ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 550.383

РАЗРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СРЕДНИХ ПОЛЕЙ

Д. Д. Соколов

(кафедра математики)

Предлагается обобщение уравнений электродинамики средних полей, в рамках которого можно описывать разрывные распределения спиральности. Рассматривается связь между явлениями, происходящими на поверхности скачка коэффициента магнитной диффузии, и временной эволюцией магнитного момента.

1. Введение

Основная идея электродинамики средних полей состоит в замене микроскопического уравнения индукции,

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{H}] - \nu_m \mathrm{rot\ rot}\,\mathbf{H}, \tag{1}$$

описывающего эволюцию квазистационарного магнитного поля $\mathbf{H}$ в потоке $\mathbf{v}$ проводящей несжимаемой жидкости, проводимость которой определяет коэффициент магнитной диффузии ν_m, на уравнение, описывающее эволюцию среднего магнитного поля $\mathbf{B} = <\mathbf{H}>$, где $<\ldots>$ означает среднее по ансамблю реализаций поля скорости или пространственное среднее. В простейшем случае уравнение для среднего поля имеет вид [1]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,[\mathbf{V}\times\mathbf{B}] + \mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{B}) - \beta\,\mathrm{rot\ rot}\,\mathbf{B}, \tag{2}$$

где $\mathbf{V} = <\mathbf{v}>$ — средняя скорость, а β — так называемый коэффициент турбулентной диффузии. Уравнение (2) справедливо лишь в простейших приближениях, в частности для постоянного β. В более сложных ситуациях α и β могут быть тензорами и в уравнении возникают дополнительные члены, содержащие пространственные производные β.

Очевидно, коэффициенты переноса α и β могут зависеть от пространственных координат. Однако поскольку уравнение (2) описывает среднее поле, естественно полагать, что α и β являются гладкими функциями координат, характерный масштаб изменения которых превосходит, скажем, энергонесущий масштаб турбулентности. Однако на практике разрывные распределения коэффициентов переноса все же используют, поскольку они иногда сильно облегчают численное и аналитическое исследование. Подобный шаг может рассматриваться как разумное упрощение задачи с гладкими α и β, если ее свойства мало меняются при замене гладкого распределения, например α, разрывным. Однако Я. Б. Зельдович впервые отметил, что это не всегда так, и привел пример того, как разрывное и сглаженное распределения α соответствуют существенно различным решениям задачи динамо [2, 3]. В то же время часто использование разрывных коэффициентов переноса не приводит к радикальному изменению свойств решений. Цель этой работы — суммировать новые сведения о подобных явлениях, накопившиеся в ходе конкретных исследований процесса динамо, и сформулировать рекомендации, позволяющие корректно использовать разрывные распределения коэффициентов переноса в задаче динамо.

2. Интегральные соотношения Зельдовича

Опишем сначала кратко пример Зельдовича, который в свою очередь основан на изучении частного решения уравнения (2), предложенного Паркером [4]. Паркер рассматривал $\alpha\omega$-динамо в приближении тонкого диска, в котором уравнение (2) сводится к следующему виду (см., напр., [3]):

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -(\alpha B)' + \beta B_r'', \quad \frac{\partial B}{\partial t} = G B_r + \beta B'', \tag{3}$$

где B_r и B — радиальная и азимутальная компоненты среднего магнитного поля, G — сдвиг поля скорости, а штрих означает производную по направлению z, перпендикулярному к плоскости диска. Граничные условия в этом случае имеют вид $B_r(\pm h) = 0$, $B(\pm h) = 0$, где h — полутолщина диска. Для того чтобы получить точное решение этой задачи, Паркер выбрал кусочно-постоянную функцию $\alpha(z) = \alpha_0$ при $z > 0$, $\alpha(z) = -\alpha_0$ при $z < 0$. Позже выяснилось, что свойства решения Паркера очень непохожи на свойства численных решений задачи дискового динамо, полученных даже для того же самого распределения спиральности. Для того чтобы объяснить это, Зельдович предложил проинтегрировать первое из уравнений (3) по нормали к диску. Для гладкого распределения спиральности в результате этого получается

$$\frac{d}{dt}\int_{-h}^{h} B_r\,dz = \beta B'_r\big|_{z=\pm h}. \tag{4}$$

Однако для кусочно-гладкого распределения спиральности, используя стандартные приемы вычисления интегралов от обобщенных функций, получаем

$$\frac{d}{dt}\int_{-h}^{h} B_r dz = -[\alpha]B(0) + \beta B'_{r}\big|_{z=\pm h}, \qquad (5)$$

где [...] означает скачок соответствующей функции. То, что интегральные тождества (4) и (5) различны, и означает, что решения уравнений с разрывным и чуть-чуть сглаженным распределением спиральности существенно различны. Поскольку программы численного решения уравнений среднего поля обычно содержат некоторое эффективное сглаживание, они дают решения, удовлетворяющие тождеству (4), а не тождеству (5). Если заменить первое из уравнений (3) на уравнение

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -(\alpha B)' - [\alpha]\delta(z)B + \beta B_r^{''}, \qquad (6)$$

где $\delta(z)$ — δ-функция, то приближенные решения такого уравнения уже удовлетворяют интегральному соотношению (5) [2]. В работе [2] описаны численные методы, которые позволяют получить решение Паркера из уравнения (6). Подобные методы основаны на включении точек разрыва в число сеточных точек и явном введении слагаемых, описывающих дополнительные члены в уравнении (6). Обобщение этих результатов для случая произвольной геометрии приведено в следующем разделе.

3. Обобщенные решения для разрывного распределения спиральности

Интегрируем уравнение (2) по той части пространства, в которой α является гладкой функцией, получим $\int \mathbf{B} d^3\mathbf{r} = \int \alpha\mathbf{B}\times\mathbf{n}dS + ...$, где интеграл в правой части берется по границе ε-окрестности множества точек разрыва α, $\mathbf{n}$ — нормаль к границе этой окрестности, а точки обозначают члены, связанные с внешней границей области, занятой потоком. Интегральные члены в правой части этого уравнения не стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ в том случае, когда множество разрывов функции α представляет собой некоторую поверхность S. В этом случае уравнение (2) нужно заменить на следующее уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathrm{rot}\,[\mathbf{V}\times\mathbf{B}] + \mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{B}) + \\ &+\mathbf{n}\times\mathbf{B}[\alpha](\mathbf{r}_0)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - \beta\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B},\end{aligned} \qquad (7)$$

где $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ — двумерная δ-функция, сосредоточенная на поверхности скачка спиральности. Если же α разрывна на линии или в точке, в уравнениях среднего поля не возникает экстра-членов и роль разрыва оказывается не столь важной, как для случая решения Паркера.

Более сложно обстоит дело с разрывными распределениями коэффициента турбулентной диффузии. С одной стороны, совершенно тем же способом, которым выведено уравнение (7), для случая кусочно-постоянного распределения β получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathrm{rot}\,[\mathbf{V}\times\mathbf{B}] + \mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{B}) - \\ &-\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B}[\beta](\mathbf{r}_0)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - \beta\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}.\end{aligned} \qquad (8)$$

Однако само уравнение (2) для непостоянного (даже гладкого) β должно быть модифицировано. Соответствующие обобщения предлагались, однако сейчас неясно, насколько они применимы для разрывных распределений β.

Очевидно, экстра-члены в уравнении (7) не оказывают существенного влияния на решение, если разрыв расположен вдалеке от главной области активности динамо, так что $|\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)| \ll \max|\mathbf{B}|$. Это условие не выполнено для решения Паркера, поскольку плоскость $z=0$ как раз и является местом, где динамо в наибольшей степени формирует растущее магнитное поле [5].

Рассмотрим другой пример разрывного распределения спиральности, широко известный в литературе: $\alpha(r) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Это распределение часто используется для тестирования численных методов при построении сферических моделей $\alpha\omega$-динамо (см., напр., [6]). Функция α не является гладкой, хотя в особой точке $r=0$ наблюдается не скачок функции, а несовпадение пределов частных производных, вычисленных при различном стремлении точки к началу координат. Согласно уравнению (7) в этом случае не требуется введения в уравнения динамо средних полей дополнительных членов. Конечно, это не значит, что при численном решении уравнений среднего поля не возникает никаких проблем, связанных с этим разрывным распределением спиральности. Если разностная схема для решения соответствующей задачи написана в сферических координатах, то, поскольку α является гладкой функцией сферического радиуса r, в схеме присутствует только дискретизация гладких коэффициентов. Если же разностная схема написана в декартовых координатах, она содержит дискретизацию разрывных функций типа $\partial\alpha/\partial x = x/r$. Негладкость этих функций приводит к некоторым особенностям в поведении производных численного решения вблизи точки $r=0$.

4. Граничные условия на границе между потоком и вакуумом

Разумеется, экстра-члены в уравнении (2) нужно принимать во внимание и в случае разрывных распределений β. Важным примером такого рода является случай генерации крупномасштабного магнитного поля в потоке, окруженном вакуумом. Обычно эта задача рассматривается следующим образом. Решение уравнения для квазистационарного магнитного поля в вакууме $\Delta\mathbf{B}=0$ сшивается с решением уравнения (2) для области, занятой потоком. Если это удается сделать, результат сшивки представляют как некоторое граничное условие на разделе среды и вакуума для решения уравнения (2). При этом вакуумное уравнение можно формально рассматривать как результат предельного перехода в уравнении (2) при $\beta\to\infty$. Подчеркнем, что это — в точности та же процедура, которая была использована Паркером для получения решения с разрывным α.

Другими словами, обычная постановка граничного условия на границе с вакуумом для динамо средних полей связана с дополнительным физическим предположением, которое не следует прямо из уравнения (2) или других уравнений электродинамики средних полей. Выше мы отмечали, что точность, с которой выведены уравнения среднего поля, не позволяет выписать вид экстра-членов, возникающих на рассматриваемой границе.

Разумнее не пользоваться без особой необходимости результатами для разрывных распределений спиральности. Однако подобная осторожная точка зрения неприменима для случая разрыва коэффициента диффузии на границе с вакуумом. В самом деле, сглаживание этого скачка означало бы детальный учет процессов, происходящих на границе небесного тела и окружающей среды. Подобное описание явно выходит за рамки практических возможностей, а уровень развития электродинамики средних полей вряд ли достаточен для такого описания. Поэтому мы вынуждены обсудить физический смысл этого дополнительного предположения и, по возможности, очертить область, в которой его применение представляется оправданным.

Отметим прежде всего, что само представление о квазистационарном магнитном поле, которое является исходным представлением электродинамики средних полей и теории динамо вообще, не вполне совместимо с рассмотрением магнитных полей в вакууме. В самом деле, магнитное поле можно считать квазистационарным, если пренебрежима роль токов смещения, т.е. характерное время $t_c = L/c$, где L — пространственный масштаб потока, а c — скорость света, много меньше, чем все другие характерные времена задачи. Очевидно, гидродинамическое время $t_h = L/v$, где v — характерное значение гидродинамической скорости, оказывается много меньше t_c для нерелятивистских потоков. Однако шкала диффузионного времени $t_d = L^2/\beta \to 0$, когда β стремится к бесконечности, так что это время оказывается меньше t_c. Поэтому, строго говоря, в вакуумном приближении нужно было бы рассматривать квазистационарное магнитное поле и слабую и очень низкочастотную электромагнитную волну, возникающую из-за токов смещения. Эта волна, которую заведомо нельзя описать в рамках обычных уравнений динамо, и связана с теми экстра-членами, которые пришлось бы ввести в уравнения электродинамики средних полей для того, чтобы сделать их последовательными. Конечно, период этой волны связан с очень длинным характерным временем процесса динамо, ее поток энергии ничтожен, так что последовательный учет такой волны был бы очень трудной задачей. Более того, реальные небесные тела окружены не идеальным вакуумом, а слабопроводящей средой с коэффициентом магнитной диффузии $\beta_1 \gg \beta$, так что обычно $L^2/\beta_1 \gg L/c$. Однако, настаивая на необходимости учета конечной величины β_1, мы фактически настаиваем на том, что, скажем, положение магнитных полюсов Земли существенно связано с процессами в ионосфере. Такая точка зрения не кажется плодотворной. Кажется разумным считать, что в пространстве, окружающем область генерации магнитного поля, так или иначе возникает волна магнитного поля, детальные свойства которой слабо влияют на процесс генерации. Однако, как мы увидим ниже, само присутствие этой волны важно для описания генерации магнитного поля.

Это влияние связано со следующим обстоятельством. Уравнение индукции (1) так же, как и его следствие (2), имеют в случае неограниченного пространства следующий интеграл движения [7]:

$$\mathbf{I} = \text{v.p.} \int \mathbf{H} d^3\mathbf{r} = \text{v.p.} \int \mathbf{B} d^3\mathbf{r}, \tag{9}$$

где v.p. обозначает главное значение соответствующего интеграла. Этот закон сохранения можно получить путем непосредственного интегрирования уравнения (1) (или уравнения (2)), поскольку его правая часть представляет собой ротор некоторого векторного поля. Единственной проблемой при проведении этой выкладки является чрезвычайно медленная сходимость соответствующего объемного интеграла. Конечность величины $\mathbf{I}$ в начале эволюции магнитного поля можно рассматривать как граничное условие на пространственной бесконечности, соответствующее отсутствию влияния удаленных токов.

Для магнитного поля пространственно ограниченного распределения токов интеграл $\mathbf{I}$ пропорционален магнитному дипольному моменту этого распределения (см., напр., [6]). Что же касается уравнений теории динамо с постоянным ν_m или β в бесконечном пространстве, то в этом случае отсутствует бесконечный вакуум, окружающий систему, в котором можно было бы рассмотреть мультипольное приближение. Поэтому само определение магнитного момента не является вполне корректным. Однако в этом случае величину $\mathbf{I}$ естественно рассматривать как обобщение понятия магнитного момента.

Магнитный момент реальных небесных тел с очевидностью не является постоянным. Например, магнитный момент Земли меняется на противоположный во время инверсий геомагнитного поля, которые многократно происходили во время геологической истории Земли. Объяснение этого видимого противоречия между теорией и наблюдениями зависит от того, рассматриваем ли мы задачу динамо для бесконечной проводящей среды, в которой источники генерации убывают на бесконечности, или для пространственно-ограниченного потока, окруженного вакуумом. В первом случае интеграл $\mathbf{I}$ нужно представить в виде $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\text{int}} + \mathbf{I}_{\text{ext}}$, где $\mathbf{I}_{\text{int}}$ вычисляется по области, в которой сосредоточены источники генерации, а $\mathbf{I}_{\text{ext}}$ — по внешней области. Измеряя магнитный момент Земли, мы, очевидно, имеем дело с $\mathbf{I}_{\text{int}}$. Эта величина может быть зависящей от времени, поскольку ее изменение компенсируется соответствующим изменением $\mathbf{I}_{\text{ext}}$. Изменение магнитного момента в области генерации магнитного поля компенсируется вспомогательной динамо-волной, распространяющейся из этой области. Такой процесс детально исследован для случая бегущей солнечной динамо-волны в работе [8].

Оказывается, что кроме динамо-волны, распространяющейся к солнечному экватору по области максимальной генерации магнитного поля, в области слабой генерации возникает дополнительная динамо-волна, распространяющаяся к солнечному полюсу. Напомним, что мы рассматриваем растущее с осцилляциями (или стационарное) распределение магнитного поля.

Во втором случае вместо динамо-волны во внешней области возникает электромагнитная волна, не учитываемая явно в уравнениях динамо. Поэтому в области генерации возможно возникновение локализованного монотонно растущего магнитного поля. Заметим, что подобные решения действительно встречаются в задаче галактического динамо. Роль турбулентного диффузионного потока на разделе между средой и вакуумом в появлении монотонно растущих решений отмечалась в работах [2, 3].

В рассматриваемом случае магнитный момент не сохраняется. В самом деле, эволюция магнитного поля в среде и в вакууме описывается уравнениями различной структуры, так что последнее вовсе не содержит члена $\partial \mathbf{H}/\partial t$. Сама величина $\mathbf{I}$ может быть вычислена лишь для квазистационарной компоненты магнитного поля, поскольку слабая электромагнитная волна затухает на бесконечности лишь как $\sim r^{-1}$, а такое затухание недостаточно для того, чтобы интеграл $\mathbf{I}$ был определен даже в смысле главного значения.

Итак, физический смысл вакуумного граничного условия состоит в том, что волна магнитного поля вне области генерации имеет вид электромагнитной волны в вакууме, причем детальным описанием волны можно пренебречь. Эта гипотеза представляется вполне оправданной, если граница раздела вакуума и среды помещается все же на некотором удалении от области максимальной генерации, так что детали поведения решения вблизи удлиненной границы не очень существенны.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований 96-02-16252 и 95-01-01284.

Литература

1. *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М., 1984.
2. *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D., Turchaninoff V.I.* // Astrophys. Space Sci. 1979. **66**. P. 369.
3. *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D.* Magnetic Fields in Astrophysics. N.-Y., 1983.
4. *Parker E. N.* // Appl. J. 1971. **163**. P. 252.
5. *Соколов Д.Д.* //Магнитная гидродинамика. 1995. **31**. С. 44.
6. *Moffatt H.K.* Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids. Cambridge, 1978.
7. *Арнольд В.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д.* // ДАН СССР. 1982. **266**. С. 1357.
8. *Kuzanyan K., Sokoloff D.* // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1995. **81**. P. 113.

Поступила в редакцию
15.11.96