Таким образом, распадная неустойчивость высокочастотной волны в вязкоупругой среде возможна, если значение амплитуды этой волны превышает порог (28). В противном случае нелинейные взаимодействия волн проявляются в виде пространственных биений их амплитуд и мощностей. Формулы для расчетов биений легко получить из (6)–(12), рассматривая случай $\Delta - 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Для систем, аналогичных (6)–(12), он был впервые исследован в оптике и радиофизике [12].

Пусть в источнике при $x = 0$ имеют место условия

$$\begin{aligned} &A_1(0) = A_{10}\,, \qquad A_2(0) = 0\,, \\ &A_h(0) = A_{h0}\,, \qquad \Phi(0) = \Phi_0 = \pi/2\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Решение системы (6)–(12) при условиях (29), $\delta_1 = \delta_2 = 0$ и $\Delta = 0$ выражается через эллиптические функции sn, cn и dn:

$$A_1 = (\sigma_1/\sigma_3)^{1/2}\frac{A_{h0}}{k}\,\mathrm{dn}\left[K(k) - A_{h0}\frac{x}{k}(\sigma_1\sigma_2)^{1/2}\right], \tag{30}$$

$$A_2 = (\sigma_2/\sigma_3)^{1/2}A_{10}\,\mathrm{cn}\left[K(k) - A_{h0}\frac{x}{k}(\sigma_1\sigma_2)^{1/2}\right], \tag{31}$$

$$A_3 \equiv A_h = A_{h0}\,\mathrm{sn}\left[K(k) - A_{h0}\frac{x}{k}(\sigma_1\sigma_2)^{1/2}\right]. \tag{32}$$

Здесь

$$K(k) = \int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \tag{33}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. Решение (30)–(33) описывает биения амплитуд взаимодействующих волн с пространственным периодом

$$\Lambda_0 \cong K(k)/A_{h0}\,(\sigma_1\sigma_2)^{1/2}\,. \tag{34}$$

Максимальное усиление низкочастотного сигнала определяется формулой

$$(I_1)_{\max}/I_{10} = 1 + \omega_1 A_{h0}^2/\omega_h A_{10}^2\,. \tag{35}$$

Следовательно, если отношение $\omega_1\omega_h$ не слишком мало, кпд параметрического усилителя низкочастотного сейсмосигнала может достигать единиц и десятков процентов. Потери и отклонения от условий синхронизма ухудшают характеристики усилителя.

Благодарим Российский фонд фундаментальных исследований за поддержку (грант № 95-05-16028а).

Литература

1. *Береснев И. А., Соловьев В. С., Шалашов Г. М.* // Проблемы нелинейной сейсмики. М., 1987. С. 180.
2. *Соловьев В. С.* // Там же. С. 164.
3. *Николаев А. В.* // Вестн. АН СССР. 1984. № 10. С. 5.
4. *Рыкунов Л. Н.* Микросейсмы. М., 1967.
5. *Николаевский В. Н.* // ДАН СССР. 1989. **307**, № 3. С. 570.
6. *Арсеньев С. А., Рыкунов Л. Н., Шелковников Н. К.* // ДАН. 1994. **338**, № 2. С. 225.
7. *Арсеньев С. А., Вахрушев М. М., Шелковников Н. К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 6. С. 80.
8. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М., 1990.
9. *Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н.* Основы теории колебаний. М., 1978.
10. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. М., 1964.
11. *Ахманов С. А., Кравцов Ю. А.* // Изв. вузов, Радиофизика. 1962. **5**, № 2. С. 144.
12. *Погорелова Э. В., Хохлов Р. В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1962. № 5. С. 62.

Поступила в редакцию
09.09.96

УДК 550.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВНУТРЕННЕГО ЯДРА ЗЕМЛИ ДЛЯ НЕРАВНОВЕСНОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

С. Л. Пасынок

(ГАИШ)

Решена задача о влиянии оболочки земного ядра на колебания внутреннего ядра Земли. Получены уточненные (по сравнению с Шлихтером и Буссе) формулы для частот колебаний. Оказалось, что выбор модели оболочки мало влияет на частоту колебаний и значительно влияет на смещение ядра.

Введение

Знание строения и характера движения внутреннего ядра Земли важно для решения задач земного магнетизма, геофизики, астрономии. Вполне возможна связь этого явления с землетрясениями.

Методика исследований

Целью настоящей работы является оценка возможного смещения внутреннего ядра Земли и частот его свободных колебаний в поле тяготения твердой несимметричной оболочки Земли и жидкого ядра.

Движение твердого ядра Земли исследовано в следующей модели. Твердое ядро считалось однородным и сферическим, плотность его σ_i, масса m_i, радиус r_i. Оно погружено в однородное жидкое ядро с плотностью σ_e, массой m_e, ограниченное сферической границей радиуса r_e. Ось вращения была совмещена с осью Oz прямоугольной декартовой системы координат с началом в центре Земли и осями, жестко связанными с ней. Уравнение движения твердого ядра имеет вид

$$\frac{d^2x_k}{dt^2}=\sum_j \frac{F_k^{(j)}}{m_j}\,, \tag{1}$$

где $F_k^{(j)}$ — k-компонента j-й силы, действующей на ядро; $k=1,2,3$.

Аномальная (негидростатическая) часть гравитационных сил моделировалась простым слоем, расположенным на границе ядро-мантия. Его силовая функция ΔU в области, занятой ядром, представима в виде разложения по шаровым функциям [1]:

$$\Delta U = \frac{1}{r_e}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{r}{r_e}\right)^n \times \times (A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda) P_n^m(\cos\theta)\,.$$

В процессе решения (1) использовались члены с $n = 1,\ 2$. Выражение для силы Архимеда было получено путем интегрирования поверхностной плотности сил гидростатического давления по поверхности твердого ядра. Гидростатическое давление было получено в результате решения уравнения гидростатического равновесия. Тензор присоединенных масс в силу симметрий задачи был взят в следующем диагональном виде:

$$m_{11}=m_i\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\alpha_e\,,\quad m_{22}=m_i\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\alpha_e\,,\quad m_{22}=m_i\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\alpha_e\,,$$
$$m_{ik}=0 \quad \text{при} \quad i\neq k\,,$$

где $i,\ k = 1,\ 2,\ 3$, а α и далее α_p — коэффициенты, зависящие от внутреннего строения ядра Земли. Оказалось, что магнитные силы при правдоподобных предположениях о величине магнитного момента твердого ядра возможно не учитывать. Тогда мы приходим к уравнениям движения твердого ядра следующего вида:

$$\left(1+\alpha_e\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)\frac{d^2x}{dt^2}-2\Omega\frac{dy}{dt}-\Omega^2x\left(1-\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)= =-\frac{4}{3}\pi G\sigma_e\left(1-\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)x+\frac{A_{11}}{r_e^2}+\frac{\partial R}{\partial x}\,,$$

$$\left(1+\alpha_e\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)\frac{d^2y}{dt^2}-2\Omega\frac{dx}{dt}-\Omega^2y\left(1-\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)= =-\frac{4}{3}\pi G\sigma_e\left(1-\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)y+\frac{B_{11}}{r_e^2}+\frac{\partial R}{\partial y}\,,$$

$$\left(1+\alpha_p\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{4}{3}\pi G\sigma_e\left(1-\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)z+\frac{A_{10}}{r_e^2}+\frac{\partial R}{\partial z}\,,$$

где $R=\Delta u-\dfrac{A_{11}}{r_e^2}x-\dfrac{B_{11}}{r_e^2}y-\dfrac{A_{10}}{r_e^2}z$ — возмущающая функция.

Введем обозначения:

$$\Omega'=\frac{\Omega}{1+\alpha_e\dfrac{\sigma_e}{\sigma_i}}\,,$$

$$\omega_p^2=\frac{(4/3)\pi G\sigma_e\left(1-\dfrac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)}{1+\alpha_p\dfrac{\sigma_e}{\sigma_i}}\,,$$

$$\omega_e^2=\frac{\left((4/3)\pi G\sigma_e-\Omega^2\right)\left(1-\dfrac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)}{1+\alpha_e\dfrac{\sigma_e}{\sigma_i}}$$

и сделаем замену переменных: $x'^i = x^i - x_0^i$, где

$$x_0^i=\left(\begin{array}{c}\dfrac{A_{11}}{\left(1+\alpha_e\dfrac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)r_e^2\omega_e^2}\,,\\ \dfrac{B_{11}}{\left(1+\alpha_e\dfrac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)r_e^2\omega_e^2}\,,\\ \dfrac{A_{10}}{\left(1+\alpha_p\dfrac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)r_e^2\omega_p^2}\end{array}\right)$$

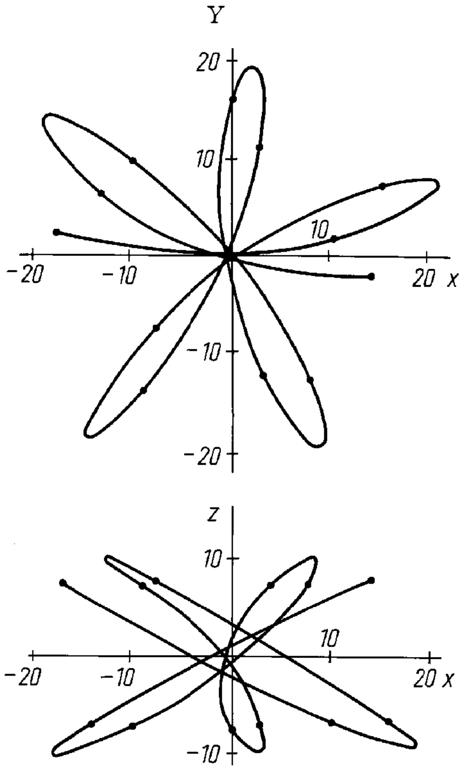
— вектор точки положения равновесия твердого ядра в невозмущенной задаче. Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x'}{dt^2}-2\Omega'\frac{dy'}{dt}+\omega_e^2x'=\frac{1}{\left(1+\alpha_e\dfrac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)}\frac{\partial R}{\partial x}\,,\\
&\frac{d^2y'}{dt^2}-2\Omega'\frac{dy'}{dt}+\omega_e^2y'=\frac{1}{\left(1+\alpha_e\dfrac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)}\frac{\partial R}{\partial y}\,,\\
&\frac{d^2z'}{dt^2}+\omega_e^2z'=\frac{1}{\left(1+\alpha_p\dfrac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)}\frac{\partial R}{\partial z}\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Полагая в невозмущенном случае правые части в (2) равными нулю и обозначая $w_\pm=-\Omega'\pm\sqrt{\Omega'^2+\omega_e^2}$, получим невозмущенное решение в форме суперпозиции двух линейно независимых решений вида

$$\begin{aligned}
x' &= A_x\cos(\omega t+\varphi_x)\,,\\
y' &= A_y\sin(\omega t+\varphi_y)\,,\\
z' &= A_z\cos(\omega_p t+\varphi_z)\,,
\end{aligned}$$

где ω принимает значения $w_\pm$, а $A_x = A_y$. То есть твердое ядро в этом приближении колеблется около положения равновесия вдоль оси Oz, а в плоскости Oxy его движение представляет собой суперпозицию движений по двум концентрическим эллипсам (рисунок).



Движение центра твердого ядра при $A_x=A_y=A_z=10$. Точки расставлены через каждые четверть периода колебаний ядра вдоль оси Oz

Возмущенная задача решалась для квадрупольной части возмущающей функции:

$$R=Q=\left(3A_{22}-\frac{A_{20}}{2}\right)x^2-\left(3A_{22}+\frac{A_{20}}{2}\right)y^2+ \\ +A_{20}z^2+3A_{21}xz+3B_{21}yz+6B_{22}xy\,.$$

Вводя поправку к координатам положения равновесия $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, равную $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\Delta x_n, \Delta y_n, \Delta z_n)$, где

$$\Delta x_n=\frac{(1-\sigma_e/\sigma_i)}{r_e^3\omega_e^2\,(1+\alpha_e\sigma_e/\sigma_i)}\,((6A_{22}-A_{20})\Delta x_{n-1}+ \\ +3A_{21}\Delta z_{n-1}+6B_{22}\Delta y_{n-1})\ ,$$

$$\Delta y_n=\frac{(1-\sigma_e/\sigma_i)}{r_e^3\omega_e^2\,(1+\alpha_e\sigma_e/\sigma_i)}\,(6B_{22}\Delta x_{n-1}- \\ -(6A_{22}-A_{20})\Delta y_{n-1}+3B_{21}\Delta z_{n-1})\ ,$$

$$\Delta z_n=\frac{(1-\sigma_e/\sigma_i)}{r_e^3\omega_e^2\,(1+\alpha_p\sigma_e/\sigma_i)}\,(3A_{21}\Delta x_{n-1}+ \\ +3B_{21}\Delta y_{n-1}+2A_{20}\Delta z_{n-1})\ ,$$

$$n=1,\,2,\ldots,\qquad \Delta x_0^i=x_0^i\,,$$

мы запишем уравнения движения в форме (2), где используем уточненные штрихованные координаты и $\partial R(x'_k)/\partial x'_j$.

В результате решения этих уравнений получим, что возмущенное решение представляет собой суперпозицию двух движений вида

$$x'=A_x\cos(\omega_x t+\varphi_x)\,,$$
$$y'=A_y\sin(\omega_y t+\varphi_y)\,,$$
$$z'=A_z\cos(\omega_z t+\varphi_z)\,,$$

где ω_x и ω_y принимают значения $\omega_1^{(k)}$ и $\omega_2^{(k)}$, а $\omega_z=\omega_3$,

$$\omega_j^{(k)}=w_k+(-1)^j\,\frac{(6A_{22}+(-1)^jA_{20})\Sigma}{2w_kr_e^3A_e}\,,$$
$$\omega_3=\omega_p-\frac{A_{20}\Sigma}{\omega_pr_e^3A_p}\,,$$
$$\Sigma=1-\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\,,\quad k=\pm\,,\quad A_{e,p}=1+\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\alpha_{e,p}\,,\quad j=1,\,2\,.$$

Амплитуды и фазы изменяются со временем в соответствии с уравнениями

$$\frac{dA_x}{dt}=-\frac{\Sigma}{2w_kr_e^3A_e}\,((6A_{22}+A_{20})A_x\cos 2\Phi_x+ \\ +3A_{21}A_z\,(\sin(\Phi_x+\Phi_z)+\sin(\Phi_x-\Phi_z))+ \\ +6B_{22}A_y\,(\cos(\Phi_x-\Phi_y)-\cos(\Phi_x+\Phi_y)))\ ,$$

$$\frac{dA_y}{dt}=-\frac{\Sigma}{2w_kr_e^3A_e}\,((6A_{22}+A_{20})A_y\sin 2\Phi_y- \\ -3B_{21}A_z\,(\cos(\Phi_y+\Phi_z)+\cos(\Phi_y-\Phi_z))- \\ -6B_{22}A_x\,(\cos(\Phi_x+\Phi_y)+\cos(\Phi_x-\Phi_y)))\ ,$$

$$\frac{dA_z}{dt}=-\frac{\Sigma}{2\omega_pr_e^3A_p}\,(A_{20}A_z\sin 2\Phi_z+ \\ +3A_{21}A_x\,(\sin(\Phi_x+\Phi_z)+\sin(\Phi_z-\Phi_x))+ \\ +3B_{21}A_y\,(\cos(\Phi_y-\Phi_z)-\cos(\Phi_y+\Phi_z)))\ ,$$

$$\frac{d\varphi_x}{dt}=-\frac{\Sigma}{2w_kr_e^3A_eA_x}\,((6A_{22}+A_{20})A_x\cos 2\Phi_x+ \\ +\,3A_{21}A_z\,(\cos(\Phi_x+\Phi_z)+\cos(\Phi_x-\Phi_z))+ \\ +6B_{22}A_y\,(\sin(\Phi_x+\Phi_y)-\sin(\Phi_x-\Phi_y)))\ ,$$

$$\frac{d\varphi_y}{dt}=-\frac{\Sigma}{2w_kr_e^3A_eA_y}\,((6A_{22}+A_{20})A_y\cos 2\Phi_y+ \\ +\,3B_{21}A_z\,(\sin(\Phi_y+\Phi_z)+\sin(\Phi_y-\Phi_z))+ \\ +6B_{22}A_x\,(\sin(\Phi_x+\Phi_y)-\sin(\Phi_x-\Phi_y)))\ ,$$

$$\frac{d\varphi_z}{dt}=-\frac{\Sigma}{2\omega_pr_e^3A_pA_z}\,(2A_{20}A_z\cos 2\Phi_z+ \\ +3B_{21}A_y\,(\sin(\Phi_y+\Phi_z)+\sin(\Phi_y-\Phi_z))+ \\ +3A_{21}A_x\,(\cos(\Phi_x+\Phi_z)+\cos(\Phi_x-\Phi_z)))\ ,$$

где $\Phi_i=\omega_it+\varphi_i$, $i=x,y,z$. Для внесения полной ясности необходимо отметить, что возмущенные уравнения с данной возмущающей функцией все еще являются линейными и могут быть проинтегрированы точно. Предложенный метод решения был применен в силу большей наглядности результата, записанного именно в такой форме, причем практически без ущерба для точности. Кроме того, в дальнейшем планируется использовать возмущающую функцию, ведущую к нелинейным уравнениям.

Для максимальной вариации ускорения свободного падения, обусловленной полярными колебаниями, в точке с географической широтой φ было получено

$$\Delta g=\frac{8}{3}\pi G\left(\frac{r_i}{R}\right)^3(\sigma_i-\sigma_e)A\sin\varphi\,, \qquad (3)$$

где A — амплитуда колебаний, а R — средний радиус Земли.

Используя известную формулу для энергии гармонических колебаний:

$$E = \frac{m_i \omega^2 A^2}{2},$$

где ω — частота полярных колебаний, а также (3), нетрудно получить для энергии колебаний следующую оценку:

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 r_i^3 \sigma_e(\sigma_i - \sigma_e) G A^2 . \qquad (4)$$

Формулы (4) и (3) находятся в соответствии с результатами Буссе [2].

Обсуждение результатов

Полученные оценки показывают, что некоторые из частот попадают внутрь приливного окна (речь идет о периодах в диапазоне от часа до полусуток) и поэтому свободные колебания ядра Земли все же возможно обнаружить при современной точности и частотной обработке наблюдений.

Для модели 3 в работе [3] $A_{11} = -9,2113387$, $B_{11} = -2,1512055$, $A_{10} = 3,1725687$, $A_{22} = 41,160872$, $A_{20} = -33,121257$ (в 10^8 м^3/с^2). Эти коэффициенты связаны с безразмерными, приведенными в работе [3], соотношениями

$$A_{nm} = GM\left(\frac{a}{r_e}\right)^n C_{nm}, \quad B_{nm} = GM\left(\frac{a}{r_e}\right)^n D_{nm},$$

где a — большая полуось земного эллипсоида, G — гравитационная постоянная, а M — масса Земли. Так как тензор присоединенных масс зависит от внутреннего строения ядра Земли и точно не известен, то при вычислении нижеследующих результатов он был положен равным нулю. Результаты же эти таковы:

$$x_0 = -479,88, \quad y_0 = -299,40, \quad z_0 = 165,05 \ \text{(в м)};$$

частоты (в 10^{-4} с$^{-1}$):

$$\omega_1^{(1)} = 3,322369, \quad \omega_1^{(2)} = -4,77695,$$
$$\omega_2^{(1)} = 3,323207, \quad \omega_2^{(2)} = -4,77751,$$
$$\omega_3 = 3,987479;$$

соответствующие периоды:

$T_1^{(1)} = 5$ ч 15 мин 11,76 с, $T_1^{(2)} = 3$ ч 39 мин 13,12 с,

$T_2^{(1)} = 5$ ч 15 мин 6,99 с, $T_2^{(2)} = 3$ ч 39 мин 11,51 с,

$T_3 = 4$ ч 22 мин 37,29 с.

Для сравнения: невозмущенные $w_+ = 3,322844 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$, $w_- = -4,777285 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$, а соответствующие периоды: $T_+ = 5$ ч 15 мин 9,06 с, $T_- = 3$ ч 39 мин 12,21 с. Для широты $\varphi = 45°$ в случае полярных колебаний были получены данные, приведенные в таблице.

Для поддержания и возбуждения таких колебаний достаточно энергии землетрясений.

A (м)	0,01	0,1	1	10	100	1000
Δg (м/с^2)	$1,7 \cdot 10^{-11}$	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$
E (эрг)	$7,6 \cdot 10^{18}$	$7,6 \cdot 10^{20}$	$7,6 \cdot 10^{22}$	$7,6 \cdot 10^{24}$	$7,6 \cdot 10^{26}$	$7,6 \cdot 10^{28}$

Заключение

В дальнейшем планируется уточнить коэффициенты в разложении возмущающего потенциала и местонахождение положения равновесия твердого ядра.

Выражаю благодарность научному руководителю д-ру физ.-мат. наук Н. А Чуйковой за плодотворные дискуссии и помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-05-64342).

Литература

1. *Дубошин Г. Н.* Теория притяжения. М., 1961. С. 260.
2. *Busse F. H.* // J. Geophys.Res. 1974. **79**, N 5. P. 753.
3. *Чуйкова Н. А., Казарян С. А., Пасынок С. Л.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 2. С. 40 (Moscow University Phys. Bull. 1977. № 2).

Поступила в редакцию
18.12.96