициент усиления по мощности определяется соотношением ω_3/ω_1 . Опыт создания подобных параметрических усилителей в радиофизике [8, 9] показал, что они обладают высокой стабильностью и низким уровнем шумов.

Большой практический интерес представляет случай высокочастотной накачки, когда в геосреде имеется мощная волна с частотой ω_3 и амплитудой $A_3 \equiv A_h \gg A_{10}$, где A_{10} — амплитуда волны с частотой ω_2 у источника в точке $x = 0$: $A_1(0) = A_{10}$. Предполагается, что волны с частотой ω_2 в источнике нет: $A_2(0) = 0$. Она может возникнуть в геосреде только в результате нелинейных взаимодействий. Уравнения (6)–(12) при условиях $\varphi_3 = \text{const}$, $\Phi(0) = \pi/2$ и $\Delta = 0$ имеют вид

$$A'_1 = \sigma_1 A_2 A_h, \quad A'_2 = \sigma_2 A_1 A_h. \quad (20)$$

Решение системы (20) есть

$$\begin{aligned} A_1(0) &= A_{10} \text{ch}(x A_h \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}), \\ A_2 &= \sqrt{\sigma_2/\sigma_1} A_{10} \text{sh}(x A_h \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}). \end{aligned} \quad (21)$$

Оно удовлетворяет граничным условиям: при $x = 0$

$$\begin{aligned} A_1(0) &= A_{10}, & A_2(0) &= 0, \\ A'_1(0) &= 0, & A'_2(0) &= \sigma_2 A_{10} A_h. \end{aligned} \quad (22)$$

Из формул (21) следует, что по мере распространения сейсмической волны в геосреде происходит экспоненциальное нарастание амплитуд волн на обеих частотах (ω_1 и ω_2), которые увеличивают свою энергию за счет

волны накачки. Коэффициент усиления определяется скоростью нарастания амплитуд волн ω_1 и ω_2 :

$$\Gamma^0 = \frac{\beta}{2} A_h \sqrt{\frac{k_1(k_3 - k_2)(k_3 - k_1)k_2}{\omega_1 \omega_2}}. \quad (23)$$

При отсутствии расстройки ($\Delta = 0$) формулу (23) можно записать в виде

$$\Gamma^0 = \frac{A_h}{4} \sqrt{\frac{k_1^2 k_2^2}{\omega_1 \omega_2}} = \frac{A_h}{4} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2}{c^2}}. \quad (24)$$

Отсюда следует, что скорость нарастания амплитуды зависит от частоты по закону $\Gamma_0 \simeq (\omega_1 \omega_2)^{1/2} = [(\omega_1(\omega_h - \omega_1))]^{1/2}$. Это выражение достигает максимума при $\omega_1 = \omega_h/2$. Следовательно,

$$(\Gamma_0)_{\max} = \frac{A_h}{8} \omega_h \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \quad (25)$$

т.е. скорость нарастания амплитуд низкочастотных волн увеличивается с ростом амплитуды и частоты волны накачки, а также плотности геосреды и уменьшается с ростом модуля сдвига.

Полученные формулы показывают, что в вязкоупругих геосредах возможна распадная неустойчивость высокочастотной волны ω_h , при которой энергия переносится в низкочастотную область спектра, порождая субгармонику $\omega_h/2$, что действительно наблюдается в экспериментах [1–3]. Для того чтобы в общем случае $\Delta \neq 0$, $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$ определить условия неустойчивости, необходимо воспользоваться методами исследования на неустойчивость систем третьего порядка, подобных (6)–(12), которые разработаны в теории нелинейных колебаний и волн [8–10]. Выпишем здесь конечный результат соответствующего исследования в виде условия параметрического усиления бегущих сейсмических волн при высокочастотной накачке:

$$|\Delta| < (\delta_1 + \delta_2) \sqrt{(\sigma_1 \sigma_2 / \delta_1 \delta_2) A_h - 1}. \quad (26)$$

Это условие, учитывая определения (9)–(12), можно записать в виде

$$|k_3 - k_1 - k_2| < \frac{1}{4} \left(\frac{k_1}{\omega_1} + \frac{k_2}{\omega_2} \right) \sqrt{(k_3 - k_2)(k_3 - k_1) A_h - 1}. \quad (27)$$

Оно аналогично по форме условию неустойчивости параметрически возбуждаемого колебательного контура [11]. Из (26), (27) следует, что параметрическое усиление невозможно при амплитуде накачки A_h меньше порогового значения

$$A_t = \sqrt{\frac{\delta_1 \delta_2}{\sigma_1 \sigma_2}} = 2\omega_* \sqrt{\frac{1}{(k_3 - k_2)(k_3 - k_1)}}. \quad (28)$$

Как видим, пороговое значение амплитуды возрастает с ростом частоты трения ω_* (уменьшением времени релаксации геосреды ϑ) и с ростом расстройки Δ .

Таким образом, распадная неустойчивость высоко-частотной волны в вязкоупругой среде возможна, если значение амплитуды этой волны превышает порог (28). В противном случае нелинейные взаимодействия волн проявляются в виде пространственных биений их амплитуд и мощностей. Формулы для расчетов биений легко получить из (6)–(12), рассматривая случай $\Delta = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Для систем, аналогичных (6)–(12), он был впервые исследован в оптике и радиофизике [12].

Пусть в источнике при $x = 0$ имеют место условия

$$\begin{aligned} A_1(0) &= A_{10}, & A_2(0) &= 0, \\ A_h(0) &= A_{h0}, & \Phi(0) &= \Phi_0 = \pi/2. \end{aligned} \quad (29)$$

Решение системы (6)–(12) при условиях (29), $\delta_1 = \delta_2 = 0$ и $\Delta = 0$ выражается через эллиптические функции sn, cn и dn:

$$A_1 = (\sigma_1/\sigma_3)^{1/2} \frac{A_{h0}}{k} \operatorname{dn} \left[K(k) - A_{h0} \frac{x}{k} (\sigma_1\sigma_2)^{1/2} \right], \quad (30)$$

$$A_2 = (\sigma_2/\sigma_3)^{1/2} A_{10} \operatorname{cn} \left[K(k) - A_{h0} \frac{x}{k} (\sigma_1\sigma_2)^{1/2} \right], \quad (31)$$

$$A_3 \equiv A_h = A_{h0} \operatorname{sn} \left[K(k) - A_{h0} \frac{x}{k} (\sigma_1\sigma_2)^{1/2} \right]. \quad (32)$$

Здесь

$$K(k) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \quad (33)$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. Решение (30)–(33) описывает биения амплитуд взаимодействующих волн с пространственным периодом

$$\Lambda_0 \cong K(k)/A_{h0} (\sigma_1\sigma_2)^{1/2}. \quad (34)$$

Максимальное усиление низкочастотного сигнала определяется формулой

$$(I_1)_{\max}/I_{10} = 1 + \omega_1 A_{h0}^2 / \omega_h A_{10}^2. \quad (35)$$

Следовательно, если отношение $\omega_1\omega_h$ не слишком мало, кпд параметрического усилителя низкочастотного сейсмосигнала может достигать единиц и десятков процентов. Потери и отклонения от условий синхронизма ухудшают характеристики усилителя.

Благодарим Российский фонд фундаментальных исследований за поддержку (грант №95-05-16028а).

Литература

1. Береснев И. А., Соловьев В. С., Шалашов Г. М. // Проблемы нелинейной сейсмологии. М., 1987. С. 180.
2. Соловьев В. С. // Там же. С. 164.
3. Николаев А. В. // Вестн. АН СССР. 1984. № 10. С. 5.
4. Рыкунов Л. Н. Микросейсм. М., 1967.
5. Николаевский В. Н. // ДАН СССР. 1989. **307**, №3. С. 570.
6. Арсеньев С. А., Рыкунов Л. Н., Шелковников Н. К. // ДАН. 1994. **338**, №2. С. 225.
7. Арсеньев С. А., Вахрушев М. М., Шелковников Н. К. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 6. С. 80.
8. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., 1990.
9. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. М., 1978.
10. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., 1964.
11. Ахманов С. А., Кравцов Ю. А. // Изв. вузов, Радиофизика. 1962. **5**, №2. С. 144.
12. Погорелова Э. В., Хохлов Р. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1962. № 5. С. 62.

Поступила в редакцию
09.09.96

УДК 550.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВНУТРЕННЕГО ЯДРА ЗЕМЛИ ДЛЯ НЕРАВНОВЕСНОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

С. Л. Пасынок

(ГАИИШ)

Решена задача о влиянии оболочки земного ядра на колебания внутреннего ядра Земли. Получены уточненные (по сравнению с Шлихтером и Буссе) формулы для частот колебаний. Оказалось, что выбор модели оболочки мало влияет на частоту колебаний и значительно влияет на смещение ядра.

Введение

Знание строения и характера движения внутреннего ядра Земли важно для решения задач земного магнетизма, геофизики, астрономии. Вполне возможна связь этого явления с землетрясениями.

Методика исследований

Целью настоящей работы является оценка возможного смещения внутреннего ядра Земли и частот его свободных колебаний в поле тяготения твердой несимметричной оболочки Земли и жидкого ядра.