

УДК 535.42

ДИФРАКЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ И ФОКУСИРОВКЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Ю. Е. Дьяков

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Распространение импульса в пустоте рассматривается в общем случае $0 \leq \omega_0 \tau_0 < \infty$ (τ_0 — длительность, ω_0 — несущая частота) и с учетом дифракционных эффектов, обусловленных ограниченностью волнового пучка, переносящего импульс. Анализ основан на полученном в работе точном аналитическом решении (в координатно-временном представлении) нестационарного параболического уравнения. Подробно рассмотрен случай гауссовского волнового пакета с частотным и волновым chirпом.

1. Рассмотрим слабо расходящуюся волну E , излучаемую пространственно ограниченным источником и распространяющуюся в пустоте со скоростью c вдоль оси z . Можно показать, что такая волна описывается нестационарным параболическим уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} - \frac{c}{2} \Delta_{\perp} \right) E = 0, \quad (1)$$

$$\theta = t - \frac{z}{c}, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

решение которого, удовлетворяющее граничному условию

$$E(\mathbf{r}, z = 0, t) = E_0(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

имеет вид

$$E(\mathbf{r}, z, \theta) = \frac{1}{2\pi cz} \frac{\partial}{\partial \theta} \int E^0 \left(\mathbf{r}_1, \theta - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2}{2cz} \right) d^2 r_1, \quad (3)$$

или

$$E = \dot{\mathcal{E}}, \quad (4)$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, z, \theta) = \frac{1}{2\pi cz} \int E^0 \left(\mathbf{r}_1, \theta - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2}{2cz} \right) d^2 r_1,$$

где точка означает дифференцирование по времени θ . Согласно (3) в дальней зоне

$$E(\mathbf{r}, z \rightarrow \infty, \theta) = \frac{1}{2\pi cz} \frac{\partial}{\partial \theta} \int E^0 \left(\mathbf{r}_1, \theta - \frac{r^2}{2cz} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_1}{cz} \right) d^2 r_1. \quad (5)$$

2. При фокусировке входного поля ахроматической линзой с фокусным расстоянием f поле (2) на входе линзы трансформируется в поле $E^0(\mathbf{r}, t + r^2/(2cf))$ на выходе линзы. Соответственно вместо (4) для поля в области $z > 0$ получим выражение

$$E(\mathbf{r}, z, \theta) = -\frac{1}{2\pi cz} \frac{\partial}{\partial \theta} \int E^0 \left(\mathbf{r}_1, \theta + \frac{r_1^2}{2cf} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2}{2cz} \right) d^2 r_1. \quad (6)$$

Согласно (6) в фокальной плоскости $z = f$ поле равно

$$E(\mathbf{r}, z = f, \theta) = -\frac{1}{2\pi cf} \frac{\partial}{\partial \theta} \int E^0 \left(\mathbf{r}_1, \theta - \frac{r^2}{2cz} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_1}{cf} \right) d^2 r_1. \quad (7)$$

Если в выражении (5) формально положить $z = f$, то оно совпадает с (7). Таким образом, пространственно-временная структура несфокусированного волнового пакета в дальней зоне и структура сфокусированного пакета в фокальной плоскости в масштабе f/z полностью совпадают.

3. Зададим поле (2) на границе в виде волнового пакета

$$E^0(\mathbf{r}, t) = e^{i\omega_0 t} a(t) b(\mathbf{r}) + \text{к. с.}, \quad (8)$$

где ω_0 — несущая частота, $a(t)$ — временная огибающая длительности τ_0 , $b(r)$ — пространственная огибающая радиуса r_0 . Параметры ω_0 , τ_0 и r_0 считаются в дальнейшем произвольными, в частности $0 < \omega_0 \tau_0 < \infty$. Таким образом, ширина частотного спектра поля может быть любой, если при этом не нарушается условие слабой дифракционной расходимости волнового пакета.

4. Как следует из (5) и (8), на оси z в дальней зоне поле равно

$$E(\mathbf{r}=0, z \rightarrow \infty, \theta) = -\frac{1}{2\pi cz} \frac{\partial}{\partial \theta} \int E^0(\mathbf{r}_1, \theta) d^2 r_1 = \frac{\int b(\mathbf{r}) d^2 r}{2\pi cz} \frac{\partial}{\partial \theta} e^{i\omega_0 \theta} a(\theta) + \text{к. с.}, \quad (9)$$

т.е. $E \sim a(\theta)$ ($\omega_0 \tau_0 \gg 1$) и $E \sim \dot{a}(\theta)$ ($\omega_0 \tau_0 \ll 1$). Таким образом, из-за дифракции в случае достаточно коротких волновых пакетов возникает эффект дифференцирования огибающей (теоретически и экспериментально он изучался в акустике [1]). Аналитически проследить постепенный переход от $E \sim E^0 \sim a(\theta)$ ($z = 0$) к $E \sim \dot{a}(\theta)$ ($z \rightarrow \infty$) можно, например, в случае гауссовского волнового пакета, когда в (8)

$$a(t) = \exp \left[-\frac{t^2}{2\tau_0^2} (1 + i\beta) \right], \quad (10)$$

$$b(r) = \exp \left[-\frac{r^2}{2r_0^2} (1 + i\lambda) \right],$$

где постоянная β характеризует линейный частотный чирп, а постоянная λ — волновой чирп.

Подставляя (10) в (4) и считая здесь для простоты $\beta = \lambda = 0$, получим выражение для потенциала \mathcal{E} , справедливое во всей области $0 < z < \infty$:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r} = 0, z, \theta) = \sqrt{\pi/2} \tau_0 F(\theta) e^{v^2} [1 - \Phi(v)],$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tau_0 cz}{r_0^2} + i\omega_0 \tau_0 - \frac{\theta}{\tau_0} \right),$$

где $F(t) = \exp\left(i\omega t - \frac{t^2}{2\tau_0^2}\right)$, $\Phi(v)$ — интеграл вероятности.

5. Интегралы в выражениях (3)–(5) иногда удобно вычислять, используя спектральное представление для $a(t)$ и $b(\mathbf{r})$. Подставив в (4)

$$a(t) = \int a_\omega e^{i\omega t} d\omega, \quad b(\mathbf{r}) = \int b_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}} d^2\mathbf{x}, \quad (11)$$

получим после интегрирования по \mathbf{r} и \mathbf{x}

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, z \rightarrow \infty, \theta) = \frac{2\pi}{cz} \int e^{i\omega t} a_{\omega-\omega_0} b_{\mathbf{x}=-\omega\mathbf{r}/cz} d\omega + \text{к.с.} \quad (12)$$

Распределение энергии по сечению волнового пакета

$$U(\mathbf{r}, z) = \int |e(\mathbf{r}, z, \theta)|^2 d\theta \quad \left(\int U d^2r = W \right) \quad (13)$$

при этом будет определяться выражением

$$U(\mathbf{r}, z \rightarrow \infty) = \frac{(2\pi)^3}{c^2 z^2} \int \omega^2 |a_{\omega-\omega_0} b_{\mathbf{x}=-\omega\mathbf{r}/cz}|^2 d\omega. \quad (14)$$

В (13) W — полная энергия волнового пакета, сохраняющаяся при распространении,

$$W = W_0 = \int |E^0|^2 d^2r dt = \int |a(t)|^2 dt \cdot \int |b(\mathbf{r})|^2 d^2r. \quad (15)$$

Используя (14), эффективный радиус r_e и угол дифракционной расходимости α_D волнового пучка в дальней зоне можно оценить как

$$r_e = \left(\frac{W_0}{\pi U(0)} \right)^{1/2} = \frac{cz}{| \int b(\mathbf{r}) d^2r |} \sqrt{\frac{W_0}{2 \int \omega^2 |a_{\omega-\omega_0}|^2 d\omega}}, \quad (16)$$

$$\alpha_D = \frac{r_e}{z},$$

где согласно (11) и (14)

$$U(0) = U(\mathbf{r} = 0, z \rightarrow \infty) = \frac{(2\pi)^3}{c^2 z^2} |b_{\mathbf{x}=0}|^2 \cdot \int \omega^2 |a_{\omega-\omega_0}|^2 d\omega,$$

$$(2\pi)^2 b_{\mathbf{x}=0} = \int b(\mathbf{r}) d^2r.$$

6. Рассмотрим распространение гауссовского волнового пакета, определенного выражениями (8) и (10). В этом случае $W_0 = \pi^{3/2} \tau_0 r_0^2$ и в (11)

$$a_\omega = \frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi(1+i\beta)}} \exp\left[-\frac{\omega^2 \tau_0^2}{2(1+i\beta)}\right], \quad (17)$$

$$b_{\mathbf{x}} = \frac{r_0^2}{2\pi(1+i\lambda)} \exp\left[-\frac{\mathbf{x}^2 r_0^2}{2(1+i\lambda)}\right].$$

Подставив (17) в (12), получим

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, z \rightarrow \infty, \theta) = \frac{r_1^2}{cz\sqrt{1+\rho_1^2}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\tau_1^2 \omega_0^2}{2} \frac{\rho_1^2}{1+\rho_1^2} - \frac{\tau^2}{2\tau_1^2(1+\rho_1^2)} + \frac{i\tau\omega_0}{1+\rho_1^2}\right], \quad (18)$$

где

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1+i\beta}}, \quad r_1 = \frac{r_0}{\sqrt{1+i\lambda}}, \quad (19)$$

$$\rho_1^2 = \rho^2 \frac{1+i\beta}{1+i\lambda}, \quad \rho = \frac{r_0 r}{cz\tau_0}.$$

Обозначим через $\tilde{\omega}$ несущую частоту гауссовского импульса (18), а через $\tilde{\tau}$ его длительность. Из (18) и (19) находим, что

$$\tilde{\omega} = \omega_0 \operatorname{Re} \frac{1}{1+\rho_1^2} = \omega_0 \frac{1+\lambda^2+(1+\beta\lambda)u}{(1+u)^2+(\lambda+\beta u)^2}, \quad (u \equiv \rho^2), \quad (20)$$

$$\frac{1}{\tilde{\tau}^2} = \frac{1}{\tau_0^2} \operatorname{Re} \frac{1}{\tau_1^2(1+\rho_1^2)} = \frac{1}{\tau_0^2} \frac{1+\lambda^2+(1+\beta^2)u}{(1+u)^2+(\lambda+\beta u)^2}. \quad (21)$$

Согласно (20) и (21) на оси z частота $\tilde{\omega}$ и длительность $\tilde{\tau}$ имеют ту же величину, что и при $z = 0$: $\tilde{\omega}(u = 0) = \omega_0$, $\tilde{\tau}(u = 0) = \tau_0$. Однако при удалении от оси z эти параметры меняются. Рассмотрим это подробнее.

7. При увеличении угла наблюдения $\alpha_0 = r/z$ ($u = \rho^2 \sim \alpha_0^2$) величина $\tilde{\omega}$ или монотонно уменьшается и стремится к нулю (если $1+\beta\lambda > 0$; рисунок а, кривая 1) или ее изменение имеет немонотонный характер (если $1+\beta\lambda < 0$; рисунок а, кривая 2). В последнем случае $\tilde{\omega}$ имеет положительный максимум и отрицательный минимум, между которыми $\tilde{\omega}$ обращается в нуль и меняет знак:

$$\tilde{\omega}_{\max} = \omega_0 \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \quad (u = u_1),$$

$$\tilde{\omega} = o(u = u_0), \quad (22)$$

$$\tilde{\omega}_{\min} = -\omega_0 \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \quad (u = u_2),$$

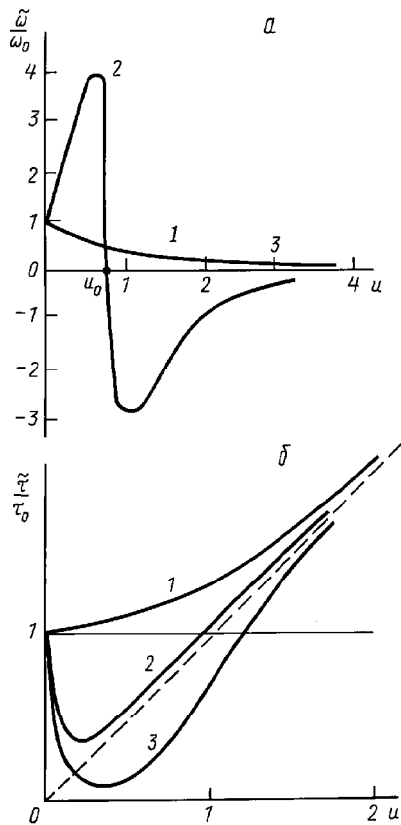
где $0 < \varepsilon < 1$,

$$\varepsilon = \frac{|\beta| + |\lambda|}{\sqrt{(1+\beta^2)(1+\lambda^2)}}, \quad (23)$$

$$u_0 = \frac{1+\lambda^2}{|1+\beta\lambda|}, \quad u_{1,2} = u_0(1 \mp \varepsilon),$$

$$\tilde{\omega}_{\max} + \tilde{\omega}_{\min} = \omega_0.$$

Как следует из (22) и (23), если $|\beta|, |\lambda| \gg 1$, то экстремумы $\tilde{\omega}$ по модулю намного превосходят ω_0 , так как в этом случае $\varepsilon \ll 1$.



Изменение несущей частоты $\tilde{\omega}$ () и импульса $\tilde{\tau}$ () при удалении точки наблюдения от оси z

8. Рассмотрим теперь изменение $\tilde{\tau}$ при увеличении угла наблюдения $\alpha_0 = r/z$. Анализ формулы (21) показывает, что при увеличении $u \sim \alpha_0^2$ величина $\tilde{\tau}$ асимптотически возрастает и кривая $\tilde{\tau}(u)$ в пределе стремится к прямой $\tilde{\tau} = \tau_0 u$ (рисунок, штриховая прямая). При этом возможны три случая:

- (а) $1 + \beta\lambda > (1 + \beta^2)/2$ — $\tilde{\tau}$ увеличивается монотонно (рисунок, кривая 1);
- (б) $0 < 1 + \beta\lambda < (1 + \beta^2)/2$ — $\tilde{\tau}$ сначала уменьшается, проходит через минимум, затем монотонно возрастает и стремится к асимптоте сверху (рисунок, кривая 2);
- (в) $1 + \beta\lambda < 0$ — $\tilde{\tau}$ меняется, как в случае (б), но стремится к асимптоте снизу (рисунок, кривая 3).

Минимальная длительность

$$\tilde{\tau}_{\min} = \tau_0 \sqrt{\frac{2}{1 + \beta^2}} \left(\sqrt{1 + \lambda^2} |\beta - \lambda| + \lambda(\beta - \lambda) \right)^{1/2} \quad (24)$$

достигается при

$$u = u_{(\min)} = \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{1 + \beta^2} \left(|\beta - \lambda| - \sqrt{1 + \lambda^2} \right). \quad (25)$$

В случаях (б) и (в) кривая $\tilde{\tau}(u)$ пересекает уровень τ_0 два раза: при $u = 0$ и $u = u_1$, т.е. в области

$$0 < u < u_1, \quad u_1 = 1 - \frac{2(1 + \beta\lambda)}{1 + \beta^2} \geq 0$$

возникает «дифракционная компрессия», при которой $\tilde{\tau} < \tau_0$.

Заметим, что при $\beta = 0, \lambda \neq 0$ реализуется случай (а), т.е. компрессия невозможна. Если $\beta \neq 0, \lambda = 0$, то имеет место случай (б); согласно (24) и (25) при этом

$$\tilde{\tau}_{\min} = \tau_0 \sqrt{\frac{2|\beta|}{1 + \beta^2}}, \quad u_{(\min)} = \frac{|\beta| - 1}{1 + \beta^2}, \quad (26)$$

и наибольшая компрессия достигается при $|\beta| \gg 1$:

$$\tilde{\tau}_{\min} \approx \tau_0 \left(\frac{2}{|\beta|} \right)^{1/2}.$$

Еще более сильное укорочение импульса можно получить при β и λ больших по абсолютной величине, но противоположного знака. В этом случае, как следует из (24) и (25),

$$\tilde{\tau}_{\min} = \frac{\tau_0}{|\beta|} \sqrt{1 + |\beta/\lambda|} \sim \frac{\tau_0}{|\beta|}, \quad u_{(\min)} \approx |\lambda/\beta|.$$

9. Подставив (17) в (14) и (16), найдем радиальное распределение энергии $U(r, z \rightarrow \infty)$, угол дифракционной расходимости α_D , эффективный радиус пучка r_e и дифракционную длину z_D в случае (10):

$$U(r, z \rightarrow \infty) = \frac{1 + \beta^2}{1 + \lambda^2} \frac{\sqrt{\pi} r_0^4}{2\tau_0 c^2 z^2} \left(1 + \frac{2\tau_2^2 \omega_0^2}{1 + \rho_2^2} \right) \times \exp \left(-\tau_2^2 \omega_0^2 \frac{\rho_2^2}{1 + \rho_2^2} \right), \quad (27)$$

$$\alpha_D = \frac{\sqrt{1 + \lambda^2} \tau_0 c / r_0}{\sqrt{1 + \beta^2 + 2\tau_0^2 \omega_0^2}}, \quad r_e = \alpha_D z, \quad Z_D = \frac{r_0}{\alpha_D} \quad (28)$$

$$\left(\tau_2^2 = \frac{\tau_0^2}{1 + \beta^2}, \quad \rho_2^2 = \rho^2 \frac{1 + \beta^2}{1 + \lambda^2} \right).$$

Используя формулу (28) для α_D , координату u на рис. 1 можно представить как

$$u = \rho^2 = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_D} \right)^2 \frac{1 + \lambda^2}{1 + \beta^2 + 2\tau_0^2 \omega_0^2} \quad (\alpha_0 \ll 1, \quad \alpha_D \ll 1). \quad (29)$$

Заметим, что все выражения, полученные в разделах 3–9 для дальней зоны, после замены z на f будут описывать фокальную плоскость сфокусированного волнового пакета (см. раздел 2).

Литература

1. Гусев В. Э., Карабутов А. А. Лазерная оптоакустика. М., 1991.

Поступила в редакцию 12.03.97